4. La formule d'Euler-Maclaurin

Exercice 1 (Produit eulérien pour la fonction sinus) — L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule suivante (Euler) :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \sin(z) = z \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \tag{1}$$

le produit étant de plus uniformément convergent sur tout compact.

1. Nous allons commencer par démontrer l'identité

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}, \quad \operatorname{cotg}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \tag{2}$$

   (i) Démontrer que le membre de droite définit une fonction méromorphe π-périodique sur $\mathbf{C}$.

   (ii) Soit $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$. Démontrer que la fonction cotg est uniformément bornée sur le demi-plan $\mathfrak{Im}(z) \geqslant \delta$.

   (iii) Démontrer que la différence des deux membres de (2) est une fonction holomorphe bornée sur $\mathbf{C}$, puis conclure.

2. Démontrer que le produit infini dans la formule (1) est uniformément convergent sur tout compact de $\mathbf{C}$.

   L'écrire sous la forme d'une exponentielle.

3. Conclure en comparant les dérivées logarithmiques des deux membres de (1).

4. En déduire la valeur de :

   (i) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ (Euler) ;

   (ii) $\prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ (Wallis).

Exercice 2 (La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin) — Considérons deux entiers $0 \leqslant M < N$ et une fonction f à valeurs complexes définie sur $[M, N]$.

1. En supposant f de classe $\mathscr{C}^1$, démontrer l'identité

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(M) + f(N)) + \int_M^N \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) f'(t)\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

   Comment est-elle reliée au calcul de l'intégrale de f par la méthode des trapèzes ?

2. Soit $(b_n)_{n \geqslant 1}$ l'unique suite de polynômes à coefficients rationnels telle que $b_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n'(t) = n b_{n-1}(t) \ \text{ et } \int_0^1 b_n(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

   Vérifier que l'on a $b_1(t) = t - \frac{1}{2}$, que b_n est unitaire pour tout $n \geqslant 0$ et que l'on a

$$b_n(1) = b_n(0)$$

   pour tout $n \geqslant 2$.

3. Supposons que f soit de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 1$. En effectuant des intégrations par parties successives, déduire de (3) la *formule sommatoire d'Euler-Maclaurin* :

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(M)+f(N)) + \sum_{q=2}^{k} (-1)^q \frac{b_q(0)}{q!}\left(f^{(q-1)}(N) - f^{(q-1)}(M)\right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_M^N b_k(t-\lfloor t\rfloor) f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Commencer par se ramener au cas $M = 0$ et $N = 1$.

4. Démontrer les identités

$$b_{2n}(t) = (-1)^{n+1} 2(2n)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^{2n}} \quad \text{et} \quad b_{2n-1}(t) = (-1)^n 2(2n-1)! \sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(2k\pi t)}{(2k\pi)^{2n-1}}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in [0,1]$. En déduire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$b_{2n+1}(0) = b_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

et

$$\sup_{[0,1]} |b_{2n}| \leqslant |b_{2n}(0)|, \quad \sup_{[0,1]} |b_{2n+1}| \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)|b_{2n}(0)|.$$

Pour la première question, on pourra établir la formule pour b_1 puis raisonner par récurrence.

5. Posons $B_n = b_n(0)$; il s'agit du n-ième *nombre de Bernoulli.* En appliquant la formule d'Euler-Maclaurin à la fonction f définie par $f(t) = e^{-zt}$, où $z \in \mathbf{C}$, vérifier que l'on obtient le développement en série entière

$$\frac{z}{1-e^{-z}} = 1 + \frac{1}{2}z + \sum_{n\geqslant 2} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

6. (Application 1) Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer $\zeta(2n)$ en fonction de B_{2n}.
7. (Application 2) Démontrer que l'on a

$$\gamma = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \log n + \frac{1}{2n} + \sum_{j=2}^{k} \frac{B_{2j}}{2jn^{2j}} + \varepsilon_{n,k}$$

pour tous $n, k \geqslant 1$, avec $|\varepsilon_{n,k}| \leqslant \frac{|B_{2k}|}{2kn^{2k}}$. Vérifier que le choix $n = 50$ et $k = 7$ permet de calculer les 24 premières décimales de γ.
8. (Application 3 : la formule de Stirling) Déduire de la formule d'Euler-Maclaurin l'existence de $C \in \mathbf{R}$ tel que

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right) - n + C + \mathrm{o}(1).$$

Déterminer C en évaluant de deux manières différentes

$$\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}.$$

Utiliser la formule de Wallis (exercice 1, question 4(ii)).

9. (Application 4 : prolongement méromorphe de zêta) En utilisant la formule d'Euler-Maclaurin, (re)démontrer que la fonction zêta admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ ayant un unique pôle, simple, en 1 et vérifiant

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

pour tout $n \geqslant 1$.