5. Autour de Γ et ζ.

On désigne par Log la détermination principale du logarithme sur $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_{\leqslant 0}$.

Exercice 1 (Représentation intégrale de $1/\Gamma$) — Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $\mathscr{H}_\varepsilon$ le chemin infini dans le plan complexe obtenu en juxtaposant la demi-droite $]-\infty - i\varepsilon, -\varepsilon - i\varepsilon]$, l'arc de cercle d'extrémités $-\varepsilon \pm i\varepsilon$ passant par $\varepsilon\sqrt{2}$ et la demi-droite $]-\infty + i\varepsilon, -\varepsilon + i\varepsilon]$. On pose

$$s^z = e^{z\mathrm{Log}(s)}$$

pour tous $z \in \mathbf{C}$ et $s \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_{\leqslant 0}$.

1. Justifier que l'intégrale
$$\int_{\mathscr{H}_\varepsilon} s^{-z} e^s \,\mathrm{d}s$$
définit une fonction holomorphe de $z \in \mathbf{C}$ et qu'elle ne dépend pas de ε.

2. Si $\mathfrak{Re}(z) < 1$, démontrer que l'on a
$$\int_{\mathscr{H}_\varepsilon} s^{-z} e^s \,\mathrm{d}s = 2i\sin(\pi z)\Gamma(1-z).$$
Faire tendre ε *vers* 0...

3. En déduire l'identité
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{H}_\varepsilon} s^{-z} e^s \,\mathrm{d}s$$
pour tous $z \in \mathbf{C}$ et tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 2 (Étude de ζ au voisinage de 1 et de 0) — On rappelle l'identité

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s} - \frac{1}{t^s}\right) \mathrm{d}t$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 0$. On rappelle également l'équation fonctionnelle

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C}\setminus\{0,1\}$.

1. Démontrer que ζ prend des valeurs réelles sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ et déterminer le signe.

2. Démontrer que l'on a
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \mathrm{O}(s-1)$$
au voisinage de 1.

3. Plus généralement, démontrer que le développement en série de Laurent de ζ au voisinage de 1 s'écrit
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{q\geqslant 1} \gamma_q (s-1)^q,$$
avec
$$\gamma_q = \frac{(-1)^q}{q!}\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{(\log k)^q}{k} - \frac{(\log n)^{q+1}}{q+1}\right).$$

4. En exploitant l'équation fonctionnelle, calculer $\zeta(0)$ et $\zeta'(0)$.

Exercice 3 (Formule de Stirling complexe) — Pour $\varepsilon > 0$, on considère le domaine D_ε de $\mathbf{C}$ défini par la condition $-\pi + \varepsilon \leqslant \mathrm{Arg}(z) \leqslant \pi - \varepsilon$, où Arg désigne la détermination principale de l'argument sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{\leqslant 0}$. Autrement dit, Ω_ε est constitué des points faisant un angle supérieur à ε avec la demi-droite $\mathbf{R}_{\leqslant 0}$.

1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que l'on a
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{|t+z|^{k+1}} = \mathrm{O}_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|^k}\right)$$
pour tout z dans Ω_ε.
2. Démontrer que l'on a
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\log n - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+n}\right)\right)$$
pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$.
3. En appliquant la formule d'Euler Maclaurin, en déduire
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \mathrm{Log}(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \int_0^\infty b_2(t - \lfloor t \rfloor)\frac{\mathrm{d}t}{(t+z)^3}$$
pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$, où b_2 désigne le deuxième polynôme de Bernoulli.
4. En déduire l'existence d'un nombre $A \in \mathbf{C}^*$ tel que
$$\Gamma(z) = Az^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\exp\left(\frac{1}{12z} - \frac{1}{2}\int_0^\infty b_2(t-\lfloor t \rfloor)\frac{\mathrm{d}t}{(t+z)^2}\right).$$
pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{\leqslant 0}$.
5. Déterminer A en faisant tendre $|z|$ vers $+\infty$ dans Ω_ε et en exploitant la formule de duplication.
6. En déduire finalement l'estimation asymptotique
$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}\left(1 + \mathrm{O}_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)$$
pour $z \in \Omega_\varepsilon$.