Université Claude-Bernard Lyon 1 2023-24
Introduction à la théorie analytique des nombres

Thèmes des exposés

1. Une démonstration probabiliste de la formule du produit d'Euler [*Amélie Guichard et Adam Jouve,* 10 octobre] — Il s'agit de redémontrer l'identité

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pour $s\in]1,+\infty[$ en utilisant un raisonnement probabiliste.

Il s'agit de présenter la solution de l'exercice 41 du chapitre 3 du livre [**GK**].

2. Comportement asymptotique de la fonction indicatrice d'Euler [*Gaspar Drazkowski et Maxime Guignandon,* 10 octobre] — La fonction indicatrice d'Euler a un comportement asymptotique très irrégulier : l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\varphi(n)/n)$ est tout l'intervalle $[0,1]$.

Il s'agit de présenter la solution de l'exercice 44 du chapitre 3 du livre [**GK**].

3. Ordre moyen de la fonction indicatrice d'Euler [*Nicolas Carrier et Mathis Vidal,* 10 octobre] — Les moyennes des valeurs de φ ont par contre un comportement asymptotique beaucoup plus régulier :

$$\sum_{n<x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+\mathrm{O}(x\ln x)$$

quand $x\to\infty$.

Il s'agit de présenter le contenu de la section 3.4 du livre [**Ten**].

4. Formule sommatoire d'Abel et deuxième théorème de Mertens — Soit (a_n) une suite complexe et soit $f:\mathbf{R}_{>0}\to\mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. En posant $A(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n$, on a

$$\sum_{y<n\leqslant x}a_nf(n)=A(x)f(x)-A(y)f(y)+\int_y^x A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette identité permet en particulier de d'établir l'estimation asymptotique

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln(x)+c+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

quand $x\longrightarrow+\infty$, où c un est un nombre réel.

Référence : [**Hin**], chapitre 4, lemme 1.9 et conséquences.

5. Polynômes et nombres de Bernoulli [*Bastien Bernagaud et Marie Thizy,* 7 novembre]— La suite $(B_n(x))_{n\geqslant 0}$ des *polynômes de Bernoulli* est définie par récurrence :

$$B_0(x)=1,\ \ B'_{n+1}=(n+1)B_n(x)\ \text{ et }\ \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t=0\text{ pour }n\geqslant 1.$$

Les *nombres de Bernoulli* sont les termes constants de ces polynômes. Il s'agit de présenter les principales propriétés de ces objets.

Références : section 1.7.1 du livre [Candelpergher] et Chapitre III, section 4.1 du livre [**Dem**].

6. Formule d'Euler-Maclaurin et applications (1) [*Mai-Linh Tran Cong et Jules Pirony*, 7 novembre]— Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un segment $[\alpha,\beta]$. La *formule d'Euler-Maclaurin* fournit un contrôle explicite de l'écart entre la somme $\sum_{n\in\mathbf{Z},\ \alpha\leqslant n\leqslant\beta} f(n)$ et $\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$. Il s'agit de démontrer cette formule et d'en déduire le calcul des nombres $\zeta(2k)$ pour $k\geqslant 1$ entier.

Références : Section 1.7.2 du livre [**Can**] et Chapitre III, section 4.2 du livre [**Dem**].

7. Formule d'Euler-Maclaurin et applications (2) — La formule d'Euler-Maclaurin permet en particulier de d'obtenir un *développement asymptotique* des sommes partielles ou des restes de certaines séries numériques. Il s'agit d'illustrer ceci avec la série harmonique et la formule de Stirling.

Références : section 1.7.3 du livre [**Can**] et Chapitre III, section 4.3 du livre [**Dem**].

8. Formule d'Euler-Maclaurin et applications (3) — La formule d'Euler-Maclaurin permet d'établir de façon élémentaire l'existence du prolongement méromorphe de la fonction ζ à $\mathbf{C}$.

Références : exercice 183 du livre [**Ten**], corrigé dans le livre [**TenWu**].

9. Formule de Poisson et équation fonctionnelle de la fonction θ [*Riyad Khichane et Benjamin Peiffert*, 14 novembre] — Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, de transformée de Fourier $\widehat{f}$. Si la famille $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable et si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(\cdot+n)$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(n).$$

Il s'agit de démontrer cette identité et en déduire l'équation fonctionnelle de la fonction θ de Jacobi.

Références : les sections 8.1 et 8.2 du livre [**Can**], ainsi que l'exercice 4.17 du livre [**FGN**].

10. Développement eulérien de la fonctions sinus [*Nawzad Hogan et Liam Deray*, 14 novembre] — Pour tout $z\in\mathbf{C}$,

$$\sin(z)=z\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

la convergence du produit infini étant uniforme sur tout compact. Il s'agit de démontrer cette identité, en commençant par établir le développement de la cotangente (à partir de la formule de Poisson).

Référence : sections 8.2.2 et 8.4.4 du livre [**Can**].

11. Représentation intégrale de la fonction Γ [*Samy Mkhinini et Vanessa Poitevin*, 27 novembre] — La fonction Γ d'Euler, traditionnellement définie par $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^z\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$ pour $z\in\mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z)>0$, se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, dont l'inverse est une fonction entière (i.e. Γ ne s'annule pas). La *formule de Hankel* est une représentation explicite de $\frac{1}{\Gamma}$ par une intégrale.

Il s'agit de démontrer la formule de Hankel, et d'en déduire une représentation intégrale de Γ sur $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$.

Référence : section II.0.5 du livre [**Ten**]

Bibliographie

[Can] B. CANDELPERGHER, *Calcul intégral*, Cassini, 2009

[Dem] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*, EDP Sciences, 2006

[FGN] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS, *Exercices de mathématiques oraux X-ENS. Analyse 2*, Cassini, 2013

[GK] O. GARET et A. KURTZMANN, *De l'intégration aux probabilités*, Ellipses, 2019

[Hin] M. HINDRY, *Arithmétique*, Calvage & Mounet, 2008

[Ten] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Dunod, 2022

[TenWu] G. TENENBAUM et J. WU, *Théorie analytique et probabiliste des nombres : 307 exercices corrigés*, Belin, 2014