M1 Mathématiques générales et applications, 2023-24 — Introduction à la théorie analytique des nombres
Université Lyon 1

2. Fonctions arithmétiques

Exercice 1 (Seconde formule d'inversion de Möbius) — 1. Soit F, G deux fonctions complexes définies sur $[1, +\infty[$. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \geqslant 1, \quad F(x) = \sum_{n \leqslant x} G(x/n)$

(ii) $\forall x \geqslant 1, \quad G(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) F(x/n)$.

2. En déduire l'identité
$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$$
pour tout $x \geqslant 1$.

Exercice 2 — Démontrer que l'anneau $(\mathscr{A}, +, *)$ est intègre.

Indications. Il s'agit de prouver que, si f et g sont deux fonctions arithmétiques non nulles, leur produit de Dirichlet $f * g$ ne l'est pas davantage. On pourra justifier, puis utiliser, l'observation suivante : étant donné $m, n \in \mathbf{N}^*$ et une factorisation non triviale
$$mn = dd', \quad d, d' \notin \{m, n\},$$
alors $d < m$ ou $d' < n$.

Exercice 3 — Soit $\mathscr{P}'$ l'ensemble des nombres entiers de la forme p^α, où p est un nombre premier et $\alpha \in \mathbf{N}^*$. Le but de cet exercice est de démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour toute fonction multiplicative $f \in \mathscr{A}$:

(i) $f(m)$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ dans $\mathbf{N}^*$;

(ii) $f(m)$ tend vers 0 quand m tend vers 0 dans $\mathscr{P}'$.

Il est est clair que la première condition implique la seconde ; il s'agit donc d'établir l'implication réciproque. Considérons une fonction multiplicative $f \in \mathscr{A}$ vérifiant la condition (ii).

1. Démontrer que, pour tout réel $c > 0$, il existe une partie finie X_c de $\mathscr{P}'$ telle que
$$|f(m)| \leqslant c$$
pour tout $m \in \mathscr{P}' \setminus X_c$.
2. En déduire que f est bornée sur $\mathscr{P}'$, puis qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$|f(n)| \leqslant C\varepsilon$$
pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ assez grand.
3. Conclure.

En guise d'application, considérons la fonction arithmétique f définie par
$$f(n) = \mathrm{Card}\{(a, b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid \mathrm{ppcm}(a, b) = n\}.$$

4. Démontrer que f est une fonction multiplicative.

   Indication : on pourra songer à utiliser les valuations p-adiques.
5. Établir l'estimation asymptotique
$$f(n) = \mathrm{o}(n^\varepsilon)$$
pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 4 (Comportement asymptotique de la fonction « nombre de diviseurs ») — On rappelle que la fonction « nombre de diviseurs » est définie par

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. On a vu que la multiplicatitivité de d découle de l'identité $d = 1 * 1$. En donner une preuve directe.
2. Démontrer l'identité
$$d(n) = \prod_p (v_p(n) + 1)$$
pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Démontrer que l'on a
$$\liminf_{n\to+\infty} d(n) = 2.$$
4. Démontrer que l'on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{d(n)}{(\log n)^k} = +\infty$$
pour tout entier $k \geqslant 1$.
Indication : calculer $d(2^a), d((2\cdot 3)^a), \dots$
5. Démontrer que l'on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{d(n)}{n^\varepsilon} = 0$$
pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 5 (La méthode de l'hyperbole de Dirichlet) — Le but de cet exercice est d'obtenir une estimation asymptotique de $\sum_{n\leqslant x} d(n)$ quand x tend vers $+\infty$.

1. Démontrer l'identité
$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = \mathrm{Card}\{(p,q) \in \mathbf{N}^* \mid pq \leqslant x\}.$$
Indication : observer que l'ensemble figurant au membre de droite est l'ensemble des points du plan à coordonnées dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ *situés sous l'hyperbole d'équation* $uv = x$. *Interpréter alors* $d(n)$ *comme le nombre de ces points appartenant à l'hyperbole d'équation* $uv = n$.
En déduire l'identité
$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = \sum_{d\leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$
2. En déduire l'estimation
$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\log x + \mathrm{O}(x).$$
3. En considérant les bandes $u \leqslant \sqrt{x}$ et $v \leqslant \sqrt{x}$, établir l'estimation raffinée suivante :
$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\log x + 2(\gamma - 1)x + \mathrm{O}(\sqrt{x}),$$
où γ désigne la constante d'Euler.