3. Séries de Dirichlet

Exercice 1 (Formule sommatoire d'Abel) — Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes et soit $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout nombre réel $x > 0$, on pose :

$$A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n.$$

1. Démontrer l'identité

$$\sum_{y<n\leqslant x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

   pour tous nombres réels $0 < y \leqslant x$.

   Indication : il s'agit essentiellement d'une reformulation de la transformation d'Abel. On pourra commencer par examiner le cas où x et y sont des entiers.

2. En appliquant cette identité avec $f(t) = \frac{1}{\ln t}$ et $a_n = \frac{\ln n}{n}\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n)$, démontrer qu'il existe un nombre réel c tel que

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + c + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

   Indication : utiliser le théorème 1.14.

3. En admettant le théorème des nombres premiers, estimer

$$\sum_{p\leqslant x} p.$$

Exercice 2 — Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique *périodique*, c'est-à-dire telle qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $f(n+q) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Démontrer que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$ est :

(i) $\sigma_c = 0$, si $\sum_{n=1}^q f(n) = 0$;

(ii) $\sigma_c = 1$ si $\sum_{n=1}^q f(n) = 1$.

Indication : utiliser une transformation d'Abel.

Exercice 3 — 1. Soit $t \in \mathbf{R}^*$. En utilisant la formule sommatoire d'Abel (exercice 1), démontrer qu'il existe un nombre complexe C tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+it}} = \frac{i}{t}N^{-it} + C + \mathrm{o}(1)$$

quand N tend vers $+\infty$.

2. En déduire que la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

   diverge en tout point de la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$.

Exercice 4 — Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique à croissance polynomiale telle que

$$L_f(s) = \prod_p L_{f,p}(s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s)$ soit suffisamment grand. Démontrer que f est multiplicative.

Exercice 5 — On rappelle que d désigne la fonction comptant le nombre de diviseurs d'un entier.

Démontrer l'identité
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$$
pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

Indication : on pourra commencer par vérifier que la fonction arithmétique $n \mapsto d(n^2)$ est multiplicative.

Exercice 6 — Démontrer l'identité
$$\sum_{m,n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}.$$

Indication : exprimer le membre de gauche sous la forme d'une série de Dirichlet.

Exercice 7 — 1. Démontrer qu'il existe une unique fonction arithmétique f telle que $f * f = 1$ et $f(1) = 1$. Établir que cette fonction est multiplicative.

2. Exprimer L_f en fonction de ζ.
3. En déduire une formule explicite pour $f(p^m)$, avec p premier et $m \in \mathbf{N}$.