

4. AUTOUR DE  $\Gamma$  ET  $\zeta$

**Exercice 1 (Encore le prolongement méromorphe de  $\Gamma$ )** — On se propose dans cet exercice de redémontrer l'existence d'un prolongement méromorphe de la fonction  $\Gamma$  sur  $\mathbf{C}$ .

1. Pour tout  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ , démontrer l'égalité

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}.$$

2. Démontrer que la série de fonctions apparaissant à la question précédente définit une fonction méromorphe sur  $\mathbf{C}$  dont on précisera les pôles et les résidus.
3. En déduire l'existence d'un prolongement méromorphe de  $\Gamma$  à  $\mathbf{C}$  dont on précisera les pôles et les résidus.

**Exercice 2 (Prolongement méromorphe de  $\zeta$  par la formule d'Euler-Maclaurin)** — Supposons que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ . On rappelle que la *formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*, obtenue par intégration par parties itérée à l'aide des polynômes de Bernoulli  $b_k$ , s'écrit :

$$\sum_{n=M}^N f(n) = \int_M^N f(t) dt + \frac{1}{2}(f(M) + f(N)) + \sum_{q=2}^k (-1)^q \frac{b_q(0)}{q!} (f^{(q-1)}(N) - f^{(q-1)}(M)) + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_M^N b_k(t - \lfloor t \rfloor) f^{(k)}(t) dt. \quad (1)$$

Soit  $s \in \mathbf{C}$ . En appliquant cette formule à la fonction  $f$  définie par  $f(t) = t^{-s}$ , redémontrer que la fonction zêta admet un prolongement méromorphe à  $\mathbf{C}$  ayant un unique pôle, simple, en 1 et vérifiant

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

pour tout  $n \geq 1$ .

**Exercice 3 (Étude de  $\zeta$  au voisinage de 1 et de 0)** — On rappelle l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s)$$

pour tout  $s \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ .

1. Démontrer que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \left( \frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$$

définit une fonction holomorphe de  $s$  sur tout le demi-plan  $\Re(s) > 0$ .

2. Établir l'identité

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$$

pour tout nombre complexe  $s$  tel que  $\Re(s) > 1$ .

3. Démontrer que  $\zeta$  prend des valeurs réelles sur  $\mathbf{R} \setminus \{1\}$  et déterminer le signe.
4. Démontrer que l'on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)$$

au voisinage de 1.

5. Plus généralement, démontrer que le développement en série de Laurent de  $\zeta$  au voisinage de 1 s'écrit

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{q \geq 1} \gamma_q (s-1)^q,$$

avec

$$\gamma_q = \frac{(-1)^q}{q!} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(\log k)^q}{k} - \frac{(\log n)^{q+1}}{q+1} \right).$$

6. En exploitant l'équation fonctionnelle, calculer  $\zeta(0)$  et  $\zeta'(0)$ .

**Exercice 4 (Lemme de Landau)** — Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres réels *positifs* telle que la série de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$  ait une abscisse de convergence  $\sigma < \infty$ . Le but de cet exercice est de démontrer que la fonction  $f$  définie sur le demi-plan  $\Re(s) > \sigma$  par

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de  $\sigma$ .

1. En introduisant la suite  $(b_n)_{n \geq 1}$  définie par  $b_n = \frac{a_n}{n^{-\sigma}}$ , vérifier qu'il suffit de démontrer le résultat souhaité lorsque  $\sigma = 0$ .

On suppose  $\sigma = 0$  dans tout ce qui suit. On raisonne par l'absurde en supposant que la fonction  $f$  admet un prolongement holomorphe sur un disque ouvert  $D$  de  $\mathbf{C}$  contenant 0.

2. En utilisant le théorème de convergence monotone, démontrer que l'on a

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

puis

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\log n)^k$$

pour tout  $k \geq 0$ .

3. Justifier soigneusement l'identité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (-t)^k = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^t}$$

pour tout nombre réel  $t < 0$  appartenant à  $D$ .

4. Conclure.