1. Compter les nombres premiers

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et par $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des éléments de $\mathscr{P}$. Rappelons que l'on note π la fonction de comptage des nombres premiers : pour tout nombre réel x,

$$\pi(x) = \mathrm{Card}\{p \in \mathscr{P} \mid p \leqslant x\}.$$

Exercice 1 (Reformulation du TNP) — 1. Soit f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{et} \quad \lim f(x) = +\infty \quad \text{quand} \quad x \longrightarrow +\infty.$$

Démontrer que ceci implique

$$\ln f(x) \sim \ln g(x) \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

L'implication réciproque est-elle vraie ?

2. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
   (i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ quand $x \to +\infty$;
   (ii) $p_n \sim n \ln n$ quand $n \to +\infty$.

Indication : observer que, par définition de la fonction de comptage, $\pi(p_n) = n$...

Exercice 2 (Le terme d'erreur dans le TNP) — Rappelons que la fonction *logarithme intégral* Li est définie par l'identié

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

pour tout nombre réel $x > 0$.

1. Pour tous réels $\beta > \alpha > 0$, démontrer que l'on a

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{x}{(\ln x)^\alpha}\right)$$

   quand $x \longrightarrow +\infty$. En déduire :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^\alpha} \sim \frac{x}{(\ln x)^\alpha}$$

   quand x tend vers $+\infty$.

2. Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. Établir le développement asymptotique

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + 1!\frac{x}{(\ln x)^2} + \ldots + (n-1)!\frac{x}{(\ln x)^n} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right)$$

   quand $x \longrightarrow +\infty$.

3. En 1899, C. de la Vallée Poussin démontra l'existence d'un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

   quand $x \longrightarrow +\infty$ et, en 1901, H. von Koch démontra que l'hypothèse de Riemann implique (en fait, équivaut à) l'estimation asymptotique

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(\sqrt{x}\ln x)$$

   quand $x \longrightarrow +\infty$.

(i) Comparer les deux termes d'erreur.

(ii) Entre $\frac{x}{\ln x}$ et $\mathrm{Li}(x)$, quelle est la meilleure approximation asymptotique de $\pi(x)$?

Exercice 3 — Le but de cet exercice est d'établir l'encadrement

$$\ln\ln x - \ln 2 \leqslant \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} \leqslant e \ln\ln x + C$$

pour tout nombre réel $x > 1$, où $C > 0$ est un nombre réel que l'on ne cherchera pas à expliciter.

1. Démontrer que tout nombre entier $n \geqslant 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = q^2 m$, où q et un nombre entier et m est un nombre entier sans facteur carré. Par exemple, $540 = 27\cdot 4\cdot 5 = (2\cdot 3)^2\cdot(3\cdot 5)$.

2. En déduire la majoration
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant \left(\sum_{q\geqslant 1} \frac{1}{q^2}\right)\cdot\left(\sum_{m\in S,\ m\leqslant N} \frac{1}{m}\right)$$
pour tout $N \geqslant 1$, où S désigne l'ensemble des nombre entiers sans facteur carré.
Indication : s'inspirer de la preuve de la formule du produit d'Euler...

3. Établir la majoration
$$\sum_{m\in S,\ m\leqslant N} \frac{1}{m} \leqslant \prod_{p\in\mathscr{P},\ p\leqslant N} \left(1+\frac{1}{p}\right).$$
Indication : s'inspirer de la preuve de la formule du produit d'Euler...

4. En déduire la minoration souhaitée de
$$\sum_{p\leqslant N} \frac{1}{p}.$$
Indication : se souvenir de l'inégalité de convexité $1 + x \leqslant e^x$ *pour tout réel* x*...*

5. (*Plus difficile*) La majoration est plus un peu plus délicate à établir. On va la déduire de l'estimation asymptotique
$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = \ln\frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1)$$
quand $s \to 1^+$ en utilisant l'« astuce de Rankin » (*Rankin's trick*).
   (i) Déterminer un nombre réel $C > 0$ tel que
   $$\frac{1}{n}\mathbf{1}_{\{n\leqslant x\}} \leqslant \frac{C}{n^{1+\frac{1}{\ln x}}}$$
   pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 1$.
   (ii) En déduire la majoration souhaitée de
   $$\sum_{p\in\mathscr{P}, p\leqslant x} \frac{1}{p}.$$

Exercice 4 — Le but de cet exercice est d'établir la majoration

$$\prod_{p\leqslant x} p \leqslant 4^x$$

pour tout nombre réel $x \geqslant 2$.

1. En considérant les coefficients binomiaux $\binom{2n}{n}$ et $\binom{2n+1}{n}$, prouver que l'on a
$$\prod_{n<p\leqslant 2n} p \leqslant 4^n \quad\text{et}\quad \prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p \leqslant 4^n.$$

2. En déduire la majoration souhaitée :

$$\prod_{p\leqslant x} p \leqslant 4^x$$

pour tout réel $x \geqslant 2$.

Indication : se ramener au cas où x est entier, puis raisonner par récurrence.

Problème : le postulat de Bertrand — Le mathématicien français Joseph Bertrand a conjecturé en 1845 que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intervalle $]n, 2n[$ contient un nombre premier. Tchebychev en a donné la première démonstration en 1850.

1. Vérifier le postulat de Bertrand pour tous les entiers $n \leqslant 1000$ en utilisant une table des valeurs de la fonction de comptage (avec *Python*, par exemple).
2. Déduire le postulat de Bertrand de l'encadrement

$$0,92\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant 1,11\frac{x}{\log x}$$

établi par Tchébychev.

Indication : démontrer que l'on a $\pi(2n) \geqslant \pi(n)+1$ si l'entier n est assez grand.

3. En utilisant le théorème des nombres premiers, démontrer la généralisation suivante :

pour tout entier $r \geqslant 1$ et tout réel $\lambda > 1$, il existe un entier $n_0 = n_0(r, \varepsilon)$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, l'intervalle $]n, \lambda n]$ contient au moins r nombres premiers.

On doit à Paul Erdős une preuve élémentaire du postulat de Bertrand (en 1932).

4. Prouver que l'on a, pour tout p premier et tout $n \geqslant 1$:

$$v_p\binom{2n}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n < p \leqslant 2n \\ 0 & \text{si} \quad \frac{2}{3}n < p \leqslant n \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{si} \quad \sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n. \end{cases}$$

Indication : Calculer $v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$ à l'aide de la formule de Legendre.

5. Établir l'encadrement

$$\frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{2n/3} \cdot \prod_{n<p\leqslant 2n} p.$$

Indication : séparer les facteurs premiers de $\binom{2n}{n}$ en fonction de leur taille et utiliser le résultat de l'exercice 3.

6. En déduire le postulat de Bertrand.
7. (Application) Déduire du postulat de Bertrand que, pour tout entier $n \geqslant 2$, le nombre rationnel

$$H_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$$

n'est jamais un entier.