3. Séries de Dirichlet

Exercice 1 (Formule sommatoire d'Abel) — Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes et soit $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout nombre réel $x > 0$, on pose :

$$A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n.$$

1. Démontrer l'identité

$$\sum_{y<n\leqslant x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous nombres réels $0 < y \leqslant x$.

Indication : il s'agit essentiellement d'une reformulation de la transformation d'Abel. On pourra commencer par examiner le cas où x et y sont des entiers.

2. Rappelons que l'on désigne par μ la *fonction de Möbius*. Supposons que, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$, on ait

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n) = \mathrm{O}_\varepsilon\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.

(i) Démontrer que la série de Dirichlet L_μ converge sur le demi-plan $\Omega = \left\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > \frac{1}{2}\right\}$.

(ii) En déduire que la fonction ζ ne s'annule en aucun point de Ω.

3. En admettant le théorème des nombres premiers, estimer

$$\sum_{p\leqslant x} p.$$

Exercice 2 — Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique *périodique*, c'est-à-dire telle qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $f(n+q) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Démontrer que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$ est :

(i) $\sigma_c = 0$, si $\sum_{n=1}^{q} f(n) = 0$;

(ii) $\sigma_c = 1$, si $\sum_{n=1}^{q} f(n) = 1$.

Indication : utiliser une transformation d'Abel.

Exercice 3 — Considérons les deux fonctions arithmétiques f et g définies pour $n \geqslant 1$ par :

$$f(n) = (-1)^{n-1} \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 3 \\ -2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

1. Déterminer les abscisses de convergence de f et de g.

2. Établir les identités

$$L_f(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) \quad \text{et} \quad L_g(s) = (1-3^{1-s})\zeta(s)$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

3. Déduire des deux questions précédentes une démonstration du fait que la fonction ζ admette un prolongement méromorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > 0\}$ ayant un unique pôle en $s = 1$, qui est simple et de résidu 1.

Exercice 4 — 1. Soit $t \in \mathbf{R}^*$. En utilisant la formule sommatoire d'Abel (exercice 1), démontrer qu'il existe un nombre complexe C tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+it}} = \frac{i}{t} N^{-it} + C + \mathrm{o}(1)$$

quand N tend vers $+\infty$.

2. En déduire que la série de Dirichlet

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

diverge en tout point de la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$.

On rappelle que tout sous-groupe de $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ *est soit fini soit dense.*

Exercice 5 — On rappelle que d désigne la fonction comptant le nombre de diviseurs d'un entier.

Démontrer l'identité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

Indication : on pourra commencer par vérifier que la fonction arithmétique $n \mapsto d(n^2)$ *est multiplicative.*

Exercice 6 — Démontrer l'identité

$$\sum_{m,n \geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}.$$

Indication : exprimer le membre de gauche sous la forme d'une série de Dirichlet.

Exercice 7 — 1. Démontrer qu'il existe une unique fonction arithmétique f telle que $f * f = 1$ et $f(1) = 1$. Établir que cette fonction est multiplicative.

2. Exprimer L_f en fonction de ζ.
3. En déduire une formule explicite pour $f(p^m)$, avec p premier et $m \in \mathbf{N}$.

Exercice 8 — Pour tout nombre réel $x > 0$, notons $N(x)$ le nombre de couples (m, n) de nombres entiers *premiers entre eux* dans $[1, x]^2$.

1. Démontrer l'identité

$$N(x) = \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor^2.$$

2. En déduire

$$N(x) = x^2 \sum_{d \leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathrm{O}(x \ln x),$$

puis

$$N(x) = \frac{6}{\pi^2} x^2 + \mathrm{O}(x \ln x)$$

quand x tend vers $+\infty$.

3. Comment interpréter le résultat précédent en termes probabilistes ?
4. Démontrer que l'on a

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + \mathrm{O}(x \ln x)$$

quand x tend vers $+\infty$.