4. Autour de Γ et ζ

Exercice 1 (Encore le prolongement méromorphe de Γ) — On se propose dans cet exercice de redémontrer l'existence d'un prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbf{C}$.

1. Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) > 0$, démontrer l'égalité
$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}.$$
2. Démontrer que la série de fonctions apparaissant à la question précédente définit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont on précisera les pôles et les résidus.
3. En déduire l'existence d'un prolongement méromorphe de Γ à $\mathbf{C}$ dont on précisera les pôles et les résidus.

Exercice 2 (Comportement asymptotique de Γ) —

1. Démontrer que l'on a
$$\frac{1}{\left|\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)\right|} \sim \frac{k!\sqrt{k}}{2\pi}$$
quand k tend vers $+\infty$.
2. En déduire qu'il n'existe pas de constantes $c_1, c_2 \in \mathbf{R}_{>0}$ telles que
$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leqslant c_1 e^{c_2|z|}$$
pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 3 (Lemme de Landau) — Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels *positifs* telle que la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ ait une abscisse de convergence $\sigma < \infty$. Le but de cet exercice est de démontrer que la fonction f définie sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \sigma$ par
$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$
n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de σ.

1. En introduisant la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $b_n = \frac{a_n}{n^{-\sigma}}$, vérifier qu'il suffit de démontrer le résultat souhaité lorsque $\sigma = 0$.

On suppose $\sigma = 0$ dans tout ce qui suit. On raisonne par l'absurde en supposant que la fonction f admet un prolongement holomorphe sur un disque ouvert D de $\mathbf{C}$ contenant 0.

2. En utilisant le théorème de convergence monotone, démontrer que l'on a
$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$
puis
$$f^{(k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\log n)^k$$
pour tout $k \geqslant 0$.

3. Justifier soigneusement l'identité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(-t)^k = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^t}$$

pour tout nombre réel $t < 0$ appartenant à D.

4. Conclure.

Exercice 4 (Étude de ζ au voisinage de 1 et de 0) — On rappelle l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$.

1. Démontrer que l'intégrale
$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} - \frac{1}{t^s}\right) \mathrm{d}t$$
définit une fonction homolorphe de s sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$.

2. Établir l'identité
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor^s} - \frac{1}{t^s}\right) \mathrm{d}t$$
pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

3. Démontrer que ζ prend des valeurs réelles sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et déterminer le signe.

4. Démontrer que l'on a
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \mathrm{O}(s-1)$$
au voisinage de 1.

5. Plus généralement, démontrer que le développement en série de Laurent de ζ au voisinage de 1 s'écrit
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{q\geqslant 1} \gamma_q (s-1)^q,$$
avec
$$\gamma_q = \frac{(-1)^q}{q!} \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\log k)^q}{k} - \frac{(\log n)^{q+1}}{q+1}\right).$$

6. En exploitant l'équation fonctionnelle, calculer $\zeta(0)$ et $\zeta'(0)$.