5. Caractères et fonctions L de Dirichlet

Exercice 1 — 1. Déterminer les caractères de Dirichlet modulo 12 et préciser leur conducteur.

2. Faire la liste des caractères de Dirichlet modulo 7 qui sont d'ordre 3.

Exercice 2 — Un caractère de Dirichlet χ modulo N est dit *réel* si $\chi(a) \in \mathbf{R}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire si $\chi(a) \in \{-1, 1\}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$ tel que $\operatorname{pgcd}(a, N) = 1$.

1. Désignons par $R(N)$ le nombre de caractères de Dirichlet modulo N qui sont réels. Démontrer que R est une fonction arithmétique multiplicative, puis calculer $R(p^k)$ pour tout nombre premier p et tout entier $k \geqslant 1$.
2. Déterminer les entiers N tels que tout caractère de Dirichlet modulo N soit réel.

Exercice 3 — Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier et soit χ un caractère de Dirichlet réel modulo p.

Démontrer que le nombre entier

$$\sum_{k=1}^{p-1} k\chi(k)$$

est divisible par p. Qu'en est-il pour $p = 3$?

Exercice 4 — Soit a et q deux nombres entiers strictement positifs tels que $\operatorname{pgcd}(a, q) = 1$. Sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 1$, exprimer la série de Dirichlet

$$\sum_{n \equiv a \pmod q} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

en termes de fonctions L de Dirichlet.

Exercice 5 — Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $f(n)$ le reste de la division euclidienne de n par 5 et considérons la série de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

1. Sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 1$, exprimer $F(s)$ à l'aide des fonctions L de Dirichlet.
2. Démontrer que F admet un prolongement méromorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) > 0$, en explicitant ses pôles et leurs résidus.