1. GÉOMÉTRIE AFFINE

Espaces affines - Applications affines - Barycentres

***Rappels** – Soit k un corps et soit* **E** *un k-espace vectoriel.*

1. Un espace affine *de* direction **E** *est un ensemble* E *muni d'une action* simplement transitive *du groupe* **E***, notée*

$$\mathbf{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \quad (\mathbf{u}, \mathrm{M}) \mapsto \mathrm{M} + \mathbf{u}.$$

Dire que cette action est simplement transitive équivaut à la condition suivante : pour tous points $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{E}$*, il existe un* unique *vecteur* $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$ *tel que* $\mathrm{N} = \mathrm{M} + \mathbf{u}$ *; ce vecteur est noté* $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$.

2. Par définition d'une action de groupe,

$$\mathrm{M} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathrm{M} + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$$

pour tous $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$*. Quels que soient les points* $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{P} \in \mathrm{E}$*, on a donc*

$$\mathrm{M} + (\overrightarrow{\mathrm{MN}} + \overrightarrow{\mathrm{NP}}) = (\mathrm{M} + \overrightarrow{\mathrm{MN}}) + \overrightarrow{\mathrm{NP}} = \mathrm{N} + \overrightarrow{\mathrm{NP}} = \mathrm{P} = \mathrm{M} + \overrightarrow{\mathrm{MP}},$$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{MN}} + \overrightarrow{\mathrm{NP}} = \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ *(*relation de Chasles*).*

3. Un sous-espace affine *de* E *est une partie non vide* F *de* E *de la forme* $\mathrm{F} = \mathrm{A} + \mathbf{F}$*, où* A *est un point de* F *et* **F** *est un sous-espace vectoriel de* E*, appelé* direction *de* F.

4. La dimension *d'un sous-espace affine* F *de* E *est la dimension de sa direction* **F**.

5. Étant donnés deux sous-espaces affines F *et* G *de* E*, on dit que* E *est* parallèle *à* G *si* $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ [(1)]. *On dit que* F *et* G *sont* parallèles *si* F *est parallèle à* G *et si* G *est parallèle à* F*, ce qui revient à dire que* F *et* G *ont la même direction :* $\mathbf{F} = \mathbf{G}$.

6. Soient E *et* F *deux espaces affines de directions respectives* **E** *et* **F**. *Une application* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est dite* affine *s'il existe une application linéaire* $\mathbf{f} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *telle que*

$$f(\mathrm{M} + \mathbf{u}) = f(\mathrm{M}) + \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

pour tous $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ *et* $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$. *Si tel est le cas, l'application* **f** *est uniquement déterminée par* f *et appelée* partie linéaire *de* f *; on a*

$$\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathrm{MN}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{M})f(\mathrm{N})}$$

pour tous $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{E}$.

7. Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ *des points d'un espace affine* E *et soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ *des scalaires. La* fonction vectorielle de Leibniz *associée à la famille de points pondérés* $\{(\mathrm{A}_1, \lambda_1), \ldots, (\mathrm{A}_n, \lambda_n)\}$ *est l'application*

$$\mathrm{L} : \mathrm{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathrm{M} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}.$$

C'est une application affine, de partie linéaire $-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$*, où* $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Si $\lambda = 0$, L *est constante. Si* $\lambda \neq 0$, L *est une bijection et alors le* barycentre *de la famille de points pondérés* $\{(\mathrm{A}_1, \lambda_1), \ldots, (\mathrm{A}_n, \lambda_n)\}$ *est l'unique point* G *de* E *tel que* $\mathrm{L}(\mathrm{G}) = \mathbf{0}$.

[(1)] Attention, cette relation n'est *pas* symétrique !

Exercice 1.1. (Sous-espaces affines) — Soit E un espace affine. On suppose dans cet exercice que k est de caractéristique différente de 2, ce qui permet de parler du milieu d'un segment.

(i) Démontrer qu'une partie non vide F de E est un sous-espace affine si et seulement si, pour tous points distincts $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{F}$, la droite (MN) est contenue dans F.

(ii) Fixons un point dans E et considérons deux sous-espaces affines F et F' de E. Étant donné un scalaire $\lambda \in k$, démontrer que l'image de l'application

$$\mathrm{F} \times \mathrm{F}' \to \mathrm{E}, \quad (\mathrm{M}, \mathrm{M}') \mapsto \mathrm{O} + \lambda \overrightarrow{\mathrm{OM}} + (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$$

est un sous-espace affine de E dont on précisera la direction.

Exercice 1.2. (Intersection de sous-espaces affines) — Soit E un espace affine et soient F, G deux sous-espaces affines de E.

(i) Démontrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sous-espace affine de E si et seulement si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \neq \varnothing$. $\mathbf{E} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$. Quelle est la direction de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$?

(ii) Si $\mathbf{E} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$, montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sous-espace affine de E. Que se passe-t-il si $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$?

Exercice 1.3. (Applications affines) — 1. Démontrer qu'une application affine est injective (resp. surjective ; resp. bijective) si et seulement sa partie linéaire est injective (resp. surjective ; resp. bijective).

2. Soit E un espace affine et soit O un point fixé dans E.

(i) Démontrer que toute application affine $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $f = t \circ \widetilde{f}$, où

- $\widetilde{f}$ est une application affine ayant la même partie linéaire que f et fixant O ;
- t est une translation.

Expliciter $\widetilde{f}$ et t en fonction de f.

(ii) Pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$, exprimer l'application affine $\widetilde{f} \circ t_{\mathbf{u}}$ sous la forme précédente.

(iii) Considérons finalement deux applications affines $f, g : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, que l'on écrit sous la forme $f = t_{\mathbf{u}} \circ \widetilde{f}$ et $g = t_{\mathbf{v}} \circ \widetilde{g}$ décrite en (i). Déduire de ce qui précède l'identité

$$g \circ f = t_{\mathbf{v}+\mathbf{g}(\mathbf{u})} \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{f}.$$

Exercice 1.4. (Projections affines) — Soit E un espace affine et soit F un sous-espace affine de E.

(i) Étant donné un supplémentaire $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{E}$, démontrer qu'il existe une application affine et une seule $p : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que $\overrightarrow{\mathrm{M}p(\mathrm{M})} \in \mathbf{F}'$ pour tout point $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Par définition, p est la *projection sur* F *parallèlement à* $\mathbf{F}'$.

(ii) Quelle est la partie linéaire de p ?

(iii) Vérifier que l'on a $p \circ p = p$. Réciproquement, montrer que toute application affine $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vérifiant $f \circ f = f$ est une projection.

Exercice 1.5. (Symétries affines) — Soit E un espace affine. On suppose dans cet exercice que le corps k est de caractéristique différente de 2.

(i) Soit F un sous-espace affine de E et soit $\mathbf{F}'$ un supplémentaire de $\mathbf{F}'$ dans $\mathbf{E}$. On désigne par p la projection de E sur F parallèlement à $\mathbf{F}'$ (cf. exercice précédent). Démontrer qu'il existe une unique application affine $s : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que, pour tout point M de E, $p(\mathrm{M})$ soit le milieu du segment $[\mathrm{M}, s(\mathrm{M})]$.

(ii) Vérifier que l'on a $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Réciproquement, montrer que toute application affine $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ est une symétrie.

Exercice 1.6. (Expressions analytiques d'une application affine) — Soit E un espace affine de dimension 3 muni d'un reprère cartésien $(\mathrm{O};\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$.

(i) Donner l'expression analytique d'une homothétie quelconque (resp. d'une translation quelconque) dans ce repère.

(ii) Exprimer analytiquement la projection sur le plan Π d'équation $2x_1-x_2+x_3+3=0$ parallèlement à la droite vectorielle $\mathbf{D}$ de direction $\mathbf{e_1}+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$. Même question avec la symétrie par rapport à Π et parallèlement à $\mathbf{D}$ (on suppose ici k de caractéristique différente de 2).

(iii) Étudier l'application affine f de E dans lui-même envoyant un point de coordonnées (x_1,x_2,x_3) sur le point de coordonnées (x'_1,x'_2,x'_3), où

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'_1 & = & 1-x_2-x_3 \\ x'_2 & = & 2-2x_1-x_2-2x_3 \\ x'_3 & = & -2+2x_1+2x_2+3x_3 \end{array}\right.$$

Exercice 1.7. (Parallélogrammes) — Soit E un espace affine. Étant donnés quatre points A, B, C, D de E, deux à deux distincts et non alignés, démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$;

(b) les droites (AB) et (CD) d'une part, (AD) et (BC) d'autre part, sont parallèles ;

(c) les segments $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BD}]$ ont le même milieu.

Si ces conditions sont vérifiées, démontrer en outre que les quatre points A, B, C, D sont coplanaires.

Exercice 1.8. (Médianes d'un triangle) — Soit P un plan affine.

(i) Démontrer que les médianes d'un triangle non plat sont concourantes.

(ii) Étant données trois droites concourantes, construire un triangle dont ce sont les médianes.

Exercice 1.9. (Coordonnées barycentriques) — Soit E un espace affine de dimension n. On considère $n+1$ points $\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n$ dans E.

(i) Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) les points $\mathrm{A}_0,\ldots,\mathrm{A}_n$ ne sont contenus dans aucun sous-espace affine propre de E ;

(b) $(\mathrm{A}_0;\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n})$ est un repère cartésien de E.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que $(\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n)$ est un *repère affine* de E.

(ii) Supposons que $(\mathrm{A}_0,\ldots,\mathrm{A}_n)$ soit un repère affine de E. Démontrer que, pour tout point M de E, il existe une unique famille de scalaires $x_0,\ldots,x_n\in k$ telle que $\sum_{i=0}^n x_i=1$ et $\mathrm{M}=\mathrm{Bar}((\mathrm{A}_0,x_0),(\mathrm{A}_1,x_1),\ldots,(\mathrm{A}_n,x_n))$; ce sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère $(\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n)$.

(iii) Comparer les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine $(\mathrm{A}_0,\ldots,\mathrm{A}_n)$ et ses coordonnées cartésiennes dans le repère cartésien $(\mathrm{A}_0;\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n})$.

(iv) Considérons $n+1$ points $\mathrm{M}_0,\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_n$ dans E et désignons par $(x_{i0},x_{i1},\ldots,x_{in})$ les coordonnées barycentriques de M_i dans le repère affine $(\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n)$. Démontrer qu'il existe un sous-espace affine propre de E contenant $\mathrm{M}_0,\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_n$ si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0n} \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

est nul.

Exercice 1.10. (Coordonnées barycentriques, suite) — Considérons un plan affine P et soit (A_0, A_1, A_2) un repère affine de P.

(i) Démontrer que trois points de P, de coordonnées barycentriques respectives (a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2) et (c_0, c_1, c_2), sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) En déduire que toute droite de P admet une équation barycentrique de la forme $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in k$ des scalaires non tous nuls.

(iii) Soient D et D′ deux droites distinctes. Démontrer que les droites dont une équation barycentrique est une combinaison linéaire des équations barycentriques de D et D′ sont précisément les droites du faisceau défini par D et D′, c'est-à-dire

(a) les droites parallèles à D et D′ si D et D′ sont parallèles ;

(b) les droites passant par le point I si les droites D et D′ sont concourantes en I.

(iv) Considérons trois droites D, D′ et D″, dont des équations barycentriques sont $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$, $\alpha' x_0 + \beta' x_1 + \gamma' x_2 = 0$ et $\alpha'' x_0 + \beta'' x_1 + \gamma'' x_2 = 0$ respectivement. Déduire de ce qui précède que ces trois droites sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 1.11. (Dilatations) — Soit E un espace affine. Une *dilatation* est une application affine $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle, i.e. $\mathbf{f} = \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ avec $\lambda \in k^\times = k - \{0\}$.

(i) Démontrer les dilatations forment un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA(E)}$.

(ii) Démontrer que toute dilatation est une translation ou une homothétie.

(iii) Étant donnés quatre points $\mathrm{A, B, A', B'}$ de E tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, $\mathrm{A'} \neq \mathrm{B'}$ et $(\mathrm{A'B'})//(\mathrm{AB})$, démontrer qu'il existe une unique dilatation f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A'}$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B'}$.

(iv) Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application (que l'on ne suppose pas *a priori* affine) envoyant toute droite sur une droite parallèle. Démontrer que f est une dilatation.

Exercice 1.12. (Deux constructions à la règle seule) — On travaille dans un plan affine.

(i) Supposons donnés deux points distincts A et B ainsi que le milieu I du segment $[\mathrm{AB}]$. Quel que soit le point P, montrer que l'on peut construire, à la règle seule, la parallèle à (AB) passant par P.

(*Indications* : Si $\mathrm{P} \notin (\mathrm{AB})$, considérer un point O n'appartenant pas à (AB) et soit Q le point d'intersection de (OB) avec la parallèle à (AB) passant par P. Montrer qu'il existe une unique homothétie h telle que $h(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}$ et $h(\mathrm{B}) = \mathrm{P}$, puis prouver que son centre J appartient à la droite (OI). En déduire une construction du point Q.)

(ii) Soient D et D′ deux droites parallèles distinctes et soit M un point du plan. En utilisant la question précédente, montrer que l'on peut construire, à la règle seule, la parallèle à D et D′ passant par M.

Exercice 1.13. (Construction d'un polygône à partir des milieux de ses côtés) — Soit E un espace affine. On suppose que le corps k est de caractéristique différente de 2.

Étant donnés des points $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ de E, on cherche des points $\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n, \mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_1$ de E tels que A_i soit le milieu de $[\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}]$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

(i) Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on désigne par h_i l'homothétie de centre A_i et de rapport -1. Montrer que toute solution $(\mathrm{B}_1,\ldots,\mathrm{B}_n,\mathrm{B}_{n+1}=\mathrm{B}_1)$ du problème est telle que $\mathrm{B}_{i+1}=h_i(\mathrm{B}_i)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

(ii) En déduire que l'ensemble des solutions du problème considéré est en bijection avec l'ensemble des points fixes de l'application affine $h_n \circ \ldots \circ h_1$.

(iii) Si n est impair, démontrer qu'il existe une unique solution.

(iv) Si n est pair, démontrer que le problème admet une solution si et seulement si

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}+\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}+\ldots+\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\mathbf{0},$$

auquel cas l'ensemble des solutions est infini.

(v) Donner une construction explicite pour $n=3$, et pour $n=4$ lorsque $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4)$ est un parallélogramme.

Exercice 1.14. (Théorème de Desargues) — *Soient* $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'$ *six points distincts d'un plan affine* E *tels que* $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')//(\mathrm{AB})$, $(\mathrm{A}'\mathrm{C}')//(\mathrm{AC})$ *et* $(\mathrm{B}'\mathrm{C}')//(\mathrm{BC})$. *Alors les droites* $(\mathrm{AA}'),(\mathrm{BB}')$ *et* (CC') *sont parallèles ou concourantes.*

(i) Donner une démonstration utilisant des dilatations.

(ii) Donner une démonstration analytique (utiliser le repère $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})$).

Exercice 1.15. (Théorème de Pappus) — *Soient* D *et* D' *deux droites distinctes dans un plan affine et soient* $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ *(resp.* $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'$*) trois points distincts sur* $\mathrm{D}-\mathrm{D}\cap\mathrm{D}'$ *(resp. sur* $\mathrm{D}'-\mathrm{D}'\cap\mathrm{D}$*). Si* $(\mathrm{AB}')//(\mathrm{A}'\mathrm{B})$ *et* $(\mathrm{BC}')//(\mathrm{B}'\mathrm{C})$, *alors* $(\mathrm{AC}')//(\mathrm{A}'\mathrm{C})$.

(i) Donner une démonstration reposant sur le théorème de Thalès.

(ii) Donner une démonstration utilisant des dilatations.

Exercice 1.16. (Théorème de Menelaus) — *Soit* ABC *un triangle non plat dans un plan affine et soient* A', B', C' *des points sur les droites* (BC), (AC) *et* (AB) *respectivement, distincts de* A, B *et* C. *Les points* A', B' *et* C' *sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}}{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{C}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{B}'\mathrm{C}}}{\overline{\mathrm{B}'\mathrm{A}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{C}'\mathrm{A}}}{\overline{\mathrm{C}'\mathrm{B}}}=1.$$

(i) Donner une démonstration reposant sur le théorème de Thalès (considérer la parallèle à $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')$ passant par B).

(ii) Donner une démonstration utilisant des dilatations (considérer les homothéties $h_{\mathrm{A}'}$, $h_{\mathrm{B}'}$ et $h_{\mathrm{C}'}$, de centres respectifs A', B' et C', telles que $h_{\mathrm{A}'}(\mathrm{B})=\mathrm{C}$, $h_{\mathrm{B}'}(\mathrm{C})=\mathrm{A}$ et $h_{\mathrm{C}'}(\mathrm{A})=\mathrm{B}$).

(iii) Donner une démonstration reposant sur les coordonnées barycentriques (utiliser l'exercice 1.9).

Exercice 1.17. (Théorème de Ceva) — *Soit* ABC *un triangle non plat dans un plan affine et soient* A', B', C' *des points sur les droites* (BC), (AC) *et* (AB) *respectivement, distincts de* A, B *et* C. *Les droites* (AA'), (BB') *et* (CC') *sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}}{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{C}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{B}'\mathrm{C}}}{\overline{\mathrm{B}'\mathrm{A}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{C}'\mathrm{A}}}{\overline{\mathrm{C}'\mathrm{B}}}=-1.$$

(i) Donner une démonstration reposant sur les théorèmes de Thalès (droites parallèles) et de Menelaus (droites concourantes).

(ii) Donner une démonstration reposant sur les coordonnées barycentriques (utiliser l'exercice 1.10).