Université de Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1

Préparation du CAPES
Automne 2008

2. Géométrie affine plane axiomatique

***Présentation** — Telle que nous l'étudions de nos jours, la géométrie élémentaire repose sur l'algèbre linéaire : on commence par définir les notions d'espace et d'application affines sur un corps k à partir des notions de k-espace vectoriel et d'application linéaire, puis, lorsque $k = \mathbb{R}$, on introduit en outre des notions de distance et d'angles en considérant un produit scalaire sur l'espace vectoriel associé.*

Ce point de vue, relativement récent, n'était évidemment pas celui adopté dans les textes classiques – à commencer par les Éléments *d'Euclide, où l'on travaille à partir d'axiomes portant sur des notions premières (par exemple : points, droites, plan, etc.). Le grand avantage de l'approche contemporaine via l'algèbre linéaire est de fournir un cadre précis et simple permettant en particulier de faire des calculs.*

Cette fiche propose de comparer l'approche usuelle de la géométrie affine plane avec une approche « à la Euclide », reposant sur un certain nombre de données premières et d'axiomes. Ce qui suit est très fortement inspiré par la présentation qu'en donne Emil Artin dans le livre Algèbre géométrique *(Éditions Jacques Gabay, 1962), cité [Artin] par la suite. Ce que l'on va démontrer, c'est qu'il existe une courte liste de cinq axiomes simples et de nature géométrique caractérisant exactement la géométrie des points et des droites dans un plan affine ; c'est un résultat remarquable ! Le plus frappant est sans doute que les cinq axiomes en question renferment de manière implicite la description complète du* corps des scalaires.

De manière générale, il est important de réaliser que l'on peut toujours modifier un système d'axiomes sans toucher au résultat final ; la simplicité, le faible nombre d'axiomes utilisés, etc. sont des critères de sélection. Enfin, l'approche de la géométrie via l'algèbre linéaire peut se voir comme une description axiomatique : les axiomes utilisés sont ceux des corps, des espaces vectoriels et des espaces affines...

Une approche axiomatique compatable dans le cadre euclidien est également possible, mais plus compliquée à décrire. Les personnes intéressées sont, par exemple, renvoyées au livre Fondements de la géométrie *de David Hilbert (même éditeur).*

***Comment faire les exercices ci-dessous ?** — Les règles sont simples : il s'agit de répondre aux questions en utilisant seulement les axiomes donnés et les résultats des questions antérieures. On aura intérêt à raisonner en faisant des dessins avant de transcrire les arguments selon ces règles.*

1. Définitions initiales et trois premiers axiomes

Nos données initiales sont
(i) un ensemble Π, dont les éléments sont appelés « points » ;
(ii) une collection Δ de parties non vides de Π, appelées « droites ».

Étant donnés un point $\mathrm{P} \in \Pi$ et une droite $d \in \Delta$, nous dirons que d *passe par* P si $\mathrm{P} \in d$. Nous dirons par ailleurs que des points $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n \in \Pi$ sont *alignés* s'ils sont contenus dans une même droite.

Définition 1 — *Deux droites* $d,\ d' \in \Delta$ *sont dites* parallèles *si* $d = d'$ *ou si* $d \cap d' = \varnothing$ *; on écrit alors* $d \parallel d'$.

Axiome 1 — *Étant donnés deux points distincts* $\mathrm{P},\ \mathrm{Q} \in \Pi$, *il existe une droite* $d \in \Delta$ *et une seule passant par* P *et* Q. *Cette droite est notée* $d = (\mathrm{PQ})$.

Axiome 2 — *Étant donnés un point* $\mathrm{P} \in \Pi$ *et une droite* $d \in \Delta$, *il existe une droite* ℓ *et une seule passant par* P *et parallèle à* d.

Axiome 3 — *Il existe trois points distincts non alignés dans* Π.

Définition 2 — *Si l'ensemble* Π *et la collection* Δ *satisfont aux trois axiomes précédents, nous dirons que le couple* (Π,Δ) *est une* géométrie.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que (Π,Δ) *est une géométrie*

Question 1.1. Si $d,\ d' \in \Delta$ sont deux droites non parallèles, démontrer qu'il existe un unique point appartenant à d et à d' (axiome 1).

Question 1.2. Démontrer que le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites Δ (axiome 2).

Définition 2 — *Les classes d'équivalence pour le parallélisme sont appelées* directions.

La direction d'une droite d est donc l'ensemble de toutes les droites $d' \in \Delta$ telles que $d' \parallel d$.

Question 1.3. Étant donnée une droite $d \in \Delta$, démontrer qu'il existe un point P dans Π n'appartenant pas à d (axiome 3).

Question 1.4. Étant données deux droites $d,\ d' \in \Delta$, construire une bijection entre d et d' puis en déduire que toute droite contient au moins deux points. (axiomes 1, 2 et 3, question 1.1).

Question 1.5. Considèrons la configuration suivante :

$$\Pi = \{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}\},\ \ \Delta = \{(\mathrm{AB}),(\mathrm{AC}),(\mathrm{AD}),(\mathrm{BC}),\mathrm{BD}),(\mathrm{CD})\}$$

(a) Vérifier qu'elle satisfait aux trois axiomes ci-dessus.
(b) Démontrer que c'est la géométrie contenant le moins de points possibles.
(c) Cette géométrie peut être identifiée à l'ensemble des points et des droites dans un plan affine sur un corps k ; lequel ?

2. Dilatations.

Nous allons maintenant introduire certaines *transformations* de Π conservant la direction.

***Définition 3** — Une* dilatation *est une application f de Π dans Π vérifiant la condition suivantes : étant donnés deux points distincts $\mathrm{P},\ \mathrm{Q} \in \Pi$, $f(\mathrm{P}) \neq f(\mathrm{Q})$ et a droite $(f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q}))$ est parallèle à la droite (PQ).*

Il est clair que l'identité de Π est une dilatation.

Question 2.1. Démontrer que toute dilatation f est une bijection.

(*Indication* : étant donné un point $\mathrm{P} \in \Pi$,

(a) justifier qu'il existe deux points distincts $\mathrm{A},\ \mathrm{B} \in \Pi$ tels que les droites $(f(\mathrm{A})\mathrm{P})$ et $(f(\mathrm{B})\mathrm{P})$ soient sécantes en P ;

(b) en déduire qu'il existe un point $\mathrm{Q} \in \Pi$ tel que $\mathrm{P} = f(\mathrm{Q})$.)

Question 2.2. Démontrer qu'une dilatation f est complètement déterminée lorsqu'on connaît les images $f(\mathrm{A})$ et $f(\mathrm{B})$ de deux points distincts. En déduire que f a au plus un point fixe.

(*Indication* : déterminer tout d'abord l'image d'un point P n'appartenant pas à la droite (AB) en utilisant les indications de la question précédente puis traiter le cas $\mathrm{P} \in (\mathrm{AB})$.)

Question 2.3. Soit f une dilatation.

(i) Si f a un point fixe P, démontrer que, pour tout $\mathrm{Q} \in \Pi$, les points P, Q et $f(\mathrm{Q})$ sont alignés.

(ii) Si f n'a pas de point fixe, démontrer que toutes les droites $(\mathrm{P}f(\mathrm{P}))$ sont parallèles entre elles ($\mathrm{P} \in \Pi$).

***Définition 3** — Une* translation *est une dilatation n'ayant aucun point fixe ou bien l'identié.*

Si t est une translation distincte de l'identité, il découle de la question 2.3 (ii) que toutes les droites $(\mathrm{P}t(\mathrm{P}))$ sont parallèles. Cette observation justifie la définition suivante.

***Définition 4** — La* direction *d'une translation $t \neq$* id *est la direction des droites parallèles $(\mathrm{P}t(\mathrm{P}))$, $\mathrm{P} \in \Pi$.*

Question 2.4. Démontrer qu'une translation t est complètement déterminée lorsqu'on connaît l'image $t(\mathrm{A})$ d'un point A.

Question 2.5. Démontrer que l'ensemble des dilatations Dil est un groupe pour la composition.

Question 2.6. Étant données une translation t et une dilatation f, démontrer que $f^{-1}tf$ est une translation ayant la même direction que t. En déduire que l'ensemble T des translations est un sous-groupe distingué de Dil.

Question 2.7. Si l'on suppose qu'il existe deux translations de directions distinctes, démontrer que le groupe T est commutatif.

Indication :

(a) Si t_1 et t_2 sont deux translations de directions distinctes, démontrer que t_1 et t_2 commutent.

(b) Si t_1 et t_2 sont deux translations de même direction, considérer une translation t_3 de direction distincte et vérifier que t_1 et t_2t_3 ont des directions distinctes. Conclure en calculant $t_1t_2t_3$...)

3. Deux nouveaux axiomes

Nous introduisons finalement deux nouveaux axiomes assurant que l'on dispose de « suffisamment » de dilatations.

***Axiome 4** — Étant donnés deux points quelconques $\mathrm{P},\ \mathrm{Q}$ dans Π, il existe une translation t telle que $t(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.*

La translation t fournie par cet axiome est uniquement déterminée en vertu de la question 2.4 ; on la note t_{PQ}.

Axiome 5 — *Soient* P, R *et* Q *trois points distincts et alignés. Il existe une dilatation f fixant* P *et envoyant* Q *sur* R.

La dilatation f fournie par cet axiome est uniquement déterminée en vertu de la question 2.2.

Question 3.1. Démontrer qu'il existe deux translations de directions distinctes. En déduire que le groupe T des translations est commutatif. (axiomes 3 et 4, question 2.7)

Question 3.2. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D quatre points distincts de Π. Démontrer que les conditions sont équivalentes :
(i) $(\mathrm{AB}) \parallel (\mathrm{CD})$ et $(\mathrm{AC}) \parallel (\mathrm{BD})$;
(ii) il existe une translation t telle que $t(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $t(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$;
(iii) $t_{\mathrm{AB}} = t_{\mathrm{CD}}$

Question 3.3. (*Théorème 1 de Desargues*) Soient $d_1,\ d_2$ et d_3 trois droites distinctes et parallèles. Soient $\mathrm{P},\ \mathrm{P}'$ deux points sur d_1, $\mathrm{Q},\ \mathrm{Q}'$ deux points sur d_2 et R, R' deux points de d_3. Si

$$(\mathrm{PQ}) \parallel (\mathrm{P'Q'}) \ \text{ et } \ (\mathrm{PR}) \parallel (\mathrm{P'R'}),$$

alors $(\mathrm{QR}) \parallel (\mathrm{Q'R'})$.

Question 3.4. (*Théorème 2 de Desargues*) Soient $d_1,\ d_2$ et d_3 trois droites distinctes passant par un point O. Soient $\mathrm{P},\ \mathrm{P}'$ deux points sur d_1, $\mathrm{Q},\ \mathrm{Q}'$ deux points sur d_2 et R, R' deux points de d_3. Si

$$(\mathrm{PQ}) \parallel (\mathrm{P'Q'}) \ \text{ et } \ (\mathrm{PR}) \parallel (\mathrm{P'R'}),$$

alors $(\mathrm{QR}) \parallel (\mathrm{Q'R'})$.

Question 3.5. Supposons que notre géométrie satisfasse seulement aux axiomes 1, 2 et 3.
(i) Démontrer que l'axiome 4 est vrai si le théorème 1 de Desargues est vrai.
(ii) Démontrer que l'axiome 5 est vrai si le théorème 2 de Desargues est vrai.

Commentaire — *Ces deux dernières questions illustrent l'importance des deux théorèmes de Desargues : la validité de ces derniers est équivalente à celle des axiomes 4 et 5, c'est-à-dire à l'existence de suffisamment de dilatations dans notre géométrie* (Π, Δ).

4. Le corps des scalaires

Il est très remarquable que les axiomes 1 à 5 caractérisent complètement la géométrie plane affine sur un corps k (non nécessairement commutatif) au sens où on la connaît usuellement, c'est-à-dire la géométrie des points et des droites dans un espace affine de dimension 2 sur k.

Nous avons un candidat évident pour l'espace vectoriel : le groupe T. Nous allons maintenant voir qu'il existe naturellement un *corps des scalaires* k tel que T soit un k-espace vectoriel de dimension 2. La définition suivante est fondée sur une observation élémentaire : si V est un espace vectoriel sur un corps k, les éléments de k définissent des homomorphismes du groupe abélien $(\mathrm{V}, +)$ conservant le parallélisme.

Définition 5 — *Un* scalaire *est un homomorphisme de groupes* $\lambda : \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ *tel que, pour toute translation* t,

$$(\lambda(t) = \mathrm{id}) \quad \textit{ou} \quad (t \textit{ et } \lambda(t) \textit{ ont la même direction }).$$

L'ensemble des scalaire est noté k.

L'application de T dans T envoyant toute translation sur l'identité est un scalaire, noté 0. L'identité de T est un scalaire, noté 1.

On définit deux lois de composition interne $+$ et $\cdot$ sur k : pour tous $\lambda,\ \mu \in k$,

(i) $\lambda + \mu$ est le scalaire défini par

$$(\lambda + \mu)(t) = \lambda(t) \circ \mu(t)\ ;$$

(ii) $\lambda\mu$ est le scalaire $\lambda \circ \mu$.

On vérifie que ceci a bien un sens, c'est-à-dire que $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$ sont bien des scalaires.

Les axiomes 1 à 5 permettent de démontrer le théorème suivant :

Théorème 6 — *Muni de ces lois, l'ensemble k des scalaires est un* corps, *non nécessairement commutatif.*

Voir la démonstration dans [Artin], pp. 58-62.

Pour toute dilatation f, l'application $\mathrm{T} \to \mathrm{T}$, $t \mapsto f^{-1} \circ t \circ f$ est un homomorphisme de groupes et $f^{-1} \circ t \circ f$ a la même direction que t (question 2.6). On associe ainsi un scalaire $\lambda(f) \neq 0$ à toute dilatation f, son *rapport* ; comme T est commutatif, $f^{-1} \circ t \circ f = t$ et donc $\lambda(f) = 1$ pour toute translation f. En utilisant les axiomes 1 à 5, on démontre sans grande difficulté le théorème suivant.

Théorème 7 — *Soit* O *un point de* Π *et soit* Dil_O *le sous-groupe de* Dil *formé des dilatations fixant le point* O. *L'application*

$$(\mathrm{Dil}_\mathrm{O}, \circ) \to (k - \{0\}, \cdot), \quad f \mapsto \lambda(f)$$

est un isomorphisme de groupes.

Voir la démonstration dans [Artin], pp. 60-61.

En admettant les deux théorèmes précédents, il s'avère qu'il est possible de traduire la *commutativité* du corps k par un énoncé géométrique simple, en l'occurrence le *théorème de Pappus*.

Question 4.1. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le corps k est commutatif.

(ii) (*Théorème de Pappus*) Étant donnés un point O et deux droites distinctes d et d' passant par O, on considère trois points distincts P, Q et R sur $d - \{\mathrm{O}\}$ et trois points distincts P′, Q′ et R′ sur $d' - \{\mathrm{O}\}$. Alors

$$(\mathrm{PQ'}) \parallel (\mathrm{QP'}) \text{ et } (\mathrm{QR'}) \parallel (\mathrm{Q'R}) \implies (\mathrm{PR'}) \parallel (\mathrm{P'R}).$$

Ainsi, le corps des scalaires que l'on vient de construire à partir de notre géométrie (Π, Δ) est commutatif si et seulement si le théorème de Pappus est vrai dans cette géométrie.

5. Conclusion

Partons d'un corps commutatif k et d'un espace affine E sur k de dimension 2. Posant $\Pi = \mathrm{E}$ et prenant pour Δ l'ensemble des droites de E au sens usuel, il est bien connu que les axiomes 1 à 5 ainsi que le théorème de Pappus sont vrais pour le couple (Π, Δ).

Réciproquement, supposons que (Π, Δ) soit une géométrie dans laquelle les cinq axiomes ci-dessus ainsi que le théorème de Pappus soient vrais. On a défini à l'étape 2 un groupe abélien T, le groupe des translations ; on convient de noter additivement sa loi de composition et 0 son élément neutre :

$$t_1 + t_2 = t_1 \circ t_2 \quad \text{et} \quad 0 = \mathrm{id}.$$

On a construit à l'étape 4 un corps commutatif k ainsi qu'une loi externe

$$k \times \mathrm{T} \to \mathrm{T}, \quad (\lambda, t) \mapsto \lambda \cdot t = \lambda(t)$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $0 \cdot t = 0$ et $1 \cdot t = t$; ;

(b) $\lambda \cdot (t_1 + t_2) = \lambda \cdot t_1 + \lambda \cdot t_2$;
(c) $(\mu \cdot \lambda) \cdot t = \mu \cdot (\lambda \cdot t)$
pour tous $t \in \mathrm{T}$, $\lambda,\ \mu \in k$. Ainsi, T est muni d'une structure de k-espace vectoriel.

L'espace vectoriel T agit naturellement sur l'ensemble Π via

$$\mathrm{T} \times \Pi \to \Pi,\ (t, \mathrm{P}) \mapsto t(\mathrm{P})$$

et cette action est *simplement transitive* : quels que soient les points P et Q in Π, il existe une et une seule translation $t \in \mathrm{T}$ telle que $t(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ (axiome 4 et question 2.4). Ainsi, l'ensemble Π est muni d'une structure d'*espace affine* sur k, de direction vectorielle T.

Remarque — *Pour tout couple* (A, B) *de points de* Π*, il existe une unique translation* $t_{\mathrm{AB}} \in \mathrm{T}$ *envoyant* A *sur* B. *D'après la question 3.2, deux couples* (A, B) *et* (C, D) *définissent la même translation si et seulement si*

$$(\mathrm{AB}) \parallel (\mathrm{CD}) \quad \textit{et} \quad (\mathrm{AC}) \parallel (\mathrm{BD})$$

et nous pouvons donc identifier les éléments de T *avec les classes d'équivalence de couples de points de* Π *pour la relation ci-dessus. Ceci est la définition usuelle des* vecteurs *en géométrie élémentaire.*

Question 5.1. Soit $\mathrm{O} \in \Pi$ un point et soient t_1 et t_2 deux translations de directions différentes (question 3.1). On considère une translation $t_3 \in \mathrm{T}$. Posant $d_1 = (\mathrm{O}t_1(\mathrm{O}))$ et $d_2 = (\mathrm{O}t_2(\mathrm{O}))$, la droite parallèle à d_2 (resp. d_1) et passant par $t_3(\mathrm{O})$ coupe d_1 (resp. d_2) en un point Q_1 (resp. Q_2). En vertu de l'axiome 5, il existe des dilatations $h_1,\ h_2 \in \mathrm{Dil}_{\mathrm{O}}$ telles que $h_1(t_1(\mathrm{O})) = \mathrm{Q}_1$ et $h_2(t_2(\mathrm{O})) = \mathrm{Q}_2$.
(i) Posant $a_1 = \lambda(h_1)$ et $a_2 = \lambda(h_2)$, vérifier que l'on a $(a_1 \cdot t_1)(\mathrm{O}) = \mathrm{Q}_1$ et $(a_2 \cdot t_2)(\mathrm{O}) = \mathrm{Q}_2$.
(ii) En déduire que l'on a $a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2 = t_3$.
(iii) Justifier qu'il n'existe pas scalaires $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$ tels que $a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2 = 0$. En déduire que T est de dimension 2.

Commentaire — *Pourquoi obtient-on nécessairement une géométrie de dimension* $d = 2$ *alors qu'aucun de nos cinq axiomes ne semble l'affirmer ? Les axiomes 3 et 4, garantissant l'existence de deux translations de directions distinctes, imposent simplement la minoration* $d \geqslant 2$*. Lorsqu'on analyse la question précédente, on s'aperçoit qu'un point crucial est l'unicité de la droite passant par un point donné et parallèle à une droite spécifiée – c'est-à-dire l'axiome 2 – car cela permet de définir la projection sur une droite parallèlement à une autre droite. Par suite, l'axiome 2 contient essentiellement la majoration* $d \leqslant 2$.

On vient de vérifier que Π est un naturellement un *plan affine* sur le corps k. La dernière étape consiste à s'assurer que les éléments de Δ sont bien les droites de Π au sens usuel.

Question 5.2. Considérons une droite $d \in \Delta$ et soient $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ deux points distincts de d (question 1.4). Soit $\mathrm{P} \in \Pi$.
(i) S'il existe un scalaire $a \in k$ tel que $t_{\mathrm{AP}} = a \cdot t_{\mathrm{AB}}$, vérifier que P appartient à d. (définition 5 et axiome 2)
(ii) Réciproquement, si $\mathrm{P} \in d$, démontrer qu'il existe un scalaire $a \in k$ tel que $t_{\mathrm{AP}} = a \cdot t_{\mathrm{AB}}$. (axiome 5 et théorème 7)

Question 5.3. Démontrer que Δ est précisément l'ensemble des droites du plan affine Π telles que définies de manière usuelle.