3. Géométrie affine euclidienne 1 : orthogonalité, isométries

Exercice 3.1. (Relation d'Euler) — Soient A, B, C et D quatre points d'un espace affine euclidien E.

(i) Démontrer la relation d'Euler : $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{AD}|\overrightarrow{BC}) = 0$.

(ii) En déduire que les hauteurs d'un triangle non plats sont concourantes.

(iii) Montrer que, si un tétraèdre possède deux couples d'arêtes opposées orthogonales, il en va de même pour le troisième couple.

Exercice 3.2. — Soient A, B et C trois points de l'espace affine euclidien E. Déterminer les ensembles de niveau de la fonction

$$f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{M} \mapsto (\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}|\overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MC}).$$

Exercice 3.3 (Théorème de l'angle droit) — Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et soit P un plan de E. On désigne par p la projection orthogonale de E sur P.

On considère des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D dans E tels que $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}) = 0$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{p(\mathrm{A})p(\mathrm{B})}$ et $\overrightarrow{p(\mathrm{C})p(\mathrm{D})}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathrm{P}}$ ou $\overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{\mathrm{P}}$.

Exercice 3.4 — Soit (ABCD) un quadrilatère de l'espace affine euclidien tel que deux côtés consécutifs soient toujours orthogonaux.

(i) En utilisant l'exercice précédent, démontrer que ce quadrilatère est plan.

(ii) Donner une démonstration analytique en choisissant un repère adéquat.

Exercice 3.5 (Décomposition canonique des isométries affines) — Soit E un espace affine euclidien et soit f une isométrie de E. Cet exercice a pour but de démontrer le théorème suivant : *il existe un unique couple* $(g, \mathbf{v})$, *constitué d'une isométrie* g *de* E *ayant un point fixe et d'un vecteur* $\mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$, *tel que* $f = g \circ t_{\mathbf{v}} = t_{\mathbf{v}} \circ g$.

(i) Démontrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - \mathbf{f})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - \mathbf{f})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

(ii) Soient h une application affine de E et $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$ un vecteur. Montrer que l'on a $h \circ t_{\mathbf{u}} = t_{\mathbf{u}} \circ h$ si et seulement si $\mathbf{u} \in \ker(\mathrm{id} - \mathbf{h})$.

(iii) Soit h une application affine de E et soit $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$. Soit A un point de E. Démontrer que l'application affine $t_{-\mathbf{u}} \circ h$ admet un point fixe si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} - \mathbf{u} \in \mathrm{Im}(\mathrm{id} - \mathbf{h})$.

(iv) Conclure.

(v) Soit F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que $\mathrm{F} = \varnothing$ si et seulement si le vecteur $\mathbf{v} \neq 0$ n'appartient pas au sous-espace $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - \mathbf{f})$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. En déduire que l'on alors

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - \mathbf{f}) \neq \{0\}.$$

(vi) Supposons que le vecteur $\mathbf{v}$ intervenant dans la décomposition canonique de f soit non nul. Étant donné un point $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, démontrer qu'il existe un vecteur $\mathbf{w} \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{M}f(\mathrm{M})} = \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}$. En déduire la valeur minimale de $||\overrightarrow{\mathrm{M}f(\mathrm{M})}||$ lorsque M parcourt E.

Exercice 3.6 (Isométries du plan et de l'espace) — Soit E un espace affine euclidien et soit f une isométrie de E. On désigne par F l'ensemble des points fixes de f.

(i) Démontrer que, s'il est non vide, l'ensemble F est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - \mathbf{f})$.

(ii) Supposons $\dim(\mathrm{E}) = 2$. Décrire f en fonction de $\dim(\mathrm{F})$ et distinguer les déplacements des anti-déplacements.

(iii) Même question avec $\dim(\mathrm{E}) = 3$.

Exercice 3.7 (Groupes de frises) — Soit D une droite du plan affine euclidien. Étant donnés un point A et un vecteur directeur $\mathbf{u}$ de D, on considère l'ensemble $\mathscr{F} = \mathrm{A} + \mathbb{Z}\mathbf{u}$ des translatés de A par un multiple entier de $\pm\mathbf{u}$.

Déterminer toutes les isométries planes préservant $\mathscr{F}$.

Exercice 3.8 (Réflexions) — Soit E un espace affine euclidien. Cet exercice a pour but de démontrer le théorème suivant : *toute isométrie est un produit de réflexions.*

On considère une isométrie f de E et on note F l'ensemble de ses points fixes.

(i) Supposons qu'il existe un point $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ tel que $f(\mathrm{A}) \neq \mathrm{A}$. On désigne par H l'*hyperplan médiateur* du segment $[\mathrm{A}f(\mathrm{A})]$ et par σ_{H} la réflexion par rapport à H. Démontrer que F est contenu dans H et en déduire que l'ensemble des points fixes de l'isométrie $\sigma_{\mathrm{H}} \circ f$ contient strictement F.

(ii) En raisonnant par récurrence sur la dimension de F, démontrer que f est un produit de réflexions.

(iii) Majorer simplement en fonction de F le nombre minimal de réflexions dont f est le produit.

(iv) Écrire explicitement une translation comme un produit de réflexions.

Exercice 3.9 — Soit P un plan affine euclidien.

(i) Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ trois réflexions d'axes concourants en I. Montrer que l'on a

$$\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3.$$

(*Indication : calculer l'inverse de* $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$)

(ii) Soit C un cercle de P et soient $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ trois droites vectorielles. Étant donné un point M sur C, on construit la suite $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4, \mathrm{M}_5, \mathrm{M}_6$ de points de C tels que les droites $(\mathrm{MM}_1), (\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2), (\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3), (\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4), (\mathrm{M}_4\mathrm{M}_5)$ et $(\mathrm{M}_5\mathrm{M}_6)$ aient pour directions respectives $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}_3$. Démontrer que l'on a $\mathrm{M}_6 = \mathrm{M}$.

Exercice 3.10 — Soient r_1, r_2 et r_3 trois rotations d'un plan affine euclidien orienté P de centres respectifs $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ et O_3. On suppose r_1, r_2 et r_3 distinctes de l'identité et on désigne par ϑ_1, ϑ_2 et ϑ_3 des mesures des angles de r_1, r_2 et r_3.

(i) Si $r_1 \circ r_2 \circ r_3 = \mathrm{id}$, démontrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}, \overrightarrow{\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2}})$, $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3}, \overrightarrow{\mathrm{O}_2, \mathrm{O}_1}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{O}_1}, \overrightarrow{\mathrm{O}_3, \mathrm{O}_2}})$ sont de mesures respectives $\frac{\vartheta_1}{2}$, $\frac{\vartheta_2}{2}$ et $\frac{\vartheta_3}{2}$ (*Indication : écrire* $r_1 \circ r_2$ *comme un produit de réflexions*)

(ii) Soit (ABC) un triangle et soient $(\mathrm{BCP}), (\mathrm{ACQ})$ et (ABR) les trois triangles équilatéraux extérieurs, de centres respectifs I, J et K. Démontrer que le triangle (IJK) est équilatéral.