4. Géométrie euclidienne (suite)

Angles, configurations classiques, représentation complexe

Sauf mention du contraire, les exercices ci-dessous ont pour cadre un plan affine euclidien P.

Exercice 4.1 (Orthocentre et droite d'Euler d'un triangle) — Soient ABC un triangle non aplati, A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$. On désigne par G le centre de gravité de ABC.

(i) Démontrer qu'il existe un unique cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A, B et C (*cercle circonscrit*). On désigne par O le centre de ce cercle.
(ii) Démontrer que le triangle $A'B'C'$ se déduit de ABC par une homothétie h que l'on précisera. Quel est le centre de gravité de $A'B'C'$?
(iii) Quelles sont les hauteurs de $A'B'C'$?
(iv) Démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont sécantes au point $H = h^{-1}(O)$.
(v) Que peut-on dire des points H, G et O ?

Exercice 4.2 (Cercle d'Euler d'un triangle) — Les notations sont celles de l'exercice précédent.

(i) Démontrer que le centre O' du cercle $\mathscr{C}'$ circonscrit au triangle $A'B'C'$ est le milieu de $[HO]$.
(ii) Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$. Démontrer que le quadrilatère $C'B'KJ$ est un rectangle (commencer par démontrer qu'il s'agit d'un parallélogramme).
(iii) Démontrer que $[IA']$, $[JB']$ et $[KC']$ sont des diamètres de $\mathscr{C}'$.
(iv) Démontrer finalement que $\mathscr{C}'$ passe par les pieds des hauteurs du triangle ABC. Le cercle $\mathscr{C}'$ est le *cercle des neufs points* (ou *cercle d'Euler*) du triangle ABC.

Exercice 4.3 (Bissectrices) — Soient O un point de P et $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ deux vecteurs unitaires non colinéaires de P. On pose $D = O + \mathbb{R}\mathbf{u}$, $D' = O + \mathbb{R}\mathbf{u}'$. On désigne par B_i la droite passant par O dirigée par $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$ (*bissectrice intérieure*) et par B_e la droite passant par O dirigée par $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ (*bissectrice extérieure*). Démontrer que :

(i) les droites B_i et B_e sont perpendiculaires ;
(ii) la réflexion d'axe B_i échange D et D' ;
(iii) $B_i \cup B_e$ est l'ensemble des points de P équidistants de D et D' ;
(iv) $B_i - \{O\}$ est l'ensemble des points $M \in P - \{O\}$ tels que $(\widehat{\mathbf{u}, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \mathbf{u}'})$.

Exercice 4.4 (Centre du cercle inscrit) — Soit ABC un triangle non plat. On désigne par δ_A, δ_B et δ_C les bissectrices intérieures des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (cf. exercice précédent).

(i) Justifier que les droites δ_A et δ_B sont sécantes en un point I.
(ii) Montrer que le point I appartient à l'enveloppe convexe des points A, B, C et qu'il est à équidistance des droites (CA) et (CB). En déduire que les trois droites δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes.

(iii) Démontrer qu'il existe un unique cercle $\mathscr{C}$ de centre I tangent aux droites (AB), (AC) et (BC) ; c'est le *cercle inscrit* du triangle ABC.
(iv) Déterminer des équations barycentriques des droites δ_{A}, δ_{B} et δ_{C} dans le repère affine $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$. (*Indication : observer que la droite δ_{A} est dirigée par le vecteur* $\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.)
(v) En utilisant l'exercice 1.10, démontrer de nouveau que les droites δ_{A}, δ_{B} et δ_{C} sont concourantes.

Exercice 4.5 (Cocyclicité 1) — 1. Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A, B deux points de $\mathscr{C}$. Pour tout point $\mathrm{M}\in\mathscr{C}-\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$, démontrer l'identité d'angles orientés de vecteurs

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{AM}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{MO}})}\quad \text{et} \quad \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BM}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})}=\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MO}},\overrightarrow{\mathrm{BM}})}.$$

En déduire que l'on a

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})}=2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}.$$

En supposant $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$, démontrer également l'égalité

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})}=2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AT}},\overrightarrow{\mathrm{AB}})},$$

où T désigne un point distinct de A sur la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

2. Démontrer que quatre points A, B, C et D de P sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$(\widehat{(\mathrm{CA}),(\mathrm{CB})})=(\widehat{(\mathrm{CA}),(\mathrm{CB})})$$

(égalité d'angles orientés de droites).

Exercice 4.6 (Cocyclicité 2) — Soient d et d' deux droites du plan affine eucidien, A un point n'appartenant pas à ces droites et ℓ une droite passant par A. On note δ (resp. δ') la droite symétrique de ℓ par rapport à d (resp. à d').

(i) À quelle condition les droites δ et δ' sont-elles sécantes ?
(ii) On suppose cette condition vérifiée. Quel est le lieu décrit par le point d'intersection de δ et δ' lorsque ℓ varie dans l'ensemble des droites passant par A ? (*Indication : exprimer δ' en fonction de δ et observer que δ décrit l'ensemble des droites passant par le point* B, *symétrique de* A *relativement à* d.)

Exercice 4.7 (Groupe des isométries du cube) — Soit C un cube dans l'espace affine euclidien E, c'est-à-dire un parallélépipède rectangle dont toutes les arêtes de isométriques. On désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des sommets de C et on pose

$$\mathrm{G}=\{f\in\mathrm{Isom}(\mathrm{E})\mid f(\mathrm{C})=\mathrm{C}\}.$$

Il s'agit manifestement d'un sous-groupe du groupe $\mathrm{Isom}(\mathrm{E})$ des isométries de E.

(i) Pour toute isométrie f de E, démontrer que les conditions $f(\mathrm{C})=\mathrm{C}$ et $f(\mathrm{S})=\mathrm{S}$ sont équivalentes.
(ii) Démontrer que toute isométrie $f\in\mathrm{G}$ fixe le centre O de C.
(iii) On désigne par $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$ les quatre diagonales de C. Définir un homomorphisme de groupes

$$\varphi:\mathrm{G}\to\mathfrak{S}_4,\quad f\mapsto\varphi(f)=\sigma_f$$

tel que $f(\Delta_i)=\Delta_{\sigma_f(i)}$ pour tout $i\in\{1,2,3,4\}$.
(iv) Quelle que soit la transposition $\tau\in\mathfrak{S}_4$, démontrer qu'il existe une isométrie $f\in\mathrm{G}$ telle que $\varphi(f)=\tau$. En déduire que l'application φ est surjective.

(v) Démontrer que le noyau de φ est constitué de l'identité et de la symétrie de centre O. En déduire que G est d'ordre 48.

(vi) Dresser la liste de toutes les réflexions apparaissant dans G. Même question avec les rotations.

Exercice 4.8 (Similitudes) — Soit E un espace affine euclidien. On rappelle qu'une *similitude* de E est une application affine f de E dans lui-même qui multiplie toutes les longueurs par un même nombre réel $k > 0$:

$$f(\mathrm{M})f(\mathrm{N}) = k\mathrm{MN}$$

pour tous points $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{E}$. Ce nombre réel k est le *rapport* de la similitude f.

(i) Démontrer que les similitudes de E forment un sous-groupe du groupe affine.

(ii) Démontrer qu'une similitude de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe ; c'est son *centre*.

(iii) Soit f une similitude à centre. Démontrer que f s'écrit de manière unique sous la forme du produit commutatif d'une homothétie de rapport positif et d'une isométrie avec point fixe.

(iv) Décrire toutes les similitudes en dimension 2 (cf. exercice 3.6 (ii)).

Exercice 4.9 (Représentation complexe 1) — Le plan P est supposé orienté et on fixe un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. L'application

$$\alpha : \mathbb{C} \to \mathrm{P}, \ z = x + iy \mapsto \mathrm{O} + xe_1 + ye_2$$

est une bijection et l'*affixe* d'un point $\mathrm{M} \in \mathrm{P}$ est l'unique nombre complexe z tel que $\alpha(z) = \mathrm{M}$.

(i) Étant donnés des points A, B, C et D de P d'affixes respectives a, b, c et d, exprimer le produit scalaire $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\overrightarrow{\mathrm{CD}})$ en fonction de a, b, c et d.

(ii) Démontrer que les similitudes de P sont les applications d'expression complexe $z \mapsto az + b$ (cas direct) ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (cas indirect) avec $a \neq 0$.

(iii) Étudier les similitudes plane d'expression complexe

$$f_1 : z \mapsto (i+1)\bar{z} - 1, \quad f_2 : z \mapsto i\bar{z} + 2.$$

(iv) Étudier la composition deux rotations en utilisant leurs expression complexe.

(v) Soient A, B, C et D quatre points de P, d'affixes respectives a, b, c et d. Démontrer que ces points sont alignés ou cocycliques si et seulement si le nombre complexe

$$\frac{(a-c)(b-d))}{(b-c)(a-d)}$$

est réel.

Exercice 4.10 (Représentation complexe 2) —Les notations et conventions sont celles de l'exercice précédent.

(i) Quels sont les nombres complexes z tels que le triangle de sommets les points d'affixes z, i et iz soit équilatéral ?

(ii) Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O. Démontrer que l'affixe de l'orthocentre H de ABC est la somme des affixes des sommets A, B et C. En déduire que les points O et H sont alignés avec le centre de gravité de ABC.

(iii) Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ trois cercles de même rayon r et de centres P, Q, R passant par un même point O. Démontrer que les trois autres points A, B et C en lesquels ces cercles se coupent sont sur un même cercle de rayon r. Démontrer ensuite que le point O est l'orthocentre du triangle ABC, puis que les triangles ABC et PQR sont symétriques par rapport à un point.