4. GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE (SUITE)

Corrigé partiel

Exercices 4.5 et 4.6 — *1. Rappels sur les angles orientés de droites.* Soit Π un plan affine euclidien. Les quelques lignes suivantes ont pour objet de rappeler comment on peut utiliser les angles orientés de vecteurs pour définir la notion d'*angle orienté* d'un couple de *droites* dans Π. On désigne par $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})$ le groupe (commutatif) des angles orientés de vecteurs et on note ϖ l'angle *plat*, c'est-à-dire l'angle $\widehat{(-\mathbf{v},\mathbf{v})}$ pour un quelconque vecteur unitaire $\mathbf{v} \in \overrightarrow{\Pi}$. Ayant fixé une orientation de $\overrightarrow{\Pi}$, on dispose d'un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{mes} : \mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi}) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

et alors $\mathrm{mes}(\varpi) = \pi \pmod{\pi}$.

Observons tout d'abord que chaque droite $d \subset \Pi$ possède *deux* vecteurs directeurs unitaires, qui sont opposés. Considérons deux droites d et d' dans Π et désignons par $\pm\mathbf{u}$ et $\pm\mathbf{u}'$ les vecteurs directeurs unitaires de d et d' respectivement. Les identités

$$\widehat{(-\mathbf{u},\mathbf{v})} = \widehat{(\mathbf{u},\mathbf{v})} + \widehat{(-\mathbf{u},\mathbf{u})} = \widehat{(\mathbf{u},\mathbf{v})} + \varpi,$$

$$\widehat{(\mathbf{u},-\mathbf{v})} = \widehat{(\mathbf{u},\mathbf{v})} + \widehat{(\mathbf{v},-\mathbf{v})} = \widehat{(\mathbf{u},\mathbf{v})} + \varpi$$

et

$$\widehat{(-\mathbf{u},-\mathbf{v})} = \widehat{(\mathbf{u},\mathbf{v})}$$

montrent que le couple (d,d') détermine sans ambiguïté une classe dans le groupe $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})/\{0,\varpi\}$, quotient de $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})$ par le sous-groupe $\{0,\varpi\}$ engendré par ϖ. En termes de mesures : l'isomorphisme $\mathrm{mes} : \mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi}) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ induit un isomorphisme de groupes

$$\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})/\{0,\varpi\} \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z},$$

encore noté mes.

Par définition, l'*angle orienté* d'un couple de droites (d,d') de Π est la classe de $\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{v})}$ dans le groupe quotient $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})/\{0,\varpi\}$, où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs directeurs unitaires de d et d' respectivement. Cette classe est notée $\widehat{(d,d')}$. Ayant fixé une orientation du plan, une *mesure* de l'angle orienté $\widehat{(d,d')}$ est une mesure de l'angle orienté entre des vecteurs directeurs unitaires de d et d' ; c'est la classe d'un nombre réel modulo $\pi\mathbb{Z}$.

Les deux propriétés les plus importantes des angles orientés de droites sont les suivantes.

a) *Deux couples de droites (d,d') et (δ,δ') définissent le même angle orienté si et seulement s'il existe une isométrie vectorielle directe $\mathbf{f} \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{\Pi})$ telle que $\mathbf{f}(\overrightarrow{d}) = \overrightarrow{\delta}$ et $\mathbf{f}(\overrightarrow{d}') = \overrightarrow{\delta}'$.*

Preuve. Choisissons des vecteurs unitaires $\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ des droites d,d',δ et δ' respectivement. Si $\widehat{(d,d')} = \widehat{(\delta,\delta')}$, alors

$$\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{u}')} = \widehat{(\mathbf{v},\mathbf{v}')}$$

ou

$$\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{u}')} = \widehat{(\mathbf{v},\mathbf{v}')} + \varpi = \widehat{(\mathbf{v},\mathbf{v}')} + \widehat{(\mathbf{v}',-\mathbf{v}')} = \widehat{(\mathbf{u},-\mathbf{v}')}.$$

Par conséquent, il existe une isométrie vectorielle directe $\mathbf{f} \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{\Pi})$ telle que

- $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ et $\mathbf{f}(\mathbf{u}') = \mathbf{v}'$ dans le premier cas,
- $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ et $\mathbf{f}(\mathbf{u}') = -\mathbf{v}'$ dans le second cas.

Dans chaque cas de figure, $\mathbf{f}(\overrightarrow{d}) = \overrightarrow{\delta}$ et $\mathbf{f}(\overrightarrow{d}') = \overrightarrow{\delta}'$.

Réciproquement, s'il existe une isométrie directe $\mathbf{f} \in \mathrm{SO}(\overrightarrow{\Pi})$ telle que $\mathbf{f}(\overrightarrow{d}) = \overrightarrow{\delta}$ et $\mathbf{f}(\overrightarrow{d}') = \overrightarrow{\delta}'$, alors $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \pm\mathbf{v}$ et $\mathbf{f}(\mathbf{u}') = \pm\mathbf{v}'$, puis $\widehat{(d,d')} = \widehat{(\delta,\delta')}$ par définition des angles orientés de droites. □

Avant d'énoncer la deuxième propriété, remarquons que 2α est un élément de $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})$ bien défini pour toute classe $\alpha + \{0,\varpi\}$ dans $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})$ car $2\varpi = 0$ dans $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})$.

b) *Si s et s' sont les réflexions par rapport à des droites d et d' respectivement, alors $s' \circ s$ est une isométrie directe dont la partie linéaire est la rotation d'angle $2\widehat{(d,d')}$.*

Preuve. Posons $f = s \circ s'$ et soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ des vecteurs directeurs unitaires des droites d et d' respectivement. On a

$$\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{f}(\mathbf{u}))} = \widehat{(\mathbf{u},\mathbf{s}'(\mathbf{u}))} = \widehat{(\mathbf{u},\mathbf{u}')} + \widehat{(\mathbf{u}',\mathbf{s}'(\mathbf{u}))}$$

et

$$\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{u}')} = -\widehat{(\mathbf{s}(\mathbf{u}),\mathbf{s}'(\mathbf{u}'))} = -\widehat{(\mathbf{s}'(\mathbf{u}),\mathbf{u}')} = \widehat{(\mathbf{u}',\mathbf{s}'(\mathbf{u}))},$$

donc

$$\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{f}(\mathbf{u}))} = 2\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{u}')}.$$

On en déduit que l'angle de la rotation vectorielle $\mathbf{f}$ est

$$\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{f}(\mathbf{u}))} = 2\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{u}')} = 2\widehat{(d,d')}.$$

□

Les propriétés suivantes se déduisent très facilement de la définition que l'on vient d'exposer et de leurs analogues pour les angles orientés de vecteurs. On les démontrera à titre d'exercice.

c) (*Relation de Chasles*) *Pour toutes droites d, d' et d'' dans Π,*

$$\widehat{(d,d'')} = \widehat{(d,d')} + \widehat{(d',d'')}.$$

d) (*Effet d'une isométrie*) *Pour toutes droites d et d' dans Π et toute isométrie f,*

$$\widehat{(f(d),f(d'))} = \begin{cases} \widehat{(d,d')} & \text{si } f \text{ est un déplacement} \\ -\widehat{(d,d')} & \text{si } f \text{ est un antidéplacement} \end{cases}$$

En particulier, $\widehat{(d',d)} = -\widehat{(d,d')}$.

e) *Pour toute droite d et toute rotation r, $\widehat{(d,r(d))}$ est la classe de l'angle de r dans $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})/\{0,\varpi\}$.*

2. Exercice 4.5. 2. Le critère de cocyclicité se formule agréablement en termes d'angles orientés de droites : quatre points distincts du plan A, B, C et D sont cocyclique ou alignés si et seulement si

$$\widehat{((\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}))} = \widehat{((\mathrm{DA}),(\mathrm{DB}))}.$$

Considérons d'abord le cas dégénéré où les points A, B et C sont alignés. On a alors $(\mathrm{CA}) = (\mathrm{CB})$ et $\widehat{((\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}))} = 0$. Pour que le point D soit aligné avec ces trois points, il faut et il suffit que l'on ait $(\mathrm{DA}) = (\mathrm{DB})$, condition qui équivaut à l'égalité $\widehat{((\mathrm{DA}),(\mathrm{DB}))} = 0 = \widehat{((\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}))}$.

On démontre de même que, si les points A, B et D sont alignés, alors C est aligné avec ces trois points si et seulement si $\widehat{((\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}))} = \widehat{((\mathrm{DA}),(\mathrm{DB}))} = 0$.

Supposons finalement que ni C ni D ne soit aligné avec A et B. On désigne par $\mathscr{C}$ l'unique cercle passant par A, B et C ; soit O son centre. Si D appartient à $\mathscr{C}$, alors

$$2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}$$

par le théorème de l'angle au centre ; on en déduit

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})} \quad \text{ou} \quad \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})} + \varpi,$$

c'est-à-dire
$$((\widehat{\mathrm{DA}),(\mathrm{DB}})) = ((\widehat{\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}})).$$

Réciproquement, supposons que l'on ait $((\widehat{\mathrm{DA}),(\mathrm{DB}})) = ((\widehat{\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}}))$. La droite (AD) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en A et un second point M, éventuellement confondu avec A. Si $\mathrm{M} = \mathrm{A}$, alors (AD) est la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point A et on déduit du théorème de l'angle au centre l'égalité $((\widehat{\mathrm{AD}),(\mathrm{AB}})) = ((\widehat{\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}}))$; on obtient donc $((\widehat{\mathrm{DA}),(\mathrm{AB}})) = ((\widehat{\mathrm{DA}),(\mathrm{DB}}))$, ce qui signifie que les droites (DB) et (AB) sont parallèles, donc confondues. Comme on a supposé $\mathrm{D} \notin (\mathrm{AB})$, on aboutit à une contradiction et donc $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$. Une nouvelle application du théorème de l'angle au centre fournit l'égalité $((\widehat{\mathrm{MA}),(\mathrm{MB}})) = ((\widehat{\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}}))$, d'où
$$((\widehat{\mathrm{DA}),(\mathrm{MB}})) = ((\widehat{\mathrm{MA}),(\mathrm{MB}})) = ((\widehat{\mathrm{CA}),(\mathrm{CB}})) = ((\widehat{\mathrm{DA}),(\mathrm{DB}})).$$
Cette égalité implique $(\mathrm{MB}) = (\mathrm{DB})$, puis
$$\{\mathrm{D}\} = (\mathrm{DA}) \cap (\mathrm{DB}) = (\mathrm{MA}) \cap (\mathrm{MB}) = \{\mathrm{M}\},$$
et nous avons ainsi prouvé que D appartient au cercle $\mathscr{C}$.

3. Exercice 4.6. Cet exercice est une jolie application du critère de cocyclicité.
Analyse du problème — Soient s et s' les réflexions par rapport aux droites d et d' respectivement. Posons $\mathrm{B} = s(\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}' = s(\mathrm{A}')$. L'application
$$\mathscr{D}_{\mathrm{A}} = \{\text{droites passant par A}\} \to \mathscr{D}_{\mathrm{B}} = \{\text{droites passant par B}\}, \quad \ell \mapsto s(\ell),$$
est une bijection car s est une application affine bijective. Si ℓ est une droite passant par A et si l'on pose $\delta = s(\ell)$, alors
$$\delta' = s'(\ell) = s'(s^{-1}(\delta)) = r(\delta),$$
où $r = s' \circ s^{-1} = s' \circ s$. Cette observation permet de reformuler le problème de manière plus agréable :

(i) Étant donnée une droite δ passant par B, à quelle condition les droites δ et $r(\delta)$ sont-elles sécantes ?

(ii) En supposant la condition précédente vérifiée, quel est l'ensemble
$$\bigcup_{\delta \in \mathscr{D}_{\mathrm{B}}} \delta \cap r(\delta)?$$

L'application affine $r = s' \circ s$ est une isométrie directe ; il s'agit donc soit d'une rotation d'angle $2\widehat{(d,d')}$, soit d'une translation de vecteur non nul. Le premier cas de figure se produit lorsque les droites d et d' sont sécantes ou confondues, le second lorsque d et d' sont parallèles et non confondues.

(i) Soit δ une droite passant par le point B. Si r est une translation de vecteur non nul, les droites δ et $\delta' = r(\delta)$ sont parallèles et non confondues. Si r est une rotation, l'angle orienté entre les droites δ et $r(\delta)$ est la classe de l'angle de r dans $\mathfrak{A}(\overrightarrow{\Pi})/\{0,\varpi\}$, soit
$$(\widehat{\delta, r(\delta)}) = 2\widehat{(d,d')}.$$
En termes de mesures :
$$\mathrm{mes}(\widehat{\delta, r(\delta)}) \equiv 2\mathrm{mes}\widehat{(d,d')} \pmod{\pi}.$$
Les droites δ et $r(\delta)$ sont parallèles si et seulement si $(\widehat{\delta, r(\delta)}) = 0$, donc si et seulement si $2\widehat{(d,d')} = 0$. Cette dernière condition équivaut à dire que les droites d et d' sont soit parallèles — et elles sont alors confondues puisque $d \cap d' \neq \varnothing$ — soit perpendiculaires. En termes de mesures :
$$\begin{aligned}\left(2\mathrm{mes}\widehat{(d,d')} \equiv 0 \pmod{\pi}\right) &\iff \left(\mathrm{mes}\widehat{(d,d')} \equiv 0 \pmod{\pi/2}\right)\\ &\iff \left(\widehat{(d,d')} \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ ou } \widehat{(d,d')} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right).\end{aligned}$$
Au final :

- Si d et d' sont parallèles ou perpendiculaires, les droites δ et $\delta' = r(\delta)$ sont parallèles, quelle que soit la droite $\delta \in \mathscr{D}_{\mathrm{B}}$.
- Sinon, les droites δ et $\delta' = r(\delta)$ sont sécantes, quelle que soit la droite $\delta \in \mathscr{D}_{\mathrm{B}}$.

(ii) On suppose donc que les droites d et d' ne sont ni parallèles, ni perpendiculaires ; cela revient à dire que r est une rotation d'angle différent de 0, ϖ. Soit O le centre de r, c'est-à-dire le point d'intersection de d et d'.

Considérons une droite δ passant par B et soit M le point d'intersection de δ et $r(\delta)$. Comme $\mathrm{B}' = s'(\mathrm{A}) = r(\mathrm{B})$, la droite $r(\delta)$ passe par le point B' et il y a deux cas particuliers :

– $\delta = (\mathrm{BB}')$, auquel cas $\mathrm{M} = \mathrm{B}'$;
– $\delta = r^{-1}(\mathrm{BB}')$, auquel cas $\mathrm{M} = \mathrm{B}$.

Supposons que M soit distinct de B et B'. On a alors $\delta = (\mathrm{MB})$ et $\delta' = (\mathrm{MB}')$. Comme $(\mathrm{OB}') = r(\mathrm{OB})$ et $(\mathrm{MB}') = r(\mathrm{MB})$, il vient

$$(\widehat{(\mathrm{MB}),(\mathrm{MB}')}) = (\widehat{(\mathrm{OB}),(\mathrm{OB}')})$$

et les quatre points M, O, B et B' sont donc alignés ou cocycliques. Les points O, B et $\mathrm{B}' = r(\mathrm{B})$ ne sont pas alignés car la rotation r est d'angle distinct de 0, ϖ, donc le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ passant par O, B et B'. Nous venons ainsi de démontrer l'inclusion

$$\bigcup_{\delta \in \mathscr{D}_{\mathrm{B}}} \delta \cap r(\delta) \subset \mathscr{C}.$$

Réciproquement, soit M un point du cercle $\mathscr{C}$. Si $\mathrm{M} = \mathrm{B}$, c'est le point d'intersection des droites (BB') et $r^{-1}(\mathrm{BB}')$; si $\mathrm{M} = \mathrm{B}'$, c'est le point d'intersection des droites (BB') et $r(\mathrm{BB}')$. Si M est distinct de B et B', alors

$$(\widehat{(\mathrm{MB}),(\mathrm{MB}')}) = (\widehat{(\mathrm{OB}),(\mathrm{OB}')})$$

en vertu du critère de cocyclicité. Comme $(\mathrm{OB}') = r(\mathrm{OB})$, on en déduit

$$(\widehat{(\mathrm{MB}),(\mathrm{MB}')}) = (\widehat{(\mathrm{MB}),r(\mathrm{MB})})$$

et (MB') est donc la droite parallèle à $r(\mathrm{MB})$ passant par le point M. Ces deux droites contenant le point $\mathrm{B}' = r(\mathrm{B})$, elles sont confondues ; on obtient donc $(\mathrm{MB}') = r(\mathrm{MB})$ puis $\{\mathrm{M}\} = (\mathrm{MB}) \cap r(\mathrm{MB})$, ce qui établit l'inclusion réciproque

$$\mathscr{C} \subset \bigcup_{\delta \in \mathscr{D}_{\mathrm{B}}} \delta \cap r(\delta).$$

Conclusion : Si les droites d et d' ne sont ni parallèles, ni perpendiculaires, alors, lorsque ℓ décrit l'ensemble des droites passant par A, le lieu des points d'intersection des droites $s(\ell)$ et $s'(\ell)$ est le cercle passant par $\mathrm{B} = s(\mathrm{A})$, $\mathrm{B}' = s'(\mathrm{A})$ et par le point d'intersection O des droites d et d'.

Exercice 4.7 —

Exercice 4.8 —

Exercice 4.9 —

Exercice 4.10 —