5. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE 1

Exercice 5.1 (Paramétrage) — Soit $\mathscr{C}$ le cercle de rayon 1 centré à l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et soit Δ sa tangente au point $(1,0)$. En considérant les demi-droites issues du point $\mathrm{P} = (-1,0)$, donner un paramétrage de $\mathscr{C} - \{\mathrm{P}\}$ par des fractions rationnelles.

Exercice 5.2 (Étude locale) — 1. Soit k un nombre réel. Étudier au voisinage de $t = 0$ la courbe paramétrée

$$x(t) = \cos t + k\frac{t^3}{6}, \;\; y(t) = \sin t - t + \frac{t^2}{2}.$$

2. À quelle condition sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée

$$\gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(2t + \frac{a}{t^2}, t^2 + \frac{2b}{t}\right)$$

possède-t-elle un point de rebroussement ? Quel est l'ensemble des points (a,b) ainsi obtenus ?

Exercice 5.3 (Étude globale 1) — Étudier puis tracer la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto (2\sin t + \cos t, \sin^3 t + 2\cos^3 t).$$

Exercice 5.4 (Étude globale 2) — Soit a un nombre réel non nul. Étudier puis tracer la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \;\; t \mapsto \left(\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{at^3}{1+t^2}\right).$$

Démontrer que l'image de γ est l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant à la condition $\mathrm{F}(x,y) = 0$, où $\mathrm{F} \in \mathbb{R}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ est un polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

Exercice 5.5 (Courbes de Lissajous) — Étant donnés deux nombres réels a et ω, on considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \;\; t \mapsto (\sin t, \sin(\omega t + a)).$$

(i) Étudier et tracer la courbe en fonction de a lorsque $\omega = 1$.
(ii) Même question avec $\omega = 2$. Pour quelles valeurs de a la courbe est-elle régulière ?
(iii) Démontrer que la courbe γ est *fermée* (c'est-à-dire que la fonction γ est périodique) si et seulement si ω est un nombre rationnel.

Exercice 5.6 (Cycloïde) — On considère un cercle $\mathscr{C}$ de rayon R qui roule sans glisser sur une droite D. La courbe tracée par un point fixe de $\mathscr{C}$ est appelée *cycloïde*.

(i) Donner un paramétrage de la cycloïde puis étudier ses points singuliers et la tracer.
(ii) Calculer l'abscisse curviligne.
(iii) Calculer la longueur d'arc de la cycloïde correspondant à un tour complet de $\mathscr{C}$.

Exercice 5.7 (Coordonnées polaires 1) — Le plan euclidien P est orienté et muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. On considère une courbe paramétrée

$$\gamma : \mathrm{I} \to \mathrm{P}, \quad \vartheta \mapsto \mathrm{M}(\vartheta) = \mathrm{O} + \rho(\vartheta)\mathbf{u}_\vartheta,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbf{u}_\vartheta = \cos\vartheta\,\mathbf{i} + \sin\vartheta\,\mathbf{j}$ est le vecteur unitaire d'angle polaire $\widehat{(\mathbf{i}, \mathbf{u}_\vartheta)} = \vartheta$ et ρ est une fonction deux fois dérivable.

(i) Déterminer le vecteur $\mathbf{v}_\vartheta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta$.
(ii) Exprimer le vecteur $\mathbf{t}_\vartheta$ tangent à γ au point $\mathrm{M}(\vartheta)$ dans la base $(\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{v}_\vartheta)$.
(iii) Exprimer l'abscisse curviligne de γ en fonction de ϑ.

Exercice 5.8 (Coordonnées polaires 2) — (i) Étudier et tracer la courbe d'équation polaire $\rho(\vartheta) = \sin\vartheta + \cos\frac{\vartheta}{2}$.

(ii) Étudier et tracer la courbe d'équation polaire $\rho(\vartheta) = -\frac{a\cos 2\vartheta}{2\cos\vartheta}$.

Exercice 5.9 (Spirale logarithmique) — Soit a un nombre réel strictement négatif. La spirale logarithmique est la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t).$$

(i) Tracer cette courbe.
(ii) Calculer l'abscisse curviligne de γ et démontrer que la longueur d'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \to -\infty$.
(iii) Donner une équation polaire de cette courbe.
(iv) Démontrer que l'angle entre la tangente à γ au point $\gamma(t)$ et la droite $(\mathrm{O}\gamma(t))$ est constant, puis déterminer toutes les courbes paramétrées ayant cette propriété.

Exercice 5.10 (Enveloppes) — L'*enveloppe* d'une famille de droite du plan est une courbe dont cette famille est l'ensemble des tangentes.

Considérons une famille $\{\mathrm{D}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de droites du plan d'équations $a(t)\mathrm{X} + b(t)\mathrm{Y} + c(t) = 0$, où a, b et c sont des fonctions de classes C^1 sur $\mathbb{R}$.

(i) Si une courbe paramétrée $(\gamma : t \mapsto (x(t), y(t)))$ est une enveloppe de la famille $\{\mathrm{D}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, démontrer que les fonctions x et y sont solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) & = & 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) & = & 0 \end{array}\right.$$

En déduire l'existence d'une enveloppe sur tout intervalle sur lequel la fonction $ab' - a'b$ ne s'annule pas.
(ii) On considère un segment de longueur L dont les extrémités glissent le long des côtés d'un angle droit. Déterminer la frontière de la zone balayée par le segment.

Exercice 5.11 (Coordonnées polaires 3) — On travaille dans un plan euclidien P orienté muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

(i) Démontrer que tout cercle de P passant par O admet une équation polaire de la forme $\rho(\vartheta) = \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta$.
(ii) Déterminer les cercles passant par O et tangents à la courbe d'équation polaire $\rho^2 = a^2\cos 2\vartheta$ (*lemniscate*). Quel est le lieu de leurs centres ?