

5. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE 1

Corrigé partiel

*Exercice 5.4 : équation cartésienne du support d'une courbe plane paramétrée plane. Exercice 5.8 : étude d'une courbe définie par une équation polaire relativement compliquée. Exercice 5.9 : détermination de toutes les courbes paramétrées pour lesquelles l'angle entre la droite (OM) et la tangente au point M est constant Exercice 5.11 : équations polaires des cercles*

**Exercice 5.4** — *Symétries.* On constate que  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ , ce qui signifie que les points  $\gamma(t)$  et  $\gamma(-t)$  sont symétriques par rapport à l'axe (Ox). Observer que l'abscisse est toujours du signe de  $a$ . *Étude des fonctions coordonnées.* Vu la symétrie décelée précédemment, il suffit d'étudier la courbe lorsque  $t$  varie entre 0 et  $+\infty$ . Il n'y a pas de difficulté : l'abscisse et l'ordonnée croissent si  $a > 0$ , décroissent si  $a < 0$ .

La courbe est régulière pour toute valeur de  $t$  distincte de 0, i.e.,  $\gamma'(t) \neq 0$  si  $t \neq 0$ . L'étude locale en  $t = 0$  découle du développement limité

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$$

au voisinage de 0 : la tangente en  $\gamma(0)$  est l'axe (Ox) et ce point est un point de rebroussement de première espèce.

*Asymptote.* La droite d'équation  $x = a$  est une asymptote car  $\lim_{+\infty} x = a$  et  $\lim_{+\infty} y = \text{sgn}(a)\infty$ .

Pour le tracé de la courbe, voir la figure 1.

*Équation de la courbe.* L'énoncé demande de déterminer un polynôme de degré 3 en deux variables  $F \in \mathbb{R}[X, Y]$  tel que l'image de  $\gamma$  soit l'ensemble

$$\mathcal{C}_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

Pour ce faire, il suffit d'éliminer le paramètre  $t$  à partir des deux équations  $x(t) = \frac{at^2}{1+t^2}$  et  $y(t) = \frac{at^3}{1+t^2}$ .

On observe que l'on a  $y(t) = tx(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t \neq 0$ , alors  $x(t) \neq 0$  et  $t = y(t)/x(t)$  ; par substitution dans la formule donnant  $x(t)$ , on obtient l'identité

$$x(t) = \frac{ay(y)^2/x(t)^2}{1 + y(t)^2/x(t)^2} = \frac{ay(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^2}$$

et donc  $F(x(t), y(t)) = 0$  avec

$$F(X, Y) = X(X^2 + Y^2) - aY^2.$$

Le point  $\gamma(0) = (0, 0)$  appartient également de manière évidente à  $\mathcal{C}_F$ , donc  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_F$ .

Réciproquement, si  $(x, y)$  est un point de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ , alors

- soit  $x = 0$ , auquel cas  $y = 0$  et donc  $(x, y) = (0, 0) = \gamma(0)$  ;
- soit  $x \neq 0$ , auquel cas l'identité  $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$  implique

$$x = \frac{ay^2}{x^2 + y^2} = \frac{a(y/x)^2}{1 + (y/x)^2} \quad \text{et} \quad y = (y/x)x = \frac{a(y/x)^3}{1 + (y/x)^2},$$

ou encore  $(x, y) = \gamma(y/x)$ .

On obtient ainsi l'inclusion réciproque  $\mathcal{C}_F \subset \gamma(\mathbb{R})$ , et donc finalement  $\gamma(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_F$ .

**Exercice 5.8** — Étude de la courbe d'équation polaire  $\rho = \sin(\vartheta) + \cos(\vartheta/2)$ .

*Symétries.* On a évidemment  $\rho(\vartheta + 4\pi) = \rho(\vartheta)$ , donc on obtient tous les points en restreignant  $\vartheta$  à un intervalle de longueur  $4\pi$ .

On a vérifié immédiatement l'identité  $\rho(2\pi - \vartheta) = -\rho(\vartheta)$ . Les vecteurs  $-\mathbf{u}_{2\pi-\vartheta} = -\mathbf{u}_{-\vartheta}$  et  $\mathbf{u}_{\vartheta}$  étant symétriques par rapport à l'axe des *ordonnées*, celui-ci est un axe de symétrie de la courbe ; d'autre part, l'application  $\vartheta \mapsto 2\pi - \vartheta$  est la symétrie de centre  $\pi$ . Cela suggère de choisir premier intervalle de milieu  $\pi$ , soit  $[-\pi, 3\pi]$ , puis de se restreindre à  $[-\pi, \pi]$  ; une fois connue la courbe sur ce dernier intervalle, on l'obtiendra sur  $[-\pi, 3\pi]$  et donc sur  $\mathbb{R}$  en appliquant la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.

*Étude de la fonction  $\rho$ .* Un calcul immédiat fournit  $\rho'(\vartheta) = P(\sin(\vartheta/2))$ , où  $P$  est le polynôme  $-2X^2 - \frac{1}{2}X + 1$ . Écrivait

$$P = -2 \left( X + \frac{1}{8} \right)^2 - \frac{33}{8^2} = -2 \left( X - \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \right) \left( X - \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \right),$$

on obtient

$$\rho'(\vartheta) = 0 \iff \sin(\vartheta/2) = -\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$$

et il y a par conséquent deux zéros de  $\rho'$  dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , notés  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  avec  $\vartheta_1 < \vartheta_2$  ; en utilisant l'approximation  $\sqrt{33} \simeq 5,745$ , on obtient plus précisément les encadrements

$$-\frac{3\pi}{4} < \vartheta_1 < -\frac{2\pi}{3} < 0 < \frac{\pi}{3} < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}.$$

En écrivant  $\rho(\vartheta) = 2\cos(\vartheta/2)(\sin(\vartheta/2) + 1/2)$ , on obtient que les zéros de  $\rho$  sur  $[-\pi, \pi]$  sont  $-\pi, -\frac{\pi}{3}$  et  $\pi$ . En particulier, le premier vecteur dérivé  $\mathbf{t}(\vartheta) = \rho'(\vartheta)\mathbf{u}_{\vartheta} + \rho(\vartheta)\mathbf{u}_{\vartheta+\pi/2}$  n'est jamais nul ; les valeurs remarquables sont

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(-\pi) &= -\frac{1}{2}\mathbf{u}_{-\pi}, \quad \mathbf{t}(-\pi/3) = \frac{3}{2}\mathbf{u}_{-\pi/3}, \quad \mathbf{t}(\vartheta_1) = \rho(\vartheta_1)\mathbf{u}_{\vartheta_1+\pi/2}, \\ \mathbf{t}(0) &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{\pi/2}, \quad \mathbf{t}(\vartheta_2) = \rho(\vartheta_2)\mathbf{u}_{\vartheta_2+\pi/2} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\pi) = -\frac{3}{2}\mathbf{u}_{\pi}. \end{aligned}$$

*Tracé de la courbe.* Nous avons suffisamment d'informations pour décrire l'allure de la courbe.

- La fonction  $\rho$  est négative sur  $[-\pi, \vartheta_1]$  et  $|\rho|$  croît sur cet intervalle. Comme  $-\mathbf{u}_{\vartheta} = \mathbf{u}_{\vartheta+\pi}$  et  $\frac{\pi}{4} < \vartheta_1 < \frac{\pi}{3}$ , l'arc obtenu est contenu dans le quart de plan supérieur. Le vecteur tangent à l'origine est  $\mathbf{t}(-\pi) = \frac{1}{2}\mathbf{u}_0$  ; le vecteur tangent à l'autre extrémité  $M(\vartheta_1)$  est  $\mathbf{t}(\vartheta_1) = |\rho(\vartheta_1)|\mathbf{u}_{\vartheta_1+\pi+\pi/2} = |\rho(\vartheta_1)|\mathbf{u}_{\vartheta_1+3\pi/2}$ . Voir la figure 2 pour le tracé de cet arc.
- La fonction  $\rho$  est négative sur  $[\vartheta_1, -\pi/3]$  et  $|\rho|$  décroît sur cet intervalle. On obtient un arc reliant le point  $M(\vartheta_1)$  à l'origine dont le vecteur tangent en O est  $\mathbf{t}(-\pi/3) = \frac{3}{2}\mathbf{u}_{-\pi/3}$ . Voir la figure 2 pour le tracé de cet arc.
- La fonction  $\rho$  est positive et croissante sur  $[-\pi/3, \vartheta_2]$ . Comme  $\pi/3 < \vartheta_2 < \pi/2$ , on obtient un arc issu de O, avec vecteur tangent  $\mathbf{t}(-\pi/3) = \frac{3}{2}\mathbf{u}_{-\pi/3}$ , et aboutissant au point  $M(\vartheta_2)$  du quart de plan supérieur droit, avec vecteur tangent  $\mathbf{t}(\vartheta_2) = \rho(\vartheta_2)\mathbf{u}_{\vartheta_2+\pi/2}$ . Cet arc est contenu dans le quart de plan inférieur droit pour  $\vartheta \in [-\pi/3, 0]$ , dans le quart de plan supérieur droit pour  $\vartheta \in [0, \vartheta_2]$ . Voir la figure 4 pour le tracé de cet arc.
- La fonction  $\rho$  est positive et décroissante sur  $[\vartheta_2, \pi]$ . On obtient un arc issu de  $M(\vartheta_2)$  avec vecteur tangent  $\mathbf{t}(\vartheta_2) = \rho(\vartheta_2)\mathbf{u}_{\vartheta_2+\pi/2}$  et aboutissant à l'origine avec vecteur tangent  $\mathbf{t}(\pi) = \frac{3}{2}\mathbf{u}_0$ . Cet arc est contenu dans le quart de plan supérieur droit pour  $\vartheta \leq \pi/2$  et dans le quart de plan supérieur gauche pour  $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ . Voir la figure 5 pour le tracé de cet arc.

Une fois connue la courbe pour  $\vartheta \in [-\pi, \pi]$  (cf. figure 6), il reste à appliquer la réflexion d'axe (Oy) (cf. figure 7).

**Exercice 5.9** — Étude de la spirale logarithmique, définie par le paramétrage  $(e^{at} \cos(t), e^{at} \sin(t))$  avec  $a \in \mathbb{R}_{<0}$ .

(i) Vu l'identité  $\gamma(t + \pi) = -e^{a\pi}\gamma(t)$ , le point  $\gamma(t + \pi)$  est l'image du point  $\gamma(t)$  par l'homothétie  $h$  de centre  $O$  et de rapport  $-e^{a\pi}$  (de valeur absolue  $e^{a\pi} < 1$ ). Par suite, il suffit d'étudier la courbe pour  $t \in [0, \pi]$  puis d'appliquer les homothéties  $h^m$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  pour obtenir tous les points ; plus précisément, si l'on pose  $C = \gamma([0, \pi])$ , alors

$$\gamma([-N\pi, (N+1)\pi]) = \bigcup_{|m| \leq N} h^m(C)$$

pour tout entier  $N \in \mathbb{N}$ .

L'étude des deux fonctions coordonnées ne pose pas de problème : posant  $t_1 = \text{Arctan}(-1/a) \in [0, \pi/2]$  et  $t_2 = \text{Arctan}(a) + \pi \in [\pi/2, \pi]$ ,

- l'abscisse décroît de 1 à  $e^{at_2} \cos(t_2)$  sur  $[0, t_2]$  puis croît de  $e^{at_2} \cos(t_2)$  à  $e^{a\pi}$  sur  $[t_2, \pi]$  ;
- l'ordonnée croît de 0 à  $e^{at_1} \sin(t_1)$  sur  $[0, t_1]$  puis décroît de  $e^{at_1} \sin(t_1)$  sur  $[t_1, \pi]$ .

En outre,  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t$  et

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t_1) = \begin{pmatrix} (a+1/a)\cos(t_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ (1+a^2)\cos(t_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma'(\pi) = -e^{a\pi}\gamma'(0)$$

Un calcul immédiat fournit

$$x''(t) = e^{at}[(a^2 - 1)\cos(t) - 2a\sin(t)] = e^{at}(a^2 + 1)\cos(t + \alpha)$$

et

$$y''(t) = e^{at}[(a^2 - 1)\sin(t) + 2a\cos(t)] = e^{at}(a^2 + 1)\sin(t + \alpha)$$

avec  $\cos(\alpha) = \frac{a^2-1}{a^2+1}$  et  $\sin(\alpha) = \frac{2a}{a^2+1}$ . Le deuxième vecteur dérivé est donc toujours non nul, ce qui signifie que la courbe ne possède aucun point d'inflexion et, par conséquent, qu'elle se trouve toujours du même côté de sa tangente.

Toutes ces informations permettent de tracer la courbe ; voir les figures 8 et 9.

(ii) Étant donné  $t_0 \in \mathbb{R}$ , l'abscisse curviligne d'origine  $\gamma(t_0)$  est l'injection croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du = \sqrt{a^2 + 1} \int_{t_0}^t e^{au} du = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} [e^{at} - e^{at_0}].$$

Prenant  $t_0 = 0$ , on obtient  $s(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}(e^{at} - 1)$ . La longueur de la spirale  $\gamma([0, +\infty[)$  est donc égale à  $\lim_{+\infty} s = \frac{\sqrt{a^2+1}}{|a|} = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}$ .

(iii) Une équation polaire de la courbe considérée ici est évidemment  $\rho = e^{a\vartheta}$ .

(iv) Il est commode ici d'utiliser des coordonnées polaires. La droite  $(O\gamma(\vartheta))$  est dirigée par le vecteur  $\mathbf{u}_\vartheta$  tandis que la tangente à la courbe au point  $\gamma(\vartheta)$  est dirigée par le vecteur  $\mathbf{t}(\vartheta) = \rho'(\vartheta)\mathbf{u}_\vartheta + \rho(\vartheta)\mathbf{u}_{\vartheta+\pi/2}$ . L'angle orienté entre ces deux droites est constant si et seulement si l'angle orienté entre les vecteurs  $\mathbf{u}_\vartheta$  et  $\mathbf{t}(\vartheta)$  est constant modulo l'angle plat. Cette dernière condition équivaut à la conjonction des deux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la valeur absolue de } \cos(\widehat{\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{t}(\vartheta)}) \text{ est constante} \\ \cos(\widehat{\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{t}(\vartheta)}) \text{ et } \sin(\widehat{\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{t}(\vartheta)}) \text{ sont toujours de même signe ou toujours de signes opposés.} \end{array} \right.$$

Utilisant le fait que le repère  $(\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{u}_{\vartheta+\pi/2})$  est orthonormé et direct,

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{t}(\vartheta)}) = \left( \mathbf{u}_\vartheta \left| \frac{\mathbf{t}(\vartheta)}{\|\mathbf{t}(\vartheta)\|} \right. \right) = \frac{\rho'(\vartheta)}{\sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

et

$$\sin(\widehat{\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{t}(\vartheta)}) = \left( \mathbf{u}_{\vartheta+\pi/2} \left| \frac{\mathbf{t}(\vartheta)}{\|\mathbf{t}(\vartheta)\|} \right. \right) = \frac{\rho(\vartheta)}{\sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Ces formules montrent que l'angle orienté entre le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_\vartheta$  — dirigeant la demi-droite  $(O\gamma(\vartheta))$  — et le vecteur tangent au point  $\gamma(\vartheta)$  est constant ; il en est donc *a fortiori* de même de l'angle orienté entre la droite  $(O\gamma(\vartheta))$  et la tangente au point  $\gamma(\vartheta)$ .

Déterminons maintenant toutes les courbes paramétrées  $C$  ayant la propriété ci-dessus, à savoir que l'angle orienté entre la droite  $(OM)$  et la tangente au point  $M$  ne dépende pas du point  $M \in C$ . Pour que cela ait un sens, on suppose qu'une telle courbe ne passe pas par l'origine  $O$

Cherchons un paramétrage polaire de  $C$  sous la forme  $M(\vartheta) = O + \rho(\vartheta)\mathbf{u}_\vartheta$ , où  $\rho$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  ne s'annulant pas, donc de signe constant.

Notant  $\mathbf{t}(\vartheta) = \rho'(\vartheta)\mathbf{u}_\vartheta + \rho(\vartheta)\mathbf{u}_{\vartheta+\pi/2}$  le vecteur tangent au point  $M(\vartheta)$ , le raisonnement précédent conduit aux formules

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{t}(\vartheta)}) = \frac{\rho'(\vartheta)}{\sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2}} \text{ et } \sin(\widehat{\mathbf{u}_\vartheta, \mathbf{t}(\vartheta)}) = \frac{\rho(\vartheta)}{\sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2}},$$

de sorte que l'angle entre la droite  $(OM(\vartheta))$  et la tangente au point  $M(\vartheta)$  est constant si et seulement s'il existe un nombre réel  $c$  tel que

$$\begin{cases} |\rho'| = c\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \\ \rho'/\rho \geq 0 \text{ ou } \rho'/\rho \leq 0. \end{cases}$$

Noter que l'on a nécessairement  $c \in [0, 1[$  puisque  $\rho \neq 0$ . La première condition équivaut à  $(1 - c^2)(\rho')^2 = c^2\rho^2$ , soit encore

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = \frac{c^2}{1 - c^2}.$$

Compte-tenu de la seconde condition, nous pouvons reformuler le problème initial sous la forme suivante : pour que l'angle entre la droite  $(OM(\vartheta))$  et la tangente au point  $M(\vartheta)$  soit constant, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel  $\alpha$  tel que

$$\rho' = \alpha\rho.$$

L'intégration de cette équation différentielle conduit à  $\rho = Ce^{\alpha\vartheta}$  avec  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ . Réciproquement, il est clair d'après ce qui précède que toute courbe admettant une équation polaire de cette forme satisfait à la condition angulaire du problème.

*Conclusion.* Les courbes paramétrées telles, qu'en tout point  $M$ , l'angle entre la droite  $(OM)$  et de la tangente en  $M$  soit constant sont les courbes d'équation polaire  $\rho = Ce^{\alpha\vartheta}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Remarquer que l'on obtient les cercles de centre  $O$  en considérant  $\alpha = 0$  et  $C > 0$ .

**Exercice 5.11** — (i) Considérons tout d'abord le cercle  $C_0$  centré au point  $I = O + \mathbf{i}$  de l'axe  $O + \mathbb{R}\mathbf{i}$ . Pour tout  $\vartheta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , la droite  $O + \mathbb{R}\mathbf{u}_\vartheta$  coupe  $C_0$  en deux points distincts,  $O$  et un second point noté  $M(\vartheta)$  ; on pose par ailleurs  $M(\pi/2) = M(-\pi/2) = O$ . Définissant la fonction  $\rho_0$  sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  par  $\rho_0(\vartheta) = \|\overrightarrow{OM(\vartheta)}\|$ , le cercle  $C_0$  est paramétré par l'application

$$[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vartheta \mapsto O + \rho_0(\vartheta)\mathbf{u}_\vartheta$$

car tout point de  $C$  s'écrit sous la forme  $M(\vartheta)$  pour un choix convenable de  $\vartheta$  dans  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Il est aisé de déterminer explicitement la fonction  $\rho_0$  : en vertu du théorème de l'angle au centre,

$$M(\vartheta) = I + \mathbf{u}_{2\vartheta}$$

avec  $I = O + \mathbf{i}$  et donc

$$\rho_0(\vartheta)^2 = (1 + \cos(2\vartheta))^2 + \sin(2\vartheta)^2 = 2 + 2\cos(2\vartheta) = 4\cos(\vartheta)^2.$$

Vu sa définition, la fonction  $\rho_0$  est positive et donc  $\rho_0(\vartheta) = 2\cos(\vartheta)$  pour tout  $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Comme  $\cos(\vartheta + \pi) = -\cos(\vartheta)$  et  $\mathbf{u}_{\vartheta+\pi} = -\mathbf{u}_\vartheta$ ,

$$O + \cos(\vartheta + \pi)\mathbf{u}_{\vartheta+\pi} = O + \cos(\vartheta)\mathbf{u}_\vartheta$$

et l'on n'obtient pas de nouveau point en autorisant  $\vartheta$  à varier dans  $\mathbb{R}$  tout entier. Nous avons ainsi démontré que le cercle  $C_0$  peut être défini par l'équation polaire  $\rho_0 = 2\cos(\vartheta)$ .

Considérons maintenant un cercle quelconque  $C$  passant par le point  $O$ , de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ . Si  $\varphi$  est une mesure de l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{i}$  et  $\overrightarrow{O\Omega}$ , alors  $C$  est l'image de  $C_0$  par la similitude directe  $s$  de rapport  $R$  et d'angle de mesure  $\varphi$ . Cette similitude s'exprime très aisément sous la forme

$$s(O + \rho \mathbf{u}_\vartheta) = O + R\rho \mathbf{u}_{\vartheta+\varphi},$$

donc

$$\begin{aligned} C = s(C_0) &= \{O + R\rho_0(\vartheta) \mathbf{u}_{\vartheta+\varphi}; \vartheta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{O + 2R \cos(\vartheta) \mathbf{u}_{\vartheta+\varphi}; \vartheta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{O + 2R \cos(\vartheta - \varphi) \mathbf{u}_\vartheta; \vartheta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

et

$$\rho = 2R \cos(\vartheta - \varphi) = 2R \cos(\vartheta_0) \cos(\vartheta) + 2R \sin(\varphi) \sin(\vartheta)$$

est une équation polaire de  $C$ .

Réciproquement, toute équation polaire de la forme  $\rho = \alpha \cos(\vartheta) + \beta \sin(\vartheta)$  définit un cercle passant par  $O$ . Il suffit en effet pour le voir d'écrire  $\rho$  sous la forme

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\vartheta - \varphi),$$

où  $\varphi$  est un nombre réel tel que  $\cos(\varphi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$  et  $\sin(\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ . Ce cercle se déduit de  $C_0$  par la similitude de centre  $O$ , de rapport  $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  et d'angle de mesure  $\varphi$ ; son centre est l'image du point  $I$ , donc a pour coordonnées

$$\frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \left( \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right).$$

(ii) Il convient de commençons par une brève étude de la courbe définie par l'équation polaire  $\rho^2 = a^2 \cos(2\vartheta)$ , où  $a$  est un nombre réel non nul. Quitte à appliquer une homothétie de centre  $O$ , on peut sans problème supposer  $a^2 = 1$ .

L'étude de cette courbe est aisée, bornons-nous à en indiquer les symétries. En vertu des identités  $\rho(\vartheta + \pi)^2 = \rho(-\vartheta)^2 = \rho(\vartheta)^2$ , chaque valeur de  $\vartheta$  telle que  $\cos(2\vartheta) \geq 0$  donne naissance à quatre points : outre  $M(\vartheta) = O + \rho(\vartheta) \mathbf{u}_\vartheta = O - \rho(\vartheta) \mathbf{u}_{\vartheta+\pi}$ , on dispose des points

- $O + \rho(\vartheta) \mathbf{u}_{\vartheta+\pi}$ , le symétrique de  $M(\vartheta)$  par rapport à l'origine ;
- $O + \rho(\vartheta) \mathbf{u}_{-\vartheta}$ , le symétrique de  $M(\vartheta)$  par rapport à l'axe  $(Ox)$  ;
- $O - \rho(\vartheta) \mathbf{u}_{-\vartheta}$ , symétrique de  $M(\vartheta)$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ .

Par suite, il suffit d'étudier l'arc défini par les conditions

$$\begin{cases} \vartheta \in [0, \pi/4] \\ \rho = \sqrt{\cos(2\vartheta)} \end{cases}$$

puis de lui appliquer successivement la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées ; la courbe ainsi obtenue est la réunion des deux branches

$$\begin{cases} \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4] \\ \rho = \sqrt{\cos(2\vartheta)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4] \\ \rho = -\sqrt{\cos(2\vartheta)} \end{cases}$$

Toute autre valeur de  $\vartheta \in \mathbb{R}$  tel que  $\cos(2\vartheta) \geq 0$  donne naissance à des points appartenant déjà à cette courbe.

Pour le tracé, voir la figure 10.

a) Intéressons-nous maintenant aux cercles passant par  $O$  et tangent à la lemniscate  $\mathcal{L}$  en un point  $M$ . Vu les symétries décelées précédemment, il suffit de se restreindre à l'arc  $\mathcal{L}^+$  défini par les conditions  $\vartheta \in [0, \pi/4]$  et  $\rho \geq 0$ .

Si  $M = M(\pi/4) = O$ , ces cercles ne sont autres que ceux passant par  $O$  et tangents à l'une des deux diagonales  $O + \mathbb{R}(\mathbf{i} \pm \mathbf{j})$  ; il y en a une infinité, leur centre pouvant être n'importe quel point de ces deux droites.

Étant donné  $\vartheta_0 \in ]-\pi/4, \pi/4[$ , il existe un *unique* cercle  $C$  passant par  $O$  et tangent à  $\mathcal{L}$  au point  $M(\vartheta_0)$ . En effet :

- vu (i), il revient au même de dire que le cercle C passe par O ou qu'il admet une équation polaire de la forme  $\rho = \alpha \cos(\vartheta) + \beta \sin(\vartheta)$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  ;
- le vecteur tangent à ce cercle au point  $M(\vartheta_0)$  est  $(-\alpha \sin(\vartheta_0) + \beta \cos(\vartheta_0))\mathbf{u}_{\vartheta_0} + (\alpha \cos(\vartheta_0) + \beta \sin(\vartheta_0))\mathbf{u}_{\vartheta_0+\pi/2}$  ;
- le vecteur tangent à  $\mathcal{L}$  au point  $M(\vartheta_0)$  est  $\rho'(\vartheta_0)\mathbf{u}_{\vartheta_0} + \rho(\vartheta_0)\mathbf{u}_{\vartheta_0+\pi/2}$ .

Comme les deux vecteurs tangents ont la *même* composante selon  $\mathbf{u}_{\vartheta_0+\pi/2}$ , ils sont colinéaires si et seulement s'ils sont égaux et nous sommes ainsi ramenés à la détermination de tous les couples  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  tels que

$$\begin{cases} \alpha \cos(\vartheta_0) + \beta \sin(\vartheta_0) & = \rho(\vartheta_0) \\ -\alpha \sin(\vartheta_0) + \beta \cos(\vartheta_0) & = \rho'(\vartheta_0). \end{cases}$$

Le déterminant de ce système étant égal à 1, il existe un unique couple solution dans  $\mathbb{R}^2$  ; on a en outre  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  car  $\rho(\vartheta_0) \neq 0$ .

Nous venons d'établir l'existence et l'unicité du cercle passant par O et tangent à l'arc  $\mathcal{L}^+$  en un point M distinct de O ; on le notera  $C_M$ . Par symétrie, cette assertion est vraie en tout point M de la lemniscate distinct de O.

b) Il reste à déterminer le lieu  $\mathcal{E}$  des centres des cercles passant par O et tangents à la lemniscate en un point M. On se restreint de nouveau à l'arc  $\mathcal{L}^+$  : l'ensemble  $\mathcal{E}$  se déduit de

$$\mathcal{E}^+ = \{\text{centres des cercles passant par O et tangents à } \mathcal{L}^+\}$$

en appliquant successivement les réflexions d'axes (Ox) et (Oy).

L'ensemble  $\mathcal{E}^+$  contient la réunion  $\mathcal{A}$  des centres des cercles passant par O et tangents à  $\mathcal{L}^+$  en ce point. Nous avons déjà vu que  $\mathcal{A}$  est la réunion des deux diagonales  $O + \mathbb{R}(\mathbf{i} \pm \mathbf{j})$ .

Étant donné  $\vartheta \in ]-\pi/4, \pi/4[$ , il découle du point (i) et de ce qui précède que le centre du cercle  $C_{M(\vartheta)}$  est le point de coordonnées  $(\alpha(\vartheta)/2, \beta(\vartheta)/2)$ , où

$$\begin{pmatrix} \alpha(\vartheta) \\ \beta(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(\vartheta) \\ \rho'(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(\vartheta) \cos(\vartheta) - \rho'(\vartheta) \sin(\vartheta) \\ \rho(\vartheta) \sin(\vartheta) + \rho'(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Un peu d'attention conduit aux identités

$$\begin{aligned} \alpha(\vartheta)^2 - \beta(\vartheta)^2 &= (\cos(\vartheta)^2 - \sin(\vartheta)^2)\rho(\vartheta)^2 - (\cos(\vartheta)^2 - \sin(\vartheta)^2)\rho'(\vartheta)^2 - 4\rho(\vartheta)\rho'(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \\ &= \cos(2\vartheta)^2 - \cos(2\vartheta)^2 \tan(2\vartheta)^2 + 2\sin(2\vartheta)^2 \\ &= \cos(2\vartheta)^2 + \sin(2\vartheta)^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

l'avant dernière étape reposant sur la formule  $2\rho'(\vartheta)\rho(\vartheta) = -2\sin(2\vartheta)$ , obtenue en dérivant la relation  $\rho^2 = \cos(2\vartheta)$ . Le centre du cercle  $C_{M(\vartheta)}$  appartient donc à l'hyperbole  $\mathcal{H}$  d'équation  $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$  dans le repère (O;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ).

Réciproquement, vérifions que tout point  $\Omega$  de l'arc de cette hyperbole défini par les conditions  $x \geq 0$  et  $y \leq 0$  appartient à  $\mathcal{E}^+$ .

- Il existe  $\vartheta \in [0, \pi/4[$  tel que l'abscisse  $x$  de  $\Omega$  soit égale à  $\alpha(\vartheta)$  : en effet, la fonction  $\alpha(\vartheta) = \rho(\vartheta) \cos(\vartheta) - \rho'(\vartheta) \sin(\vartheta)$  est continue,  $\alpha(0) = \rho(0) = 1$  et  $\lim_{\pi/4} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\pi/4} \rho' = +\infty$  car  $\rho' = -\sin(2\vartheta)/\rho(\vartheta) = -\sqrt{\tan(2\vartheta)}\sqrt{\sin(2\vartheta)}$  ; l'intervalle  $\alpha([0, \pi/4[)$  contient donc l'intervalle  $[0, +\infty[$ , et il existe par suite  $\vartheta \in [0, \pi/4[$  tel que  $x = \alpha(\vartheta)/2$ .
- L'ordonnée  $y$  de  $\Omega$  vérifie par construction  $y^2 = x^2 - \frac{1}{4} = (\alpha(\vartheta)/2)^2 - \frac{1}{4} = (\beta(\vartheta)/2)^2$  ; comme  $y \leq 0$ , il nous reste à établir l'inégalité  $\beta(\vartheta) \leq 0$ . Cela découle directement de l'identité  $\rho'\rho = -2\sin(2\vartheta)$ ,

$$\beta(\vartheta) = \rho(\vartheta) \sin(\vartheta) + \rho'(\vartheta) \cos(\vartheta) = \rho(\vartheta) \cos(\vartheta) [\tan(\vartheta) - \tan(2\vartheta)] \leq 0$$

puisque  $\vartheta \in [0, \pi/4[$  et  $\rho \geq 0$ . On a donc  $y = \beta(\vartheta)/2$  et  $\Omega$  est ainsi le centre du cercle  $C_{M(\vartheta)}$ .

Au final, il découle de tout ce que l'on vient de dire que l'ensemble  $\mathcal{E}$  est la réunion de l'hyperbole  $\mathcal{H}$  et de ses deux asymptotes :

$$\mathcal{E} = \mathcal{H} \cup \mathcal{A}.$$

---