6. Géométrie différentielle (suite) & Coniques

Sauf mention expresse du contraire, tous les exercices ont pour cadre un plan affine euclidien Π*, que l'on supposera orienté si cela est nécessaire.*

Exercice 6.1. (Abscisse curviligne) — Soient $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\gamma : \mathrm{I} \to \Pi$ une courbe paramétrée de classe C^1.

(i) Soit $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable dont la dérivée ne s'annule pas. Soit $\mathrm{J} = \varphi(\mathrm{I})$. Justifier qu'il existe une unique application $\lambda : \mathrm{J} \to \Pi$ de classe C^1 telle que $\gamma = \lambda \circ \varphi$, puis relier $||\gamma'(t)||$ et $||\lambda'(\varphi(t))||$.

(ii) On suppose maintenant que le premier vecteur dérivé $\gamma'(t)$ ne s'annule pour aucun $t \in \mathrm{I}$. On fixe $t_0 \in \mathrm{I}$ et on considère la fonction

$$\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, \ \ t \mapsto \int_{t_0}^{t} ||\gamma'(u)||\mathrm{d}u.$$

Que peut-on dire du paramétrage λ défini en (i) ? Cette fonction φ est appelée *abscisse curviligne*.

(iii) Soient $t_0, t_1 \in \mathrm{I}$ distincts. On désigne par $\mathrm{L}(t_0,t_1) > 0$ la longueur de l'arc de courbe $\gamma([t_0,t_1])$ et par $\mathrm{d}(\gamma(t_0),\gamma(t_1))$ la longueur du segment $[\gamma(t_0),\gamma(t_1)]$. Démontrer que le rapport

$$\frac{\mathrm{L}(t_0,t_1)}{\mathrm{d}(\gamma(t_0),\gamma(t_1))}$$

tend vers 1 lorsque t_1 tend vers t_0.

(iv) Déterminer l'abscisse curviligne de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \Pi$ définie par l'équation polaire $\rho = \cos(\vartheta) + 1$ dans un repère orthonormé de Π. Quelle est la longueur de cette courbe ?

Exercice 6.2. (Courbure) — Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $\gamma : \mathrm{I} \to \Pi$ une courbe paramétrée de classe C^2. On suppose que pour tout $t_0 \in \mathrm{I}$, les deux premiers vecteurs dérivés $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ au point $\gamma(t_0)$ sont linéairement indépendants.

On rappelle que le *repère de Frenet* au point $\gamma(t_0)$ est le repère orthonormé *direct* $(\gamma(t_0);\mathbf{t}(t_0),\mathbf{n}(t_0))$, où $\mathbf{t}(t_0) = \gamma'(t_0)/||\gamma'(t_0)||$ est le vecteur tangent unitaire ; le vecteur $\mathbf{n}(t_0)$, uniquement déterminé par ces condition, est le *vecteur normal unitaire*.

(i) Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et désignons par $s : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ l'abscisse curviligne d'origine t_0. On pose $\lambda = \gamma \circ s^{-1}$. Démontrer que l'on a $\mathbf{t}(t_0) = \lambda'(0)$ et prouver qu'il existe un nombre réel $\kappa(t_0)$ tel que

$$\lambda''(0) = \kappa(t_0)\mathbf{n}(t_0) \ \text{ et } \ \mathbf{n}'(t_0) = -\kappa(t_0)\mathbf{t}(t_0).$$

Le scalaire $\kappa(t_0) \in \mathbb{R}$ est la *courbure algébrique* au point $\gamma(t_0) = \lambda(0)$; si $\kappa(t_0) \neq 0$, son inverse $\mathrm{R}(t_0) = \kappa(t_0)^{-1}$ est le *rayon de courbure algébrique* en ce point.

(ii) Discuter la position de la courbe par rapport à sa tangente au point $\gamma(t_0)$ en fonction du signe de $\kappa(t_0)$.

(iii) Démontrer la formule

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{||\gamma'(t)||^3}$$

pour tout $t \in \mathrm{I}$, le déterminant étant calculé dans une base orthonormée.

(iv) Si le paramétrage γ est de la forme $(t, f(t))$ dans un repère orthonormé direct de Π, démontrer que l'on a

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1+f'(t)^2)^{3/2}}.$$

(v) Déterminer le repère de Frenet et la courbure en un point dans le cas d'un paramétrage polaire $\gamma(\vartheta) = \mathrm{O} + \rho(\vartheta)\mathbf{u}_\vartheta$.

(vi) Calculer la courbure en un point d'un cercle, d'une cycloïde et d'une spirale logarithmique. (cf. Exercices 5.6 et 5.9).

Exercice 6.3. (Coniques affines) — Soit $(\mathrm{O};\mathbf{i},\mathbf{j})$ un repère cartésien de Π, non nécessairement orthonormé. Étudier les courbes définies par les équations suivantes.

(i) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3 = 0$.
(ii) $x^2 - 2xy - y^2 + 4x = 0$.
(iii) $x^2 + 4xy + 15y^2 + x - y + 1 = 0$.
(iv) $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 2y = 0$.

Exercice 6.4. (Définition focale des coniques) — 1. Soient F un point de Π (*foyer*), Δ une droite ne passant pas par F (*directrice*) et e un nombre réel strictement positif (*excentricité*). On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathrm{F}) = e\mathrm{d}(\mathrm{M},\Delta)$.

En choisissant un repère orthonormé adéquat, démontrer que $\mathscr{C}$ est une *ellipse* si $e < 1$, une *parabole* si $e = 1$, une *hyperbole* si $e > 1$.

2. Soit $(\mathrm{O};\mathbf{i},\mathbf{j})$ un repère orthonormé de Π. Pour chacune des courbes suivantes, démontrer qu'il existe un foyer, une directrice et une excentricité permettant de la définir. On discutera l'éventuelle unicité de ces éléments.

(i) La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $x^2 = 2py$.
(ii) L'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$.
(iii) L'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$.

3. (*Équation polaire*) On reprend les notations de la question 1 et on considère le repère orthonormé $(\mathrm{F};\mathbf{i},\mathbf{j})$ avec $\mathbf{i}$ normal à Δ et $\mathbf{j}$ dirigeant Δ ; on choisit $\mathbf{i}$ de sorte que Δ soit la droite d'équation $x = a$ avec $a > 0$.

(i) Démontrer que $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation polaire $\rho(\vartheta) = \frac{ex_0}{1+e\cos(\vartheta)}$.
(ii) Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre e vers 0 ?
(iii) Soit $\mathscr{C}'$ une courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{\alpha+\beta\cos(\vartheta)+\gamma\sin(\vartheta)}$ avec $\alpha \neq 0$. Démontrer qu'il s'agit d'une conique de foyer l'origine.

Exercice 6.5. — On munit Π d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\mathbf{i},\mathbf{j})$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme de degré 3 et soit $\mathscr{C}_\mathrm{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(y)\}$.

(i) Exhiber un axe de symétrie de $\mathscr{C}_\mathrm{P}$.
(ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme P pour que $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ soit une droite.
(iii) Supposons que $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ ne soit pas une droite. Démontrer qu'alors $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ est la réunion d'une droite et d'une ellipse, puis calculer l'excentricité de cette dernière.

Exercice 6.6. (Paraboles) — 1. Soit $\mathscr{P}$ une parabole. Démontrer que $\mathscr{P}$ admet un paramétrage de la forme (t, at^2) avec $a \neq 0$ dans un repère orthonormé convenable. En déduire l'existence d'une tangente en tout point de $\mathscr{P}$.

2. Soit $\mathscr{P}$ une parabole de directrice Δ. En utilisant un repère orthonormé adéquat, démontrer que la tangente à $\mathscr{P}$ en un point M est la bissectrice intérieure des demi-droites $[\mathrm{MF})$ et $[\mathrm{MH})$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur Δ. En déduire une construction géométrique de la tangente à $\mathscr{P}$ en un point.

Exercice 6.7. (Ellipses) — 1. (*Définition bifocale*). Soient F et F' deux points distincts et soit a un nombre réel strictement positif tel que $2a > \mathrm{FF}'$. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}' = 2a$ est une ellipse de foyers F et F'. Que se passe-t-il si $2a \leqslant \mathrm{FF}'$?

2. Réciproquement, si $\mathscr{E}$ est une ellipse de foyers F et F', démontrer qu'il existe un nombre réel $a > \mathrm{FF}'/2$ tel que

$$\mathscr{E} = \{\mathrm{M} \in \Pi \mid \mathrm{MF}+\mathrm{MF}' = 2a\}.$$

3. Soit $\mathscr{E}$ une ellipse. Démontrer que $\mathscr{E}$ admet un paramétrage de la forme $(a\cos(t), b\sin(t))$ avec $a, b > 0$ dans un repère orthonormé adéquat, puis en déduire l'existence d'une tangente à $\mathscr{E}$ en tout point.

4. Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F et F'. Quel que soit le point $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$, démontrer que la tangente à $\mathscr{E}$ en M est la bissectrice extérieure des demi-droites $[\mathrm{MF})$ et $[\mathrm{MF}')$. En déduire la propriété optique suivante : si un miroir Σ est une portion de la surface obtenue en faisant tourner $\mathscr{E}$ autour de l'axe (FF'), alors Σ réfléchit tous les rayons passant par F en des rayons passant par F'.

5. (*Construction des tangentes à une ellipse passant par un point*) Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de foyers F et F' et soit P un point du plan. Si Δ est une droite passant par P et tangente à $\mathscr{E}$, démontrer que le symétrique de F par rapport à Δ appartient au cercle de centre P et de rayon PF, ainsi qu'au cercle de centre F' et de rayon $2a$, où a est le nombre réel strictement positif tel que $\mathscr{E} = \{\mathrm{M} \in \Pi \mid \mathrm{MF}+\mathrm{MF}' = 2a\}$. En déduire le nombre de tangentes à $\mathscr{E}$ passant par P, ainsi qu'une méthode de construction.

Exercice 6.8. (Hyperboles) — 1. (*Définition bifocale*). Soient F et F' deux points distincts et soit a un nombre réel strictement positif tel que $\mathrm{FF}' > 2a$. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M du plan tels que $|\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'| = 2a$ est une hyperbole de foyers F et F'. Que se passe-t-il si $\mathrm{FF}' \leqslant 2a$?

2. Réciproquement, si $\mathscr{H}$ est une hyperbole de foyers F et F', démontrer qu'il existe un nombre réel strictement positif $a < \mathrm{FF}'/2$ tel que

$$\mathscr{H} = \{\mathrm{M} \in \Pi \mid |\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'| = 2a\}.$$

3. Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole. Démontrer que $\mathscr{H}$ admet un paramétrage de la forme $(a\mathrm{ch}(t), b\mathrm{sh}(t))$ avec $a, b > 0$ dans un repère orthonormé adéquat, puis en déduire l'existence d'une tangente à $\mathscr{H}$ en tout point.

4. Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyers F et F'. Quel que soit le point $\mathrm{M} \in \mathscr{H}$, démontrer que la tangente à $\mathscr{H}$ en M est la bissectrice intérieure des demi-droites $[\mathrm{MF})$ et $[\mathrm{MF}')$. En déduire la propriété optique suivante : si un miroir Σ est une portion de la surface obtenue en faisant tourner $\mathscr{H}$ autour de l'axe (FF'), alors Σ réfléchit tous les rayons passant par F en des rayons passant (virtuellement) par F'.

5. (*Construction des tangentes à une hyperbole passant par un point*) Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de foyers F et F' et soit P un point du plan. Si Δ est une droite passant par P et tangente à $\mathscr{H}$, démontrer que le symétrique de F par rapport à Δ appartient au cercle de centre P et de rayon PF, ainsi qu'au cercle de centre F' et de rayon $2a$, où a est le nombre réel strictement positif tel que $\mathscr{E} = \{\mathrm{M} \in \Pi \mid |\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'| = 2a\}$. En déduire le nombre de tangentes à $\mathscr{H}$ passant par P, ainsi qu'une méthode de construction.