Université de Lyon | **Préparation au CAPES**
Université Claude Bernard Lyon 1 | **Automne 2008**

CORRECTION DU DM2

———–

III. Bijectivité du passage aux milieux

1. CAS DES TRIANGLES

a. L'isobarycentre G du triangle $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$ vérifie

$$2\overrightarrow{\mathrm{GB}_1} + \overrightarrow{\mathrm{GA}_3} = 2\overrightarrow{\mathrm{GB}_2} + \overrightarrow{\mathrm{GA}_1} = 2\overrightarrow{\mathrm{GB}_3} + \overrightarrow{\mathrm{GA}_2} = 0$$

par associativité de la barycentration. Il en découle que B_2 (resp. B_3 ; resp. B_1) est l'image de A_1 (resp. A_2 ; resp. A_3) par l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, d'où $dm(\mathrm{P}) = (\mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_1) = h(\mathrm{P})$. Notons que les triangles P et $h(\mathrm{P})$ ont le même isobarycentre : en effet, $h(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$ et l'isobarycentre de $h(\mathrm{P})$ est l'image de l'isobarycentre de P par l'application affine h.

b. Soit $\eta : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_3$ l'application qui associe à un triangle $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$ d'isobarycentre G son image par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. Il s'agit manifestement d'une bijection, l'application réciproque associant à un triangle d'isobarycentre G son image par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

L'application $d : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_3$ est également une bijection puisque $d^3 = \mathrm{id}$.

On a $d \circ m = \eta$ en vertu de la question précédente, donc l'application $m = d^{-1} \circ \eta$ est une bijection.

Étant donné un triangle $\mathrm{Q} = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3)$, l'unique triangle $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$ tel que $\mathrm{Q} = m(\mathrm{P})$ s'obtient par la construction géométrique suivante : désignant par G l'isobarycentre de Q, le point A_1 (resp. A_2 ; resp. A_3) est l'image du point B_2 (resp. B_3 ; resp. B_1) par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

2. CAS DES QUADRILATÈRES

a. Par définition des points B_i,

$$\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1} + \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2} = \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2} + \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3} = \overrightarrow{\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3} + \overrightarrow{\mathrm{B}_3\mathrm{A}_4} = \overrightarrow{\mathrm{B}_4\mathrm{A}_4} + \overrightarrow{\mathrm{B}_4\mathrm{A}_1} = 0.$$

On obtient par suite

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1} + \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2} + \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3} = \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2} + \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2} + \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2} = 2\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}$$

et

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_4} + \overrightarrow{\mathrm{B}_4\mathrm{B}_3} + \overrightarrow{\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3} = \overrightarrow{\mathrm{B}_4\mathrm{A}_4} + \overrightarrow{\mathrm{B}_4\mathrm{B}_3} + \overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{B}_3} = 2\overrightarrow{\mathrm{B}_4\mathrm{B}_3},$$

ce qui prouve que le quadrilatère $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4)$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Le centre de symétrie d'un parallélogramme est son isobarycentre. En vertu de la question I.1.a, il s'agit ici de l'isobarycentre de la configuration $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4)$.

b. La composée de deux symétries centrales s, s' est une dilatation de rapport 1, donc une translation. Notant A et A$'$ les centres respectifs de s et s',

$$(s' \circ s)(\mathrm{A}) = s'(s(\mathrm{A})) = s'(\mathrm{A}) = \mathrm{A} + 2\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$$

donc $s' \circ s$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$.

Dans la situation qui nous intéresse, $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}$ et $s_4 \circ s_3$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4}$. Il en découle que $s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4} + 2\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}$, c'est-à-dire l'identité du plan puisque

$$\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2} + \overrightarrow{\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4} = 0$$

du fait que $\mathrm{Q} = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4)$ est un parallélogramme.

Soit A_1 un point un plan et posons

$$\mathrm{A}_2 = s_1(\mathrm{A}_1), \;\; \mathrm{A}_3 = s_2(\mathrm{A}_2), \;\; \mathrm{A}_4 = s_3(\mathrm{A}_3).$$

Par construction, B_1 (resp. B_2 ; resp. B_3) est le milieu du segment $[A_1A_2]$ (resp. $[A_2A_3]$; resp. $[A_3A_4]$). En outre,

$$s_4(A_4) = (s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1)(A_1) = A_1$$

et donc B_4 est le milieu du segment $[A_4A_1]$. Ainsi, la configuration $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ dont nous venons de décrire une construction géométrique est telle que $m(P) = Q$.

Par ailleurs, si $P' = (A_1, A_2', A_3', A_4')$ est une configuration telle que $m(P') = Q$, alors B_1 (resp. B_2 ; resp. B_3) est le milieu du segment $[A_1A_2']$ (resp. $[A_2'A_3']$; resp. $[A_3'A_4']$), donc

$$A_2' = s_1(A_1) = A_2,\ \ A_3' = s_2(A_2') = s_2(A_2) = A_3 \quad \text{et } A_4' = s_3(A_3') = s_3(A_3) = A_4$$

et $P' = P$. Il existe ainsi une et une seule configuration $P \in \mathscr{C}_4$ de point initial A_1 telle que $m(P) = Q$.

d. La condition $A_1 = A_2$ équivaut à $A_1 = B_1$; il suffit donc de choisir le point A_1 confondu avec B_1.

Il n'est par contre pas possible que l'on ait $A_1 = A_3$. En effet, si $A_1 = A_3$, alors les segments $[A_1A_2]$ et $[A_2A_3]$ coïncident et il en va de même de leurs milieux : $B_1 = B_2$. Le parallélogramme (B_1, B_2, B_3, B_4) n'étant pas aplati, ceci est impossible.

e. Soit $P = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ un parallélogramme d'isobarycentre G. Ce point étant le milieu des diagonales de P, $\overrightarrow{GA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_1}$ et donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA_1} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2A_1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{B_2A_2} + 2\overrightarrow{A_2B_1}\right) \\ &= \overrightarrow{B_2B_1}. \end{aligned}$$

Étant donnés un parallélogramme $Q = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ et un point A_1 du plan, ce calcul met en évidence une condition *nécessaire* pour que l'unique configuration $P \in \mathscr{C}_4$ de point initial A_1 et vérifiant $m(P) = Q$ (cf. question b) soit un parallélogramme : il faut que l'on ait $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{B_2B_1}$, où G désigne l'isobarycentre de Q.

Cette condition est également *suffisante*. Soit en effet P une configuration vérifiant $m(P) = Q$ et dont le point initial A_1 est tel que $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{B_2B_1}$. En vertu de la question b,

$$A_3 = (s_2 \circ s_1)(A_1) = A_1 + 2\overrightarrow{B_1B_2} = A_1 + 2\overrightarrow{GA_1}$$

et donc G est le milieu du segment $[A_1A_3]$. Désignant par G' le milieu du segment $[A_2A_4]$, on a alors

$$\begin{aligned} G &= \operatorname{Ibar}(A_1, A_2, A_3, A_4) \\ &= \operatorname{Ibar}(G, G'), \end{aligned}$$

d'où $G' = G$. Ses diagonales se coupant en leur milieu, P est un parallélogramme, éventuellement aplati. Notons que, si Q n'est pas aplati, alors P ne l'est pas non plus : il est en effet clair que l'application m envoie une configuration aplatie sur une configuration aplatie.

D'après la question a, l'application $m : \mathscr{C}_4 \to \mathscr{C}_4$ transforme toute configuration en un parallélogramme, éventuellement aplati. Étant donné un parallélogramme Q (éventuellement aplati), on vient d'autre part de démontrer qu'il existe une unique configuration P satisfaisant aux deux conditions suivantes :
– $m(P) = Q$;
– P est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Ainsi, l'application m induit une bijection de l'ensemble des parallélogrammes (éventuellement aplatis) sur lui-même.

Remarque — L'énoncé est ambigu : pour qu'une configuration $P \in \mathscr{C}_4$ *soit un « parallélogramme », est-il nécessaire qu'elle ne soit pas aplatie ? Tel est explicitement le cas pour les « quadrilatères », mais il n'est dit nulle part qu'un parallélogramme est un quadrilatère... Ceci étant, on peut démontrer sans grande difficulté que l'application m induit une bijection de l'ensemble des parallélogrammes non aplatis dans lui-même. Si* Q *est un parallélogramme non aplati, on a déjà vu qu'il existe un unique parallélogramme non aplati* P *tel que* $Q = m(P)$*. Ce qui reste à vérifier, c'est que l'application m préserve l'ensemble des parallélogrammes non aplatis : si* P *est un parallélogramme non aplati, alors le parallélogramme* $Q = m(P)$ *ne l'est pas davantage. Raisonnons par l'absurde en supposant* P *non aplati et* Q *aplati. Les* *points B_1, B_2, B_3, B_4 sont alignés sur une même droite D. Si le point A_1 appartenait à D, alors il en serait de même pour $A_2 = s_1(A_1)$, $A_3 = (s_2 \circ s_1)(A_1)$ et $A_4 = (s_3 \circ s_2 \circ s_1)(A_1)$, de sorte que la configuration P serait aplatie. Le point A_1 appartient ainsi à l'un des deux-demi plans ouverts de frontière D ; notons celui-ci Π^+ et soit Π^- l'autre demi-plan. Toute symétrie dont le centre est contenu D échange Π^+ et Π^- ; on a donc $A_2 \in \Pi^-$, puis $A_3 \in \Pi^+$ et $A_4 \in \Pi^-$ par le même raisonnement. On en déduit que le segement $[A_1A_3]$ (resp. $[A_2A_4]$) est entièrement contenu dans Π^+ (resp. dans Π^-) car Π^+ et Π^- sont des parties convexes du plan ; comme $\Pi^+ \cap \Pi^- = \varnothing$, ceci contredit le fait que ces segments se coupent en leur milieu ! On a ainsi prouvé que le parallélogramme $Q = m(P)$ n'est pas aplati.*

3. BIJECTIVITÉ DU PASSAGE AU MILIEU DANS LE CAS OÙ n EST IMPAIR

a. Les valeurs propres de M sont les n nombres complexes $\frac{1}{2}(1+\omega^k)$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Comme

$$1+\omega^k = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} \equiv \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow 2k = n,$$

0 n'est pas une valeur propre de M lorsque n est impair et l'endomorphisme M est donc injectif. En particulier, $\ker(M_0) = \{0\}$.

b. L'application M est bijective car tout endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif. L'application $\alpha : \mathscr{C}_n \to \mathbb{C}^n$ associant à une configuration P sont affixe est également bijective. Comme $m = \alpha^{-1} \circ M \circ \alpha$, nous en déduisons que m est une bijection de l'ensemble $\mathscr{C}_n$ sur lui-même.

Si une configuration P est aplatie, alors il en est clairement de même de la configuration des milieux $m(P)$ et donc $m(\mathscr{C}_n - \mathscr{P}_n) \subset \mathscr{C}_n - \mathscr{P}_n$. Ceci équivaut à $m^{-1}(\mathscr{P}_n) \subset \mathscr{P}_n$ puisque m est une bijection.

Considérons maintenant une configuration $P = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{C}_n$ telle que la configuration $Q = m(P) = (B_1, \ldots, B_n)$ soit aplatie. Les points $B_1, \ldots, B_n$ sont par hypothèse alignés sur une droite D. Désignons par Π^+ et Π^- les deux demi-plans fermés de frontière D. Le point A_1 appartient à l'un de ces demi-plans, disons Π^+ pour fixer les idées (il peut appartenir aux deux) ; toute symétrie de centre un point de D échangeant Π^+ et Π^-, nous en déduisons $A_2 \in \Pi^-$, puis $A_3 \in \Pi^+$, … et finalement $A_n \in \Pi^+$ puisque n est impair. Comme A_1 est le symétrique de A_n par rapport au point $B_n \in D$, ceci implique $A_1 \in \Pi^-$ et ainsi A_1 appartient à $\Pi^+ \cap \Pi^- = D$. La droite D étant stable sous chacune des symétries $s_1, \ldots, s_{n-1}$ de centres $B_1, \ldots, B_{n-1}$, la condition $A_1 \in D$ implique $A_i = s_{i-1} \circ \ldots \circ s_1(A_1) \in D$ pour tout $i \geqslant 2$. La configuration P est donc dégénérée, ce qui contredit notre hypothèse.

Nous venons de démontrer l'inclusion $m(\mathscr{P}_n) \subset \mathscr{P}_n$. Comme $m^{-1}(\mathscr{P}_n) \subset \mathscr{P}_n$, la bijection $m : \mathscr{C}_n \to \mathscr{C}_n$ induit une bijection de $\mathscr{P}_n$ dans $\mathscr{P}_n$.

c. L'égalité $m(P) = Q$ équivaut à $M(u) = v$, ce qui se traduit par le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2b_1 & = & z_1 + z_2 \\ 2b_2 & = & z_2 + z_3 \\ & \cdots & \\ 2b_n & = & z_1 + z_n \end{array}\right.$$

En faisant la somme alternée des lignes, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_i = \frac{1}{2}\left((z_1+z_2) - (z_2+z_3) + \ldots + (-1)^{n+1}(z_n+z_1)\right) = z_1$$

puisque n est impair.

L'identité précédente équivaut à dire que le point A_1 est l'image du point O par la translation de vecteur

$$\overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_4B_3} + \ldots + \overrightarrow{B_nB_{n-1}}.$$

On en déduit une construction géométrique simle de la configuration P à partir de $Q = m(P)$:

(i) construire le point A_1, image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_4B_3} + \ldots + \overrightarrow{B_nB_{n-1}}$;

(ii) pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, construire récursivement le point A_i, symétrique du point A_{i-1} par rapport à B_{i-1}.

d. Il ne sert à rien de restreindre M à l'hyperplan H dans cette question...

On a

$$(I+D)(I-D+D^2+\ldots+D^{2p}) = I + D^{2p+1} = 2I$$

car D^n est l'identité de $\mathbb{C}^n$. Comme $\mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{I}+\mathrm{D})$, on en déduit

$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{I} - \mathrm{D} + \mathrm{D}^2 + \ldots + \mathrm{D}^{2p}.$$

En particulier, si $u = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\mathrm{M}(u) = v = (b_1, \ldots, b_n)$, alors $(z_1, \ldots, z_n) = \mathrm{M}^{-1}(b_1, \ldots, b_n)$ et donc

$$z_1 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + b_n$$

car la première coordonnée de $\mathrm{D}^i(v)$ est b_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

4. Bijectivité du passage au milieu dans le cas où n est pair

a. Les valeurs propres de M sont les n nombres complexes $\frac{1}{2}(1+\omega^k)$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (cf. question II.2.b). Comme $n = 2p$ est pair, $1 + \omega^p = 0$ et donc 0 est valeur propre de M. Toutes les valeurs propres de M étant distinctes, chaque sous-espace propre est une droite et donc $\ker(\mathrm{M}) = \mathbb{C}e_p$.

Le vecteur e_p appartient à l'hyperplan H donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}_0) = \mathbb{C}e_p$.

Quel que soit $u = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathrm{F}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(z_1+z_2) - \frac{1}{2}(z_2+z_3) + \frac{1}{2}(z_3+z_4) - \ldots + \frac{1}{2}(z_{2p-1}+z_{2p}) - \frac{1}{2}(z_{2p}+z_1)\\
&\qquad = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - \ldots + z_{2p-1} - z_{2p}) + \frac{1}{2}(z_2 - z_3 + \ldots + z_{2p} - z_1)\\
&\qquad\quad = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - \ldots + z_{2p-1} - z_{2p}) - \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - \ldots + z_{2p-1} - z_{2p}) = 0
\end{aligned}$$

1 et donc $\mathrm{M}(u) \in \mathrm{F}$. Comme M stabilise par ailleurs l'hyperplan H (cf. question I.2.b), $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_{|\mathrm{H}}$ stabilise donc le sous-espace vectoriel $\mathrm{H} \cap \mathrm{F}$.

Le vecteur e_p n'appartient pas au sous-espace F ; par suite, l'endomorphisme M_{00} de $\mathrm{H} \cap \mathrm{F}$ induit par M est injectif et il s'agit donc d'un automorphisme. On a

$$\mathrm{H} = \mathbb{C}e_p \oplus (\mathrm{H} \cap \mathrm{F})$$

car

– les sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}e_p$ et $\mathrm{H} \cap F$ de H sont en somme directe puisque $e_p \in \mathrm{H} - \mathrm{H} \cap \mathrm{F}$;
– $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) \geqslant n-2$, et donc $\dim(\mathbb{C}e_p \oplus (\mathrm{H} \cap \mathrm{F})) \geqslant n-1 = \dim(\mathrm{H})$.

On a donc $\mathrm{Im}(M_0) = \mathrm{M}_0(e_p) + \mathrm{M}_0(\mathrm{H} \cap \mathrm{F}) = \mathrm{H} \cap \mathrm{F}$.

b. Les conditions $v = (b_1, \ldots, b_{2p}) \in \mathrm{F}$ et $b_1 + b_3 + \ldots + b_{2p-1} = b_2 + b_4 + \ldots + b_{2p}$ sont équivalentes. La seconde revient à dire que l'isobarycentre des points $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_{2p-1})$ coïncide avec l'isobarycentre des points $(\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_4, \ldots, \mathrm{A}_{2p})$.

Notant G' cet isobarycentre, on a alors

$$\mathrm{G} = \mathrm{Ibar}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{2p}) = \mathrm{Ibar}(\mathrm{G}', \mathrm{G}') = \mathrm{G}'.$$

c. On a prouvé à la question a que l'image de M est contenue dans F. Le vecteur e_p n'appartenant pas à F, la restriction de M à F est un endomorphisme injectif, donc un automorphisme. Par suite, $\mathrm{M}(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ et donc $\mathrm{Im}(\mathrm{M}) = \mathrm{F}$.

Étant donné un élément v de F, l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{C}^n$ tels que $\mathrm{M}(u) = v$ est une droite affine dans $\mathbb{C}$ de direction $\ker(\mathrm{M}) = \mathbb{C}e_p$, donc de la forme $u_0 + \mathbb{C}e_0$ avec $\mathrm{M}(u_0) = v$. Comme $e_0 = (1, 1, \ldots, 1)$, il existe un unique vecteur dans cette droite dont la première coordonnée soit fixée.

Le sous-ensemble $\mathscr{E}_{2p}$ de $\mathscr{C}_{2p}$ est par définition constitué des configurations dont l'affixe appartient au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{C}^n$. Vu ce que l'on vient de démontrer, il existe pour chaque configuration $\mathrm{Q} \in \mathscr{E}_{2p}$ et chaque point A_1 du plan une unique configuration $\mathrm{P} \in \mathscr{C}_n$ telle que $m(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ et dont le premier point est A_1. Par ailleurs, l'application m induit une bijection de l'ensemble $\mathscr{E}_{2p}$ sur lui-même car M induit un automorphisme de F

d. Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1$ divise $\mathrm{X}^{2p} - 1$ car

$$\mathrm{X}^{2p} - 1 = (\mathrm{X}^2)^p - 1 = (\mathrm{X}^2 - 1)(\mathrm{X}^{2(p-1)} + \mathrm{X}^{2(p-2)} + \ldots + \mathrm{X}^2 + 1).$$

La division euclidienne du polynôme $\mathrm{V} = \mathrm{X}^{2(p-1)} + \mathrm{X}^{2(p-2)} + \ldots + \mathrm{X}^2 + 1$ par $1 - \mathrm{X}$ fournit un polynôme Q et une constante R tels que

$$\mathrm{V} = \mathrm{Q}(1 - \mathrm{X}) + \mathrm{R};$$

on a en outre $\mathrm{R} = \mathrm{V}(1) = p$ et $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{V}) - 1 = 2p - 3$. Posant $\mathrm{B} = -\frac{1}{p}$ et $\mathrm{A} = \frac{1}{p}\mathrm{Q}$, on obtient la relation

$$1 = \mathrm{A}(1-\mathrm{X}) - \mathrm{BV}.$$

Le polynôme A s'explicite aisément :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{1}{p}\frac{\mathrm{V}-p}{1-\mathrm{X}} = \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{p-1}(\mathrm{X}^{2i}-1)}{1-\mathrm{X}} \\
&= -\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-1}(\mathrm{X}^{2i-1}+\mathrm{X}^{2i-2}+\ldots+\mathrm{X}+1) \\
&= -\frac{1}{p}\left[(\mathrm{X}^{2p-3}+\mathrm{X}^{2p-4})+2(\mathrm{X}^{2p-5}+\mathrm{X}^{2p-6})+\ldots+(p-1)(\mathrm{X}+1)\right] \\
&= -\frac{1}{p}(\mathrm{X}+1)\left[\mathrm{X}^{2p-4}+2\mathrm{X}^{2p-6}+\ldots+(p-1)\right] \\
&= -\frac{1}{p}(\mathrm{X}+1)\sum_{k=1}^{p-1}k\mathrm{X}^{2p-2k-2}.
\end{aligned}$$

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{H}\cap\mathrm{F}$ de $\mathbb{C}^n$ est stable par D ; comme D est diagonalisable, il en est de même de l'endomorphisme induit $\mathrm{D}_{00} = \mathrm{D}_{|\mathrm{H}\cap\mathrm{F}}$. Vu la décomposition $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathrm{H} = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus (\mathrm{H}\cap\mathrm{F})$, l'endomorphisme D_{00} admet $2p-2$ valeurs propres distinctes qui sont les nombres complexes de la forme ω^k avec $1 \leqslant k \leqslant 2p-1$ et $k \neq p$. Ces nombres complexes n'étant autre que les racines $2p$-ème de 1 dans $\mathbb{C}$ distinctes de 1 et -1, ce sont précisément les racines du polynôme V ci-dessus. Comme $\deg(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{H}\cap\mathrm{F})$, V est par conséquent le polynôme caractéristique de D_{00} et donc $\mathrm{V}(\mathrm{D}_{00}) = 0$. Notons au passage que l'on a

$$\mathrm{F}\cap\mathrm{H} = \bigoplus_{1\leqslant k\leqslant n,\ 2k\neq n-1}\mathbb{C}e_k.$$

Tous les monômes intervenant dans V étant de degré pair, $\mathrm{V}(-\mathrm{X}) = \mathrm{V}(\mathrm{X})$ et donc $\mathrm{V}(-\mathrm{D}_{00}) = \mathrm{V}(\mathrm{D}_{00}) = 0$. On obtient finalement $\mathrm{A}(-\mathrm{D}_{00})(\mathrm{I}+\mathrm{D}_{00}) = \mathrm{I}$, d'où

$$\mathrm{M}_{00}^{-1} = \left(\frac{1}{2}(\mathrm{I}+\mathrm{D}_{00})\right)^{-1} = 2\mathrm{A}(-D_{00}) = \frac{1}{p}(\mathrm{D}_{00}-\mathrm{I})\sum_{k=1}^{p-1}k\mathrm{D}_{00}^{2p-2k-2}.$$

IV. Caractérisation des polygones dont la forme est stable par passage aux milieux

1. Décomposition canonique de $\mathbb{C}^n$

a. Quels que soient $k, k' \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$(e_k|e_{k'}) = \frac{1}{n}(1+\omega^{-k}\omega^{k'}+\omega^{-2k}\omega^{2k'}+\ldots+\omega^{-(n-1)k}\omega^{(n-1)k'}) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{\ell(k'-k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k' \neq k \\ 1 & \text{si } k = k' \end{cases}$$

car $\omega^{k'-k}$ est une racine n-ème de 1, égale à 1 si et seulement si $k' = k$. Ceci prouve que la base $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ est orthonormale.

b. On a $\omega^{n-k} = \omega^{-k} = \overline{\omega^k}$ donc $e_{n-k} = \overline{e_k}$. Par suite,

$$\mathrm{D}(\overline{e_k}) = \mathrm{D}(e_{n-k}) = \omega^{n-k}e_{n-k} = \omega^{-k}\overline{e_k}$$

et

$$\mathrm{M}(\overline{e_k}) = \mathrm{M}(e_{n-k}) = \frac{1}{2}(1+\omega^{n-k})e_{n-k} = \frac{1}{2}(1+\omega^{-k})\overline{e_k}.$$

c. La base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ étant orthonormale, les plans $\mathrm{E}_k = \mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}\overline{e_k} = \mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}e_{n-k}$, $1 \leqslant k < n/2$, sont deux à deux orthogonaux et le sous-espace E de $\mathbb{C}^n$ qu'ils engendrent est donc la somme directe orthogonale de ces $[n/2]-1$ plans.

Comme $\mathrm{H} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}e_i$,

$$\mathrm{H} = \bigoplus_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (\mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}_{e_{n-k}}) = \bigoplus_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{E}_k = \mathrm{E}$$

si n est impair et

$$\mathrm{H} = \mathbb{C}e_{n/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} (\mathbb{C}e_k \oplus \mathbb{C}_{e_{n-k}}) = \mathbb{C}e_{n/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \mathrm{E}_k = \mathbb{C}e_{n/2} \oplus \mathrm{E}$$

si n est pair. Dans ce dernier cas, $\mathrm{E} = \mathrm{F} \cap \mathrm{H}$ en vertu de l'observation faite à la question III.4.d.

d. Les endomorphismes D et M stabilisent chaque plan E_k car e_k et $\overline{e_k} = e_{n-k}$ sont des vecteurs propres de D et de M.

Tout élément v de E_k s'écrit sous la forme $v = \alpha e_k + \beta \overline{e_k}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et

$$||v||^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

On a donc

$$||\mathrm{M}(v)||^2 = ||\alpha \mathrm{M}(e_k) + \beta \mathrm{M}(\overline{e_k})||^2 = \left\| \alpha \frac{1}{2}(1+\omega^k)e_k + \beta \frac{1}{2}(1+\omega^{-k})\overline{e_k} \right\|^2 = \left| \frac{1}{2}(1+\omega^k) \right|^2 (|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

et

$$||\mathrm{M}(v)|| = \frac{1}{2}|1+\omega^k| \cdot ||v|| = \rho_k ||v||.$$

2. Interprétation complexe des transformations affines du plan fixant O

a. L'application T est un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{T}(z) = \mathrm{T}(x+iy) = x\mathrm{T}(1) + y\mathrm{T}(i)$ pour tout nombre complexe z écrit sous la forme $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Notant respectivement u et v les nombres complexes $\mathrm{T}(1)$ et $\mathrm{T}(i)$, on a alors

$$\mathrm{T}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}u + \frac{z-\overline{z}}{2i}v = \frac{u-iv}{2}z + \frac{u+iv}{2}\overline{z} = az + b\overline{z}$$

avec $a = \frac{u-iv}{2}$ et $b = \frac{u+iv}{2}$. Réciproquement, s'il existe des nombres complexes a et b tels que $\mathrm{T}(z) = az + b\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors

$$\mathrm{T}(x+iy) = (a+b)x + i(a-b)y$$

et l'application T est $\mathbb{R}$-linéaire.

Si

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

est la matrice de T dans la base $(1, i)$, alors $\mathrm{T}(1) = \alpha + i\gamma$, $\mathrm{T}(i) = \beta + i\delta$ et

$$a = \frac{\mathrm{T}(1) - i\mathrm{T}(i)}{2} = \frac{1}{2}\left((\alpha+\delta) + i(\beta-\gamma)\right), \quad b = \frac{\mathrm{T}(1) + i\mathrm{T}(i)}{2} = \frac{1}{2}\left((\alpha-\delta) + i(\beta+\gamma)\right).$$

b. Supposons que l'application T soit $\mathbb{R}$-linéaire. Pour que T soit un automorphisme, il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0\}$. La condition $\mathrm{T}(z) = 0$ équivaut à $az + b\overline{z} = 0$, soit encore $b = -\frac{z}{\overline{z}}a$ si $z \neq 0$. Par suite, si $\ker(\mathrm{T}) \neq \{0\}$, alors $|a| = |-z/\overline{z}||b| = |b|$.

Réciproquement, si $|a| = |b|$, alors $a = e^{2i\vartheta}b$ avec $\vartheta \in \mathbb{R}$; comme $e^{2i\vartheta} = -z/\overline{z}$ avec $z = ie^{i\vartheta}$, il en découle $\ker(\mathrm{T}) \neq \{0\}$.

Finalement, l'application T est un automorphisme si et seulement si $|a| \neq |b|$.

3. Stabilité des polygones affines des polygones réguliers

a. Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$ une configuration d'isobarycentre O et d'affixe u. Supposons qu'il existe un polygône régulier R et une application affine τ tels que $\mathrm{P} = \tau(\mathrm{R})$. Notant G le centre de R et désignant par t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$, alors

$$\mathrm{P} = (\tau \circ t)(t^{-1}(\mathrm{R})),$$

$\tau \circ t$ est une application affine fixant O et t^{-1}R est un polygône régulier de centre O. Ainsi, quitte à modifier R et τ, on peut supposer que R est centré en O et que l'application affine τ fixe la point O. En outre, l'application affine τ est bijective car P est une configuration non dégenérée.

D'après la question II.1.b, il existe un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $2k \neq n$ et $\mathrm{R} = \mathrm{R}_k$; quitte à remplacer k par $n-k$, on peut supposer $1 \leqslant k < n/2$. Appliquant les questions 2.a et 2.b ci-dessus, l'application affine τ du plan dans lui-même correspond à une application T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\mathrm{T}(z) = \alpha z + \beta \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha| \neq |\beta|$. On a alors

$$u = \mathrm{T}(e_k) = \alpha e_k + \beta \overline{e_k}.$$

Réciproquement, s'il existe un entier k et des nombres complexes α et β tels que $1 \leqslant k < n/2$, $|\alpha| \neq |\beta|$ et

$$u = \alpha e_k + \beta \overline{e_k},$$

alors l'application $\mathrm{T} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathrm{T}(z) = \alpha z + \beta \overline{z}$ correspond à une bijection affine τ du plan fixant O et telle que $\mathrm{P} = \tau(\mathrm{R}_k)$. Ainsi, $\mathrm{P} \in \mathscr{A}_n$.

b. Soit k un nombre entier tel que $1 \leqslant k < n/2$. Étant donné $u_k \in \mathrm{E}_k$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u_k = ae_k + b\overline{e_k}$ et l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire W_k de $\mathbb{C}$ défini par $\mathrm{W}_k(z) = az + b\overline{z}$ vérifie $\mathrm{W}_k(e_k) = ae_k + b\overline{e_k} = u_k$. Réciproquement, si W'_k est un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ tel que $u_k = \mathrm{W}'_k(e_k)$, alors $\mathrm{W}_k(z) = \alpha z + \beta \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donc $u_k = \alpha e_k + \beta \overline{e_k}$; on a par suite $\alpha = a$, $\beta = b$ et $\mathrm{W}'_k = \mathrm{W}_k$.

c. Soit P une configuration d'affixe u. Si $\mathrm{P} \in \mathscr{A}_n$, alors u s'écrit sous la forme $\alpha e_k + \beta \overline{e_k}$ avec $1 \leqslant k < n/2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; on a alors $\mathrm{M}(u) = \alpha \mathrm{M}(e_k) + \beta \mathrm{M}(\overline{e_k}) = \alpha \omega^k e_k + \beta \omega^{-k} \overline{e_k}$, ce qui montre que la configuration $\mathrm{Q} = m(\mathrm{P})$, d'affixe $\mathrm{M}(u)$, appartient encore à $\mathscr{A}_n$.

En vertu de la question précédente, il existe une unique application affine t du plan telle que $m(\mathrm{P}) = t(\mathrm{P})$. Nous avons ainsi montré que si P est l'image d'un polygone régulier par une transformation affine du plan, alors $m(\mathrm{P})$ se déduit de P par une transformation affine.

d. Le fait que P admette O pour isobarycentre se traduit par $u \in \mathrm{H}$. Si n est impair, $\mathrm{E} = \mathrm{H}$ et donc $u \in \mathrm{E}$ (cf. question IV.1.c). Si $n = 2p$ est pair, u s'écrit sous la forme $u = u' + \lambda e_p$ avec $u' \in \mathrm{H} \cap \mathrm{F} = \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ (idem) ; on a alors $\mathrm{M}(u) = \mathrm{M}(u')$ car $\mathrm{M}(e_p) = 0$ et $\mathrm{T}(u) = au + b\overline{u} = (au' + b\overline{u'}) + \lambda(a+b)e_p$ car $\overline{e}_p = e_p$. L'identité $m(\mathrm{P}) = t(\mathrm{P})$ équivaut à

$$\mathrm{M}(u') = (au' + b\overline{u'}) + \lambda(a+b)e_p,$$

soit $\mathrm{M}(u') = au' + b\overline{u'}$ et $0 = \lambda(a+b)$ car $au' + b\overline{u'}$ appartient à E. Si $\lambda \neq 0$, la seconde identité implique $a + b = 0$, d'où $a = -b$ et $|a| = |b|$. L'application affine t n'est alors pas injective, ce qui implique que la configuration $m(\mathrm{P}) = t(\mathrm{P})$ soit dégénérée.

Par suite, si l'on suppose que la configuration $m(\mathrm{P})$ n'est pas dégénérée, alors l'affixe u de P appartient à E.

Écrivons u sous la forme $u = \sum_{1 \leqslant k < n/2} u_k$ avec $u_k \in \mathrm{E}_k$. En vertu de la question b, il existe pour chaque k un unique endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire W_k de $\mathbb{C}$ tel que $u_k = \mathrm{W}_k(e_k)$. On a $\mathrm{M}(\overline{e_k}) = \overline{\mathrm{M}(e_k)}$ en vertu de la question I.3.b et, posant $W_k(z) = a_k z + b_k \overline{z}$,

$$\mathrm{MW}_k(e_k) = a_k \mathrm{M}(e_k) + b_k \mathrm{M}(\overline{e_k}) = a_k \mathrm{M}(e_k) + b_k \overline{\mathrm{M}_k(e_k)} = \mathrm{W}_k \mathrm{M}(e_k).$$

Par suite, la condition $\mathrm{M}(u) = \mathrm{T}(u)$ se traduit par l'identité

$$\sum_{1 \leqslant k < n/2} \mathrm{W}_k \mathrm{M}(e_k) = \sum_{1 \leqslant k < n/2} \mathrm{MW}_k(e_k) = \sum_{1 \leqslant k < n/2} \mathrm{TW}_k(e_k),$$

soit $\mathrm{W}_k \mathrm{M}(e_k) = \mathrm{TW}_k(e_k)$ pour tout k. Comme $\mathrm{M}(e_k) = \mathrm{S}_k(e_k)$, on aboutit finalement à

$$\mathrm{W}_k \mathrm{S}_k = \mathrm{TW}_k$$

pour tout k en vertu de la question b.

Si $v \in \mathrm{E}_k$ est tel que $\mathrm{W}_k(v) = 0$, alors $\mathrm{W}_k \mathrm{S}_k(v) = \mathrm{TW}_k(v) = \mathrm{T}(0) = 0$ et donc $\ker(\mathrm{W}_k)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ stable par la similitude directe S_k. Cette dernière est la multiplication par $\frac{1}{2}(1 + \omega^k)$ dans $\mathbb{C}$ et, comme $1 \leqslant k < n/2$, la partie imaginaire de ce nombre complexe est non nulle. Par suite, les seuls sous-espaces vectoriels réels de $\mathbb{C}$ stables sous S_k sont $\{0\}$ et $\mathbb{C}$ et donc $\mathrm{W}_k = 0$ ou W_k est un automorphisme.

Si W_k est un automorphisme, alors $T = W_k^{-1} S_k W_k$ et donc

$$\det(T) = \det(S_k) = \rho_k^2 = |\cos(\pi k/n)| = \cos(\pi k/n).$$

L'entier k étant compris entre 1 et $n/2$, il est complètement déterminé par la donnée de $\cos(\pi k/n)$ et donc par $\det(T)$. Par suite, il existe au plus un entier k tel que $1 \leqslant k < n/2$ et $W_k \neq 0$. L'application T étant d'autre part supposée bijective, $T(u) = \sum_{1 \leqslant k < n/2} TW_k(e_k) \neq 0$ et il existe au moins un k tel que $W_k(e_k) \neq 0$. Au final, il existe un unique entier k tel que $1 \leqslant k < n/2$ et $W_k(e_k) \neq 0$; on a ainsi $u \in E_k$.

e. D'après la question c, toute configuration $P \in \mathscr{A}_n$ est telle que la configuration des milieux $m(P)$ se déduise de P par une transformation affine du plan. Réciproquement, si $P \in \mathscr{C}_n$ est une configuration d'isobarycentre O et d'affixe u telle que $m(P)$ se déduise de P par une transformation affine du plan, la question précédente montre qu'il existe alors un entier k tel que $1 \leqslant k < n/2$ et $u = W_k(e_k)$, où W_k est un automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$. On a par suite $u = \alpha e_k + \beta \overline{e_k}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\alpha| \neq |\beta|$, ce qui implique $P \in \mathscr{A}_n$ en vertu de la question a.