Définitions et notations

On considère un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, de direction E, muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'équation $(z = 0)$ sera noté $\mathcal{P}$, et sa direction P. Par abus d'écriture, à partir de la partie III, le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ de $\mathcal{P}$ sera également noté $\mathcal{R}_0$.

Si $\mathcal{R}$ est un repère d'un espace affine $\mathcal{X}$ de dimension quelconque n et si M est un point de $\mathcal{X}$, nous noterons $M\,(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ pour signifier que $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$.

La partie de $\mathcal{P}$ formée des points à coordonnées entières est notée $\mathcal{Z}$:

$$M(x, y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{Z} \text{ si et seulement si } (x, y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}$, nous noterons AB la distance de A à B, (AB) la droite passant par les points A et B (quand $A \neq B$) et $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B.

On note $\mathcal{Q}$ la quadrique de $\mathcal{E}$ d'équation :

$$(\mathcal{Q}) \qquad x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z = 0$$

et $\mathcal{C}$ la conique intersection de $\mathcal{Q}$ et du plan $\mathcal{P}$:

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

On note $GA(\mathcal{P})$ le groupe affine de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections affines de $\mathcal{P}$ sur lui-même : $GA(\mathcal{P})$ est un groupe pour la composition.

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices réelles carrées d'ordre 2. Le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de cette algèbre est noté $GL_2(\mathbb{R})$.

Le but de ce problème est d'étudier l'équation diophantienne :

$$(\Sigma) \qquad n^2 - 3np + p^2 + n - p = 0,$$

c'est-à-dire de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points de $\mathcal{C}$ à coordonnées entières : $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}$.

La partie I présente une étude géométrique de la quadrique $\mathcal{Q}$ et de la conique $\mathcal{C}$; la partie II donne quelques méthodes arithmétiques d'étude de (Σ) ; la partie III introduit une famille de transformations affines qui permet, dans la partie IV, de décrire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Les parties I et II sont indépendantes et la partie III est très largement indépendante des deux parties précédentes.

Partie I : étude de la quadrique $\mathcal{Q}$ et de la conique $\mathcal{C}$

I.1. Intersections de $\mathcal{Q}$ avec une famille de plans

On pose $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{k}$.

a) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ soit une base orthonormale directe de E.

b) On pose $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Soit M un point de $\mathcal{E}$; on le représente dans les deux repères par $M(x, y, z)_{\mathcal{R}_0} = M(x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}_1}$. Exprimer x, y et z en fonction de x_1, y_1 et z_1, puis en déduire l'équation de $\mathcal{Q}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}_t$ le plan d'équation $z_1 = t$ relativement au repère $\mathcal{R}_1$. Préciser la position de $\mathcal{P}_t$ dans $\mathcal{R}_0$ et en faire un croquis. Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}_t$ et de $\mathcal{Q}$ est un cercle dont on précisera le centre C_t et le rayon R_t.

d) Préciser la valeur de t pour laquelle le cercle précédent se réduit à un point. Soit S ce point ; vérifier que $S\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{\mathcal{R}_0}$.

I.2. Nature de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{C}$

Soit $\mathcal{R}$ le repère $(S, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$; on note (X, Y, Z) les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$ dans ce nouveau repère.

On note $\mathcal{P}'$ le plan admettant $\mathcal{R}' = (S, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ pour repère orthonormal.

a) Montrer que l'équation de $\mathcal{Q}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est $X^2 + Y^2 = 5Z^2$.

b) Quelle est la nature de $\mathcal{Q}$? On remarquera en particulier que $\mathcal{Q}$ est une surface de révolution et on précisera son axe.

c) Montrer qu'un point $M(X, Y, Z)_{\mathcal{R}}$ est élément de $\mathcal{P}$ si et seulement si $Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Faire une figure, sur une feuille de papier millimétrée, représentant, dans le repère $\mathcal{R}'$, la droite d'intersection $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ainsi que les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ formant $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}'$. On prendra une unité égale à 8cm.

Pour toute la fin de cette partie, cette figure sera un outil important. On y placera les éléments définis ci-dessous ou leurs projections sur $\mathcal{P}'$, au fur et à mesure qu'ils apparaîtront utiles.

Quelle est la nature de la conique $\mathcal{C}$?

d) Montrer qu'il existe deux cercles dans $\mathcal{P}'$, de même rayon et centrés sur l'axe $(S, \overrightarrow{w})$, tangents aux trois droites D, D_1 et D_2. On note Ω_1 et Ω_2 leurs centres respectifs, et on note ρ la valeur commune de leurs rayons.

e) On note $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ les sphères de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, et de rayon ρ. Montrer que ces sphères sont tangentes au plan $\mathcal{P}$ en deux points notés F_1 et F_2, et tangentes à $\mathcal{Q}$ le long de deux cercles que l'on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Représenter sur la figure précédente les projections orthogonales sur $\mathcal{P}'$ de ces deux cercles, ainsi que les points F_1 et F_2.

I.3. Deux caractérisations de $\mathcal{C}$

a) Soit M un point quelconque de l'intersection $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$. Montrer que la droite (MS) est contenue dans $\mathcal{Q}$. On nomme T_1 et T_2 les intersections respectives de (MS) et des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Montrer que $MT_1 = MF_1$ et $MT_2 = MF_2$. Montrer par ailleurs que $|MT_1 - MT_2|$ est constant lorsque M décrit $\mathcal{C}$. Quelle propriété de $\mathcal{C}$ peut-on retrouver ainsi ?

b) Pour $i \in \{1, 2\}$, on nomme Δ_i la droite d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan contenant le cercle $\mathcal{C}_i$, et U_i le centre de $\mathcal{C}_i$. Pour M point quelconque de l'intersection $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$, soit H_i la projection orthogonale de

M sur Δ_i. Vérifier que les points M, S, H_i, T_i et U_i sont coplanaires. En étudiant la figure formée par ces cinq points, prouver que le rapport $\dfrac{MH_i}{MT_i}$ reste constant quand M décrit $\mathcal{C}$. Quelle propriété de $\mathcal{C}$ peut-on retrouver ainsi ?

Partie II : résolution de l'équation diophantienne pour de petites valeurs de n

Pour n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$, on note $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ le coefficient binomial :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Pour n et p entiers naturels supérieurs ou égaux à 1, on s'intéresse, lorsqu'elle a un sens, à l'équation :

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{pmatrix} n \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}.$$

II.1. Une étude élémentaire

a) Montrer que cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} 2 \leq p+1 \leq n, \\ n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0. \end{cases}$$

b) Pour n entier supérieur ou égal à 1, montrer que le polynôme de variable X : $n^2 - 3nX + X^2 + n - X$ possède deux racines réelles, que l'on écrira sous la forme $X_1 = \dfrac{a_n - \sqrt{b_n}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{a_n + \sqrt{b_n}}{2}$ où a_n et b_n sont deux entiers naturels. Pour quelles valeurs de n a-t-on $2 \leq X_1 + 1 \leq n$? Et pour quelles valeurs de n a-t-on $2 \leq X_2 + 1 \leq n$?

c) Montrer que si b est un entier naturel, $\sqrt{b}$ est rationnel si et seulement si b est un carré parfait.

d) On suppose que (n, p) est une solution de (Σ_1). Montrer que $2 \leq n$, que $5n^2 + 2n + 1$ est un carré parfait et donner une expression de p en fonction de n.

e) Réciproquement, soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $5n^2 + 2n + 1$ soit un carré parfait. Montrer qu'il existe un unique p tel que (n, p) soit solution de (Σ_1).

f) Pour n_0 entier naturel non nul, comment peut-on calculer tous les couples (n, p) solutions de (Σ_1) avec $1 \leq n \leq n_0$? On pourra donner un algorithme de calcul de ces solutions, sans utiliser un langage de programmation précis.

II.2 Une méthode plus arithmétique

Soit (n, p) une solution de (Σ_1).

a) On suppose que n et p sont premiers entre eux. Montrer que $np = (n-p)(n-p+1)$ et en déduire que n divise $p - 1$. Quelles sont toutes les solutions de (Σ_1) formées d'entiers premiers entre eux ?

b) On ne suppose plus maintenant que n et p sont premiers entre eux : on note $r = n \wedge p$ leur plus grand commun diviseur commun et on pose $n = ru$ et $p = rv$. Montrer successivement :

- r divise $u - v$; • $r = u - v$; • $v = \dfrac{\sqrt{5r^2+4} - r}{2}$; • $r^2 < \dfrac{2p}{\sqrt{5}-1}$.

c) Faire la liste de tous les couples (n, p) solutions de (Σ_1) pour $n \leq 105$.

Partie III : un groupe de transformations affines conservant $\mathcal{S}$.

Dans cette partie et la suivante, nous travaillons exclusivement dans le plan $\mathcal{P}$, dont le repère $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est encore noté $\mathcal{R}_0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et le repère $\mathcal{R}_1$ définis ci-dessous n'ont pas de rapport avec les éléments de mêmes noms définis dans la partie I.

III.1. Définition d'un nouveau repère $\mathcal{R}_1$ associé à la conique $\mathcal{C}$

a) Soit $I(-1/5, 1/5)_{\mathcal{R}_0}$. On pose alors $x_1 = x + \dfrac{1}{5}$ et $y_1 = y - \dfrac{1}{5}$. Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$?

b) Mettre la forme quadratique $a^2 + b^2 - 3ab$ sous la forme d'un produit de formes linéaires. On pourra considérer $a^2 + b^2 - 3ab$ comme un trinôme d'inconnue b.

c) En déduire qu'il existe une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de P telle que :

- les relations entre les coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}_0$ et les coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathcal{R}_1 = (I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soient de la forme :

$$\begin{cases} X = \alpha\left(x + \dfrac{1}{5}\right) - \left(y - \dfrac{1}{5}\right) \\[2ex] Y = \beta\left(x + \dfrac{1}{5}\right) + \left(y - \dfrac{1}{5}\right) \end{cases}$$

  avec $\alpha + \beta > 0$;

- l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ s'écrive : $5XY + 1 = 0$.

Expliciter les valeurs de α et β, ainsi que les relations exprimant les anciennes coordonnées (x, y) en fonction des nouvelles coordonnées (X, Y).

d) Que sont les axes du nouveau repère $\mathcal{R}_1$ pour la conique $\mathcal{C}$?

III.2. Transformations affines conservant $\mathcal{C}$

Nous étudions dans ce paragraphe l'ensemble G_1 des éléments de $GA(\mathcal{P})$ qui conservent la conique $\mathcal{C}$:

$$G_1 = \{h \in GA(\mathcal{P}),\ h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}.$$

a) Montrer qu'un élément h de $GA(\mathcal{P})$ est élément de G_1 si et seulement si $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

b) Montrer que G_1 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Soit $h \in GA(\mathcal{P})$. Montrer qu'il existe un et seul sextuplet (a, b, c, d, e, f) de réels tel que, pour tout point $M(X, Y)_{\mathcal{R}_1}$, l'image $M' = h(M)$ de M par h ait pour coordonnées, toujours dans le repère $\mathcal{R}_1$, $X' = aX + bY + c$ et $Y' = dX + eY + f$. Justifier que $ae - bd \neq 0$.

d) Montrer que si h est élément de G_1, le sextuplet (a,b,c,d,e,f) qui lui est associé vérifie les relations :

$$\begin{cases} ad = 0 \\ af + cd = 0 \\ 5cf - ae - bd = -1 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ ae - bd \neq 0 \end{cases}$$

e) En déduire que G_1 est formé des transformations de la forme $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(\mu X, Y/\mu)_{\mathcal{R}_1}$ et $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(\mu Y, X/\mu)_{\mathcal{R}_1}$ où μ décrit $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Parmi ces transformations, lesquelles sont des symétries ?

f) On note G'_1 la partie de $GL_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A \in G'_1 \Longleftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}^*,\ A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1/\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que G'_1 est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ pour le produit matriciel et que l'application qui à toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ de G'_1 associe la transformation affine $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(aX+bY, dX+eY)_{\mathcal{R}_1}$ est un isomorphisme de G'_1 sur G_1.

III.3. Transformations affines conservant $\mathcal{Z}$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'ensemble G_2 des éléments de $GA(\mathcal{P})$ qui conservent les points à coordonnées entières :

$$G_2 = \{h \in GA(\mathcal{P}),\ h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}\}.$$

a) Un élément quelconque $h \in GA(\mathcal{P})$ vérifiant $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$ est-il nécessairement élément de G_2 ?

b) Montrer que G_2 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Montrer que les éléments de G_2 sont exactement les applications de la forme

$$M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \longmapsto M'(ax+by+c, dx+ey+f)_{\mathcal{R}_0}$$

où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{Z}^6$ avec $|ae - bd| = 1$.

III.4. Le groupe Γ

a) Montrer qu'il existe deux points P_1 et P_2 tels que :

- $P_1 \neq O$, $P_2 \neq O$ et $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$;
- P_1 est d'ordonnée nulle et P_2 est d'abscisse nulle.

Montrer qu'il existe deux transformations affines f_1 et f_2 telles que :

- $f_1(I) = I$, $f_1(O) = P_1$ et $f_1(P_1) = O$;
- $f_2(I) = I$, $f_2(O) = P_2$ et $f_2(P_2) = O$.

Si M est un point quelconque de $\mathcal{P}$, nous noterons respectivement (x, y) et (X, Y) les coordonnées de M dans les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$. De même, pour $i = 1$ et 2, nous noterons (x_i, y_i) et (X_i, Y_i) les coordonnées de $f_i(M)$ dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$. Nous avons donc :

$$\begin{array}{rcl} M(x,y)_{\mathcal{R}_0} & = & M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \\ f_1(M)(x_1,y_1)_{\mathcal{R}_0} & = & f_1(M)(X_1,Y_1)_{\mathcal{R}_1} \\ f_2(M)(x_2,y_2)_{\mathcal{R}_0} & = & f_2(M)(X_2,Y_2)_{\mathcal{R}_1} \end{array}$$

Exprimer x_1, y_1, x_2 et y_2 en fonction de x et y et démontrer les relations matricielles :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

où $\lambda = \dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$. En déduire que f_1 et f_2 sont toutes deux des symétries appartenant à $G_1 \cap G_2$.

b) On s'intéresse maintenant au sous-groupe Γ de $GA(\mathcal{P})$ engendré par f_1 et f_2. Montrer que les éléments de Γ sont les éléments h de $GA(\mathcal{P})$ qui s'écrivent sous l'une des formes suivantes :

(i) $h = (f_1 \circ f_2)^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) $h = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que Γ est isomorphe au sous-groupe Γ_1 de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices A_1 et A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A_1 A_2$ et en déduire :

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-k} \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En déduire que la décomposition obtenue au b) est unique, c'est-à-dire que chaque élément h de Γ correspond à un et un seul des deux cas (i) ou (ii) et que l'entier relatif k intervenant dans la décomposition de h est unique.

d) Soit H un groupe dont la loi est notée mutiplicativement : l'élément neutre de H sera donc noté 1. On suppose qu'il existe deux éléments a_1 et a_2 de H tels que $a_1^2 = a_2^2 = 1$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupe $\phi : \Gamma \to H$ tel que $\phi(f_1) = a_1$ et $\phi(f_2) = a_2$.

III.5. Utilisation de Γ pour engendrer une infinité de points de $\mathcal{S}$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par Γ, c'est-à-dire que pour tout élément h de Γ et pour tout élément M de $\mathcal{S}$, $h(M)$ est élément de $\mathcal{S}$.

Comme l'origine O de $\mathcal{R}_0$ est élément de $\mathcal{S}$, on en déduit donc que les points M_k et N_k définis pour $k \in \mathbb{Z}$ par :

$$\begin{cases} M_k = (f_1 \circ f_2)^k(O) \\ N_k = (f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k)(O) = f_2(M_k) \end{cases}$$

sont tous éléments de $\mathcal{S}$. Calculer M_1, M_2 et M_3 et comparer avec les résultats obtenus à la partie II.

b) Donner l'expression des coordonnées (x_k, y_k) de M_k dans le repère $\mathcal{R}_0$, en fonction de k et λ. Quelle transformation permet-elle d'obtenir M_{-k} à partir de M_k ?

c) Montrer que les applications :

$$\begin{cases} \phi_1 \ : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(1 + 3x - \sqrt{1 + 2x + 5x^2}\right) \\ \phi_2 \ : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(1 + 3x + \sqrt{1 + 2x + 5x^2}\right) \end{cases}$$

sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Quelles sont leurs applications réciproques ?

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les parties de $\mathcal{P}$ définies par :

$$\begin{cases} M(x, y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{C}_1 \iff y = \phi_1(x) \quad , \\ M(x, y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{C}_2 \iff y = \phi_2(x) \quad . \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ forment une partition de $\mathcal{C}$. Représenter rapidement les parties $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que les points M_{-1}, M_0, M_1, M_2, N_{-1}, N_0 et N_1.

d) Montrer que les applications f_1 et f_2 échangent les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et donc que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont globalement invariantes par $f_1 \circ f_2$. Sur quelles parties de $\mathcal{C}$ les points M_k et N_k sont-ils situés ?

Partie IV : résolution de (Σ).

Soit $P(n, p)_{\mathcal{R}_0}$ un point de $\mathcal{S}$ distinct de O. Le but de cette partie partie est de démontrer que P est image de O par un élément h de Γ, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P = M_k$ ou $P = N_k$.

IV.1. Premier cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n > 0$

Soit la suite $(P_i)_{i \geq 0}$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} P_0 = P \\ P_{i+1} = (f_1 \circ f_2)^{-1}(P_i) \quad \text{pour tout } i \geq 0 \end{cases} .$$

Pour tout i, on notera α_i et β_i les coordonnées de P_i dans le repère $\mathcal{R}_0$.

a) Montrer que l'on a, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\alpha_{i+1} = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_i)$ et $\beta_i = \phi_1(\alpha_i)$.

b) Montrer que la suite $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ est strictement décroissante et non minorée. En déduire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\alpha_k \leq 0 < \alpha_{k-1}$.

c) Montrer que $\alpha_k = 0$ puis que $P = M_k$.

d) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (Σ_1) ?

IV.2. Deuxième cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n < 0$

a) Montrer que le point $P'(-p, -n)_{\mathcal{R}_0}$ est élément de $\mathcal{C}_1$.

b) En déduire qu'il existe un entier relatif k strictement négatif tel que $P = M_k$.

IV.3. Troisième cas : P est élément de $\mathcal{C}_2$

Montrer qu'il existe k élément de $\mathbb{Z}$ tel que $P = N_k$.