ENS Lyon | **Algèbre approfondie**
M1 | **2008-2009**

Examen terminal du 5 janvier 2009

Durée : 3 heures.

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants.

Exercice 1 — Étant donné un nombre entier $n \geqslant 1$, on désigne par ξ_n une racine primitive n-ème de l'unité dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

On pourra utiliser sans justification le résultat élémentaire suivant : pour tout nombre entier $m \geqslant 1$, il existe une infinité de nombres premiers q tels que $q \equiv 1 \pmod m$.

1. Démontrer que le corps $\mathbb{Q}(\xi_n)$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ et expliciter le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_n)|\mathbb{Q})$.

2. Soit G un groupe abélien fini. Démontrer qu'il existe une extension galoisienne finie $K/\mathbb{Q}$ telle que $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq G$.

Exercice 2 — Soit n un entier positif, F_n le groupe libre à n générateurs, et (G, z) un graphe pointé fini tel que $\pi_1(G, z) = F_n$.

1. Soit $p : (\Gamma, w) \to (G, z)$ un revêtement de graphes pointés, et soit $H = p_*\pi_1(\Gamma, w) \subset F_n$. Montrer que H est d'indice fini dans F_n si et seulement si le graphe Γ est fini.
2. On suppose dans toute la suite que H est non trivial. Montrer qu'il existe un chemin c dans Γ d'origine et d'extrémité w qui n'est pas homotope au chemin trivial. On note $\gamma = p(c)$.
3. Notons $\{w_i, i \in I\} = p^{-1}(z)$. Montrer que pour tout $i \in I$, il existe un unique chemin c_i dans Γ d'origine w_i relevant γ.
4. Montrer que si H n'est pas d'indice fini dans F_n, il existe une partie infinie J de I telle que les $c_i, i \in J$ soient deux à deux disjoints.
5. Montrer que si H est distingué dans F, alors, pour tout $i \in I$, c_i a aussi w_i pour aboutissement.
6. On suppose que H est distingué et n'est pas d'indice fini dans F_n. Montrer qu'il n'est pas de type fini.
7. Donner un exemple de sous-groupe non trivial de type fini et d'indice infini dans F_2.
8. Donner un exemple de sous-groupe distingué non trivial d'indice infini dans F_2.

TSVP

Exercice 3 — Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant (E. Artin et O. Schreier) :

soit K un corps et soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K ; si l'extension $\overline{K}/K$ est finie de degré > 1, alors K est un corps de caractéristique nulle, $[\overline{K} : K] = 2$ et $\overline{K} = K(i)$, où $i^2 = -1$.

Notation : si L/K est une extension galoisienne finie, on pose

$$T(x) = \sum_{g \in \mathrm{Gal}(L|K)} g(x) \quad \text{et} \quad N(x) = \prod_{g \in \mathrm{Gal}(L|K)} g(x)$$

pour tout $x \in L$.

Première partie — Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K.

1. Étant donné $a \in K - K^p$, démontrer que le polynôme $X^{p^n} - a$ est irréductible dans $K[X]$ quel que soit le nombre entier $n \geqslant 0$.

2. En déduire que le corps K est parfait si l'extension $\overline{K}/K$ est finie.

Deuxième partie — Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et soit L une extension galoisienne finie de K de degré p. On désigne par σ un générateur du groupe cyclique $\mathrm{Gal}(L|K)$.

3. Justifier qu'il existe un élément $\beta \in L$ tel que $T(\beta) = 1$.

4. Démontrer que le noyau de T est constitué des éléments x de L de la forme $\sigma(y) - y$, où $y \in L$.

5. En déduire l'existence d'un élément α de L tel que $\sigma(\alpha) - \alpha = \beta^p - \beta$.

6. Démontrer que le polynôme $X^p - X - \alpha$ est irréductible dans $L[X]$.

Troisième partie — On considère dans cette dernière partie un corps K dont la clôture algébrique $\overline{K}$ est une extension finie de degré > 1.

7. Quel que soit le nombre premier q divisant $[\overline{K} : K]$, montrer qu'il existe un sous-corps L de $\overline{K}$ contenant K tel que l'extension $\overline{K}/L$ soit de degré q.

8. Montrer que L contient les racines q-èmes de l'unité. En déduire que l'on a $\overline{K} = L(\alpha)$, où $\alpha^q \in L$.

9. Démontrer que l'on a $q = 2$. (*Indication : on pourra considérer $\beta \in \overline{K}$ tel que $\beta^q = \alpha$.*)

10. Démontrer que $\overline{K}$ est le corps de décomposition d'un polynôme irréductible de la forme $X^2 - a$ avec $a \in L$. Établir que $-a$ est un carré dans L et en déduire que l'on a $\overline{K} = L(i)$, où $i^2 = -1$.

11. Prouver que l'on a $\overline{K} = K(i)$, où $i^2 = -1$.

12. Montrer que la somme de deux carrés dans K est encore un carré dans K (*Indication : on pourra écrire $a^2 + b^2 = x\sigma(x)$, où x est un élément de $\overline{K}$ et σ est le K-automorphisme non trivial de $\overline{K}$*). En déduire que le corps K est de caractéristique nulle.