Université Lyon 1 – 2014-2015
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 1 – Autour du théorème du rang

Préambule — On fixe un corps commutatif $\mathbf{K}$. Soit $p \in \mathbf{N} - \{0\}$. On désigne par I_p la matrice identité d'ordre p et par $\mathrm{E}_{i,j}^{(p)}$ la matrice $p \times p$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et les autres 0. Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on désigne par W_σ la matrice (dans la base canonique) de l'application linéaire $\mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^p$ définie par $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$. On considère par ailleurs les matrices $p \times p$ suivantes (D pour *dilatation* et T pour *transvection*) :

$$\begin{array}{cc} 1 \le i \le p, \\ \alpha \in \mathbf{K},\ \alpha \neq 0 \end{array} \qquad \mathrm{D}_{i,\alpha}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & \mathrm{I}_{p-i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} 1 \le i \neq j \le p, \\ \beta \in \mathbf{K} \end{array} \qquad \mathrm{T}_{i,j;\beta}^{(p)} = \mathrm{I}_p + \beta\, \mathrm{E}_{i,j}^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \beta & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\beta \text{ en position } (i,j))$$

Exercice 1 (Mise en route) —

1. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, expliciter la matrice W_σ.
2. Démontrer que l'application
$$\mathfrak{S}_p \to \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}), \quad \sigma \mapsto \mathrm{W}_\sigma$$
est un homomorphisme de groupes.
3. En déduire la variante suivante du théorème de Cayley : *tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$*, avec* p *convenable.*

Exercice 2 (Opérations élémentaires) — Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. On désigne par L_i (resp. C_j) la i-ème ligne (resp. la j-ème colonne) de A. En calculant le produit $\mathrm{D}_{i,\alpha}^{(m)}\mathrm{A}$, vérifier qu'il s'agit de la matrice obtenue en remplaçant L_i par $\alpha \mathrm{L}_i$, ce que l'on notera : $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\, \mathrm{L}_i$. Ceci donne la première colonne du tableau suivant, que l'on vérifiera :

opération	$\mathrm{D}_{i,a}^{(m)}\,\mathrm{A}$	$\mathrm{T}_{i,j;\beta}^{(m)}\,\mathrm{A}$	$\mathrm{W}_{(i,j)}\,\mathrm{A}$	$\mathrm{A}\,\mathrm{D}_{i,\alpha}^{(n)}$	$\mathrm{A}\,\mathrm{T}_{i,j;\beta}^{(n)}$	$\mathrm{A}\,\mathrm{W}_{(i,j)}$
résultat	$\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\,\mathrm{L}_i$	$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \beta\,\mathrm{L}_j$	$\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$	$\mathrm{C}_i \leftarrow \alpha\,\mathrm{C}_i$	$\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \beta\,\mathrm{C}_i$	$\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$

Question subsidiaire : pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, décrire les matrices $\mathrm{W}_\sigma\mathrm{A}$ et $\mathrm{A}\mathrm{W}_\sigma$.

Exercice 3 (Preuve effective du théorème du rang : l'algorithme de Gauss) — Soit A une matrice dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Rappelons que le rang de A est par définition la dimension du sous-espace de $\mathbf{K}^m$ engendré par ses colonnes.

1. Vérifier que le rang de la matrice A est le rang de l'application linéaire $\varphi_\mathrm{A} : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$, $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$.
2. Prouver que le rang d'une matrice est invariant par les opérations élémentaires de l'exercice précédent.
3. En utilisant l'algorithme de Gauss, démontrer que toute matrice $m \times n$ est équivalente à une matrice de la forme
$$\mathrm{I}_{m,n;r} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{où} \quad r \in \{0, \ldots, \min\{m,n\}\}.$$

4. Démontrer que l'entier r dans la question précédente est le rang de A. En déduire le théorème du rang : $\dim \ker \mathrm{A} + \mathrm{rg}\, \mathrm{A} = n$.
5. Démontrer que les rangs d'une matrice et de sa transposée sont égaux.

Exercice 4 (Calculs dans SL_2) — 1. Exprimer la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ à l'aide des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (et de leurs inverses).

2. Soit $d_1, d_2 \in \mathbf{K}^\times$. Démontrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

se déduisent l'une de l'autre par multiplication par des transvections (il pourra être utile d'utiliser le résultat de la question précédente).

Exercice 5 (Générateurs du groupe linéaire) — Soit $\mathcal{X}$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ formé des dilatations et des transvections. Soit $\mathcal{Y}$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ obtenu en adjoignant les matrices de permutation à $\mathcal{X}$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$. En appliquant l'algorithme de Gauss, démontrer qu'il existe des matrices P et Q qui sont des produits d'éléments de $\mathcal{Y}$ et telles que $\mathrm{PAQ} = \mathrm{I}_p$.
2. En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ est engendré par $\mathcal{Y}$.
3. En utilisant la question de l'exercice 4 et en adaptant convenablement l'algorithme de Gauss, démontrer qu'il existe des matrices P et Q, produits d'éléments de $\mathcal{X}$, telles que $\mathrm{PAQ} = \mathrm{I}_p$.
4. En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ est engendré par $\mathcal{X}$.

Exercice 6 (Générateurs du groupe spécial linéaire) — Soit $\mathcal{T} = \{\mathrm{T}^{(p)}_{i,j;\beta} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant p,\ \beta \in \mathbf{K}\}$ l'ensemble des transvections du préambule.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$. En appliquant l'algorithme de Gauss sans les dilatations, démontrer qu'il existe des matrices P et Q produits d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que

$$\mathrm{PAQ} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_p)$$

(utiliser la question 1 de l'exercice 4 pour éliminer les matrices de permutations).
2. En utilisant la question 2 de l'exercice 4, en déduire qu'il existe des matrices P' et Q' produits d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que $\mathrm{P}'\mathrm{AQ}' = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \det(\mathrm{A}))$.
3. En déduire que le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$ est engendré par $\mathcal{T}$.

Exercice 7 (Connexité) — Dans cet exercice, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et l'on considère la toplogie usuelle sur les groupes $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$.

1. Pour $\mathrm{A} = \mathrm{D}^{(p)}_{i,\alpha}$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{(p)}_{i,j;\beta}$, définir une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_p(\mathbf{C})$ telle que $\gamma(0) = \mathrm{I}_p$ et $\gamma(1) = \mathrm{A}$.
2. En utilisant les résultats des exercices 5 et 6, en déduire une démonstration de la connexité des groupes topologiques $\mathrm{GL}_p(\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}_p(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SL}_p(\mathbf{R})$.
3. Démontrer que $\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ n'est pas connexe, mais que le sous-groupe

$$\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})^+ = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}) \mid \det(\mathrm{A}) > 0\}$$

l'est (utiliser la question 2 de l'exercice 6).