Université Lyon 1 – 2014-2015
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 2 – Topologie des espaces de matrices, groupes topologiques

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et on munit $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de sa topologie de $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 (Sur les matrices de rang r) — Soit p, q deux entiers naturels non nuls. On considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ que l'on suppose de rang $r < \min\{m, n\}$ et on fixe un entier ρ tel que $r + 1 \leqslant \rho \leqslant \min\{m, n\}$.

Démontrer qu'il existe une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de matrices dans $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ qui converge vers A et telle que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}_n) = \rho$ pour tout n. (*Indication : commencer par examiner le cas où* A *est sous forme normale.*)

Exercice 2 (Topologie de l'espace des symétries) — Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ formé des matrices S telles que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_n$ (symétries). On considère les fonctions ρ_+ et ρ_- définies pas

$$\rho_\pm : \mathcal{S} \to \mathbf{N}, \quad \mathrm{S} \mapsto \mathrm{rg}\ (\mathrm{S} \pm \mathrm{I}_n).$$

1. Quel lien existe-t-il entre ρ_+ et ρ_- sur $\mathcal{S}$?
2. Démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties ouvertes et fermées de $\mathcal{S}$.
3. En considérant l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{S}$ par conjugaison, démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties connexes de $\mathcal{S}$.

Exercice 3 (Densité du complémentaire d'une hypersurface) — Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ un polynôme en n variables. Le but de l'exercice est de démontrer que, si P n'est pas le polynôme nul, alors l'ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n \mid \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\}$ est un ouvert dense de $\mathbf{K}^n$.

1. Supposons que P s'annule sur une partie de $\mathbf{K}^n$ de la forme $\mathrm{S}_1 \times \cdots \times \mathrm{S}_n$, où S_i désigne une partie *infinie* de $\mathbf{K}$. Démontrer que P est le polynôme nul. (*Indications : on raisonnera par récurrence sur le nombre n d'indéterminées, en écrivant* P *sous la forme* $\mathrm{P} = \sum_k a_k(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1})\mathrm{X}_n^k$.)
2. En déduire que si P s'annule identiquement sur un ouvert non vide de $\mathbf{K}^n$, alors P est le polynôme nul.
3. Conclure.

Exercice 4 (Densité des endomorphismes diagonalisables) — Soit $\mathrm{D}_n(\mathbf{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et $\Sigma_n(\mathbf{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes.

1. Comparer $\mathrm{D}_n(\mathbf{K})$ et $\Sigma_n(\mathbf{K})$.
2. Démontrer que les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ sont des polynômes en les coefficients de A. Expliciter les cas $n = 2$ et $n = 3$.
3. Démontrer que l'application $\chi : \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}^n$, associant à une matrice M les coefficients $a_0(\mathrm{M}), \cdots,$ $a_{n-1}(\mathrm{M})$ de son polynôme caractéristique
$$\det(\mathrm{M} - \mathrm{XI}_n) = (-1)^n(\mathrm{X}^n + a_{n-1}(\mathrm{M})\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_0(\mathrm{M})),$$
est continue.
4. Démontrer que l'ensemble des n-uplets $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ tels que toutes les racines du polynôme $\mathrm{T}^n + a_{n-1}\mathrm{T}^{n-1} + \ldots + a_0$ soient simples est une partie ouverte et dense. (*Indication : reformuler la question à l'aide de la notion de* discriminant*, rappelée ci-dessous, puis utiliser l'exercice précédent.*)

5. En déduire que $\mathrm{D}_n(\mathbf{C})$ et $\Sigma_n(\mathbf{C})$ sont denses dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$.
6. Démontrer que $\mathrm{D}_n(\mathbf{C})$ n'est pas ouvert si $n > 1$, puis que $\Sigma_n(\mathbf{C})$ est l'intérieur de $\mathrm{D}_n(\mathbf{C})$. (*Indication : pour la seconde partie de la question, on pourra démontrer que toute matrice dans* $\mathrm{D}_n(\mathbf{C}) - \Sigma_n(\mathbf{C})$ *est la limite d'une suite de matrices non diagonalisables en utilisant la réduction de Dunford-Jordan.*)
7. Démontrer que $\mathrm{D}_2(\mathbf{R})$ n'est pas dense dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{R})$.

Rappel : résultant et discriminant – Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif. Pour tout entier $d \geqslant 0$, on désigne par $\mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant d}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d.

Soit $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbf{K}[\mathrm{T}]$ deux polynômes de degrés respectifs $p, q \geqslant 1$. Considérons l'application linéaire

$$\Phi : \mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant q-1} \oplus \mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant p-1} \to \mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant p+q-1}, \quad (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \mapsto \mathrm{PU} + \mathrm{QV}.$$

(i) Démontrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si Φ est un isomorphisme. (*Indication* : considérer l'injectivité (resp. la surjectivité) de Φ pour voir que la condition est nécessaire (resp. suffisante))

(ii) Écrivons $\mathrm{P} = a_p\mathrm{T}^p + a_{p-1}\mathrm{T}^{p-1} + \ldots + a_0$ et $\mathrm{Q} = b_q\mathrm{T}^q + b_{q-1}\mathrm{T}^{q-1} + \ldots + b_0$. Expliciter la matrice de Φ par rapport aux bases $(1, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}^{q-1}; 1, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}^{p-1})$ et $(1, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}^{p+q-1})$. En déduire qu'il existe un polynôme $\mathrm{R} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_q]$ tel que

$$\det \Phi = \mathrm{R}(a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q).$$

Par définition, $\det \Phi$ est le *résultant* des polynômes P et Q ; on le note $\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$. Par construction, c'est un élément de $\mathbf{K}$ qui s'annule si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Pour un polynôme P de degré p, on pose $\mathrm{disc}(\mathrm{P}) = (-1)^{p(p-1)/2}\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$; c'est le *discriminant* de P. On observe que $\mathrm{disc}(\mathrm{P})$ est un polynôme en les coefficients de P.

(iii) Calculer $\mathrm{disc}(\mathrm{P})$ pour $\mathrm{P} = a\mathrm{T}^2 + b\mathrm{T} + c$, puis pour $\mathrm{P} = \mathrm{T}^3 + a\mathrm{T} + b$.

Exercice 5 (Propriétés élémentaires des groupes topologiques) — Soit G un groupe topologique.

1. Soit $g_0 \in \mathrm{G}$. Montrer que les applications $\mathrm{L}_{g_0} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto g_0 g$ et $\mathrm{R}_{g_0} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto g g_0$ sont des homéomorphismes.
2. Démontrer que si $\mathrm{U} \subset \mathrm{G}$ est un ouvert et $\mathrm{V} \subset \mathrm{G}$ est une partie quelconque, alors $\mathrm{U}^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in \mathrm{U}\}$ et $\mathrm{UV} = \{uv \mid u \in \mathrm{U}, v \in \mathrm{V}\}$ sont ouverts.
3. Démontrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.

   En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé... Pouvz-vous donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV ne soit pas fermé ?

Exercice 6 (Voisinages) — Soit G un groupe topologique.

1. Démontrer que, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinage de 1, les ensembles $\mathrm{V}g_0$, (resp. $g_0\mathrm{V}$) forment un système fondamental de voisinages de g_0.
2. Démontrer que l'application $f : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto g g_0 h^{-1}$ est continue. En déduire, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de 1, les ensembles $\mathrm{V}g_0\mathrm{V}^{-1}$ forment un système fondamental de voisinages du point g_0 de G.

Exercice 7 (Un extrait d'examen) — Soit G un groupe topologique connexe et soit H un sous-groupe distingué et discret de G. Démontrer que H est abélien. (*Indication : considérer l'action de* G *sur* H *par conjugaison et étudier la topologie des orbites.*)