Université Lyon 1 – 2014-2015
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 3 – Groupes topologiques

Exercice 1 (Une observation importante) — Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G. Démontrer que, si H est ouvert, alors H est également fermé. Que peut-on en déduire sur H si G est connexe ?

Exercice 2 (Adhérence) — Soit G un groupe topologique. On désigne par $\overline{\mathrm{A}}$ l'adhérence de la partie A de G.

1. (a) Soit U un voisinage de 1 et soit g, h dans G. Montrer qu'il existe un ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ tel que $g\mathrm{V}h\mathrm{V} \subset gh\mathrm{U}$.
   (b) En déduire que si g et h sont dans les adhérences $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ de parties A et B de G, alors $gh\mathrm{U} \cap \mathrm{AB} \neq \varnothing$.
   (c) Démontrer que $\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{AB}}$.
2. Prouver l'égalité $\overline{\mathrm{A}}^{-1} = \overline{\mathrm{A}^{-1}}$.
3. Montrer que pour tout g, h dans G, $g\,\overline{\mathrm{A}}\,h = \overline{g\mathrm{A}h}$.
4. On suppose que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$. En considérant l'application $f : \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, prouver que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}$.
5. Démontrer que l'adhérence d'un sous groupe H de G est un sous groupe de G, puis que $\overline{\mathrm{H}}$ est abélien si et seulement si H l'est.

Exercice 2 (Composante neutre) — Soit G un groupe topologique. On désigne par G° la composante connexe de 1.

1. Démontrer que G° est fermée (*indication : vérifier que l'adhérence de* G° *est connexe...*).
2. Démontrer que G° est stable par conjugaison.
3. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, démontrer que $g\mathrm{G}^\circ$ est la composante connexe de g.
4. Démontrer que si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G°, alors $\mathrm{H} = \mathrm{G}^\circ$.
5. Démontrer que si G est connexe, alors tout voisinage V de 1 engendre G, i.e.
$$\mathrm{G} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{V}^n.$$
(*Indication* : observer que l'on peut restreindre V de sorte que $\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{V}$).
6. Démontrer que G° est ouvert si et seulement si 1 a un voisinage connexe dans G.
7. On considère le sous-groupe $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{R}$ muni de la topologie métrique induite.
   (a) Démontrer que $\mathbf{Q}$ n'est pas discret.
   (b) Démontrer que la composante neutre de $\mathbf{Q}$ est $\{0\}$ (cet exemple montre que G° n'est en général pas ouverte).

Exercice 3 (Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$) —

1. Soit H un sous-groupe non trivial de $\mathbf{R}$.
   (a) Justifier l'existence de la borne inférieure a de $\mathrm{H} \cap \mathbf{R}_{>0}$.
   (b) Démontrer que si a est non nul, alors $\mathrm{H} = a\mathbf{Z}$.
   (c) Démontrer que si a est nul, alors H est dense dans $\mathbf{R}$.
   (d) En déduire que tout sous-groupe de $\mathbf{R}$ est soit cyclique, soit dense.

2. Soit α un nombre réel et soit $\mathrm{H} = \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.
   (a) Supposons que α soit rationnel et écrivons $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. Démontrer que H est le groupe $\frac{1}{q}\mathbf{Z}$.
   (b) Démontrer que, si α est irrationnel, alors H est dense dans $\mathbf{R}$.
   (c) En déduire que tout élément de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbf{N}}$ (*indication* : on pourra utiliser, en le justifiant, le fait que l'image d'une partie dense par une application continue *surjective* est encore dense).
3. Soit G le groupe quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, muni de la topologie quotient ; on note $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathrm{G}$ la projection canonique. Fixons un nombre irrationnel ϑ. On note H_0 le sous-groupe de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (x,y) tels que $y = \theta x$, H son image par la projection π et $\tilde{\mathrm{H}}$ la saturation de H_0, c'est-Ã -dire :
$$\tilde{\mathrm{H}} = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{H}_0)).$$
   (a) Démontrer que $\tilde{\mathrm{H}}$ est dense dans $\mathbf{R}^2$ et en déduire que H est dense dans G.
   (b) Le groupe quotient G/H est-il séparé ?

Exercice 4 (Groupes classiques compacts) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Démontrer que les groupes topologiques $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont compacts.

Exercice 5 (Exponentielle) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère l'application exponentielle
$$\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{K}), \quad \mathrm{A} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{A}^n.$$

1. Justifier soigneusement le bien-fondé de cette définition.
2. Démontrer que si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ sont deux matrices qui commutent, alors $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.
3. En utilisant la série entière du logarithme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{A}^n}{n}$, démontrer que l'image de exp contient un voisinage de I_n.
4. Si $n = 1$, en déduire que $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{C}^\times$, puis que $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$. Peut-on faire le même raisonnement lorsque $n \geqslant 2$?

Pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, on va prouver la surjectivité de l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ en adaptant le raisonnement de la question 4. Plus précisément, on se propose de démontrer le théorème suivant :

pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, *il existe une matrice* $\mathrm{B} \in \mathbf{C}[\mathrm{A}]$ *telle que* $\mathrm{A} = \exp(\mathrm{B})$.

6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$ est une partie fermée de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et en déduire $\exp(\mathrm{A}) \in \mathbf{C}[\mathrm{A}]$.
7. Démontrer de même que, si A est suffisamment proche de l'identité, alors $\log(\mathrm{A})$ est bien défini et appartient à $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$.

Fixons maintenant $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On munit $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$ et $\mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times$ des topologies induites par celle de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

8. Démontrer que $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$ et $\mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times$ sont des groupes topologiques connexes.
9. Démontrer que l'exponentielle induit un homomorphisme de groupes $\mathbf{C}[\mathrm{A}] \to \mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times$ dont l'image contient un voisinage de 1, puis conclure.

Sur les réels, la situation est moins favorable.

10. Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, démontrer que $\mathrm{Sp}(\exp(\mathrm{A})) = \exp(\mathrm{Sp}(\mathrm{A}))$ (*indication : trigonaliser* A *sur* $\mathbf{C}$). En déduire que la matrice $\mathrm{diag}(-1,-2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})_+$ n'est pas une exponentielle réelle.
11. En utilisant l'exercice 2 ci-dessus, démontrer cependant que toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ est un produit d'exponentielles réelles.