Université Lyon 1 – 2014-2015
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 4 – Espaces homogènes

Exercice 1 — Soit G un groupe topologique agissant sur un ensemble X. Soit x et y deux points de X appartenant à la même orbite sous G. Démontrer que les espaces G/G_x et G/G_y, munis de la topologie quotient, sont homéomorphes.

Exercice 2 (Matrices de rang r) — Soit m, n deux entiers naturels non nuls. On considère l'action de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ définie par $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \cdot \mathrm{A} = \mathrm{PAQ}^{-1}$.

1. Étant donné $r \in \{0, \ldots, \min\{m, n\}\}$, déterminer le stabilisateur G_r de la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Expliciter la structure de groupe sur G_r. En déduire que G_r est isomorphe à un produit semi-direct topologique $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$, où $\mathrm{N} = \mathrm{M}_{r,m-r}(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbf{K})$ (vu comme un groupe pour l'addition), $\mathrm{H} = \mathrm{GL}_r(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_{m-r}(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbf{K})$ et φ est une action de H sur N que l'on précisera.

Exercice 3 (Groupes linéaires/orthogonaux et produit semi-direct) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct topologique de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ par $\mathbf{R}^\times$. Idem sur $\mathbf{C}$.
2. Démontrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct topologique de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Pour quelles valeurs de n ce produit est-il direct (c'est-à-dire isomorphe au produit direct des deux groupes) ?

Exercice 4 (Connexité des groupes orthogonaux et unitaires) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. On considère l'action naturelle des groupes $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n$.

1. Déterminer le stabilisateur et l'orbite du premier vecteur de la base canonique.
2. Supposons $n \geqslant 2$. Démontrer que la sphère unité
$$\mathbf{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$
est connexe. (*Indication : on pourra raisonner sur des hémisphères ou bien utiliser une projection stéréographique*).
3. Déduire de ce qui précède que $\mathbf{S}^{n-1}$ est homéomorphe à l'espace homogène $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbf{R})$, puis que le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe pour tout $n \geqslant 1$. (*Indication* : raisonner par récurrence sur n en utilisant l'exercice 3).
4. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.
5. Adapter ce raisonnement pour démontrer que les groupes $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SU}_n(\mathbf{C})$ sont connexes.

Exercice 5 (Grassmaniennes) — Dans cet exercice, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit $d \in \{1, \ldots, n\}$. On désigne par $\mathbf{Gr}_d(\mathrm{E})$ l'ensemble des sous-espace de $\mathbf{K}$ de dimension d (appelé *grassmannienne*).

1. Vérifier que le groupe GL(E) opère sur $\mathbf{Gr}_d(\mathrm{E})$ via :
$$\forall g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}),\ \forall \mathrm{F} \in \mathbf{Gr}_d(\mathrm{E}),\quad g \cdot \mathrm{F} = g(\mathrm{F}).$$
2. Démontrer que cette action est transitive.
3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Décrire matriciellement le stabilisateur du sous-espace $\mathrm{F}_0 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d)$ et le dévisser en un produit semi-direct de groupes classiques.

4. Expliquer comment on définit la topologie sur $\mathbf{Gr}_d(\mathrm{E})$ de telle sorte que l'action précédente soit continue.
5. En munissant E d'un produit scalaire euclidien (si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) ou hermitien (si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), démontrer qu'il existe un sous-groupe *compact* de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ agissant *transitivement* sur $\mathbf{Gr}_d(\mathrm{E})$. En déduire que, munie de la topologie définie ci-dessus, la grassmannienne est compacte.
6. Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ un sous-espace vectoriel de dimension d. Soit $(\mathrm{F}_n)_n$ une suite de sous-espaces vectoriels de E de dimension d. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) la suite (F_n) converge vers F dans l'espace topologique $\mathbf{Gr}_d(\mathrm{E})$;
   (ii) il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de F et, pour tout n, une base $(e_1^{(n)}, \ldots, e_d^{(n)})$ de F_n telles que la suite $(e_i^{(n)})$ converge vers e_i pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Exercice 6 (Le demi-plan de Poincaré) — Soit

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

le demi-plan de Poincaré.

1. Vérifier que l'application

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \quad (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

   est bien définie.
2. Démontrer que φ est une action continue de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathfrak{H}$. Calculer le stabilisateur de i.
3. Démontrer que $\mathfrak{H}$ est homéomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}(2)$.

Exercice 7 (Continuité des racines d'un polynôme) — Le but de cet exercice est de voir que l'ensemble des racines complexes avec multiplicité d'un polynôme dépend continûment des coefficients de ce polynôme.

Pour tout n-uplet $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $e_k(z)$ la *k-ième fonction symétrique élémentaire* de z, définie par l'identité suivante dans $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$:

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - z_i) = \mathrm{X}^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k e_k(z) \mathrm{X}^{n-k}.$$

1. Exprimer $e_k(z)$ en fonction des coordonnées de z (*indication : développer le membre de gauche...*).
2. Démontrer que l'application $e : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n, \ \ z \mapsto (e_1(z), \ldots, e_n(z))$ est continue et surjective.
3. Démontrer que les fibres de e sont précisément les orbites de l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbf{C}^n$ définie par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \ \ \forall z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}_n, \quad \sigma \cdot z = (z_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(n)}).$$

4. Pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, démontrer les inégalités

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |z_i| \leqslant \max\{1, |e_1(z)|, \ldots, |e_n(z)|\}.$$

5. Démontrer que l'image d'un fermé F par e est un fermé (*indication : considérer une suite (w_m) dans $e(\mathrm{F})$ convergeant vers $w \in \mathbf{C}^n$ et justifier que $e^{-1}(w_m)$ possède une valeur d'adhérence*).
6. En déduire que e réalise un homéomorphisme entre $\mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n$ et $\mathbf{C}^n$.
7. Expliquer pourquoi le résultat précédent peut se reformuler comme suit : *si (P_k) est une suite de polynômes unitaires de degré n fixé qui converge vers un polynôme P (au sens de la convergence simple des coefficients), alors les racines de P_k convergent vers celles de P, au sens où l'on peut écrire*

$$\begin{cases} \mathrm{P}_k = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i^{(k)}) \\ \\ \mathrm{P} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i) \end{cases} \quad \text{avec } \forall i, \ \lambda_i^{(k)} \to \lambda_i.$$