Université Lyon 1 – 2014-2015
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 5 — Réduction des endomorphismes

Exercice 1 (Similitude : de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$) — Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On se propose de démontrer que A et B sont semblables sur $\mathbf{C}$ si et seulement si elles le sont sur $\mathbf{R}$. La condition est évidemment suffisante.

Supposons que A et B soient semblables sur $\mathbf{C}$: il existe donc une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1}$.

1. Écrivons $\mathrm{P} = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que la matrice réelle $\mathrm{Q}_t = \mathrm{U} + t\mathrm{V}$ soit inversible. (*Indication : considérer le polynôme* $\det(\mathrm{U} + z\mathrm{V})$)
2. Si t est comme précédemment, vérifier que l'on a alors $\mathrm{B} = \mathrm{Q}_t\mathrm{A}\mathrm{Q}_t^{-1}$.

Exercice 2 (Classes de similitude) — 1. Démontrer que deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sont sembables si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{rg}\ (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^k = \mathrm{rg}\ (\mathrm{B} - \lambda)^k.$$

(*Indication : utiliser le lemme des noyaux et la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents.*)

2. Fixons maintenant un polynôme $\chi \in \mathrm{C}[\mathrm{T}]$ unitaire et de degré n. On désigne par $\mathrm{M}_\mathrm{n}^\chi$ l'ensemble des matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ de polynôme caractéristique $(-1)^n\chi$.

(i) Décrire les orbites pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ sur M_n^χ. Combien y en a-t-il ?

(ii) Démontrer que l'adhérence de $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ contient toujours une matrice diagonale. (*Indication : utiliser la réduction de Jordan.*)

(iii) Supposons que A soit diagonalisable. Démontrer qu'une matrice B appartient à l'adhérence de $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ si et seulement si A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal.

(iv) Déduire des deux questions précédentes que A est diagonalisable si et seulement si l'orbite $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ est fermée.

Exercice 3 (Matrices nilpotentes) — 1. Démontrer que toutes les matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_8(\mathbf{K})$ telles que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}(\mathrm{A})$ sont semblables. (*Indications : observer que ces matrices sont nilpotentes...*)

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente.
   (i) Décrire la forme normale de Jordan de N^2 à partir de celle de N.
   (ii) En déduire une caractérisation des classes de conjugaison de matrices nilpotentes admettant une « racine carrée ».
3. Considérons les matrices diagonales par blocs suivantes dans $\mathrm{M}_6(\mathbf{R})$:

$$\mathrm{N} = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_4, \mathrm{J}_2), \quad \mathrm{N}' = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_4, \mathrm{J}_1, \mathrm{J}_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}'' = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_3, \mathrm{J}_3),$$

où J_p désigne la matrice de Jordan de taille $(p+1) \times (p+1)$ standard.

Construire des applications continues γ' et γ'' de $[0,1]$ dans $\mathrm{M}_6(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall t \in]0,1], \quad \gamma'(t) \sim \gamma''(t) \sim \mathrm{N}, \quad \gamma'(0) \sim \mathrm{N}' \ \text{ et } \ \gamma''(0) \sim \mathrm{N}'',$$

où $\sim$ désigne la relation de similitude.

Exercice 4 (Un extrait d'examen) — Le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{K}), \quad (\mathrm{P}, \mathrm{A}) \mapsto \mathrm{PAP}^{-1}.$$

On désigne par $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ l'orbite d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ et par Z_A son stabilisateur.

Première partie

1. Démontrer que $\mathcal{O}_{\mathrm{A}}$ est connexe lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Supposons maintenant $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et désignons par $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices de déterminant positif.

2. Démontrer que, si Z_A contient une matrice de déterminant négatif, alors $\mathcal{O}_A$ est connexe.
3. En déduire que $\mathcal{O}_A$ est toujours connexe lorsque n est impair.
4. Démontrer que, si Z_A est contenu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$, alors $\mathcal{O}_A$ n'est pas connexe.
   (*Indication* : on pourra construire une application continue et surjective de $\mathcal{O}_A$ sur $\{\pm 1\}$.)
5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{O}_A$:
   - est connexe si $Z_A \not\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$;
   - a exactement deux composantes connexes si $Z_A \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$.

Seconde partie

On suppose maintenant $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de polynôme caractéristique χ_M. Démontrer que $\det(\mathrm{M}) < 0$ si et seulement si χ_M possède une racine réelle strictement négative de multiplicité impaire.
2. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Z_A contient une matrice de déterminant négatif ;
   (ii) il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = F' \oplus F''$ telle que F', F'' soient deux sous-espaces vectoriels A-stables et F soit de dimension impaire.
3. Supposons que A soit nilpotente, de diagramme de Young Y.
   (i) Supposons qu'il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = F' \oplus F''$ telle que F' et F'' soient deux sous-espaces vectoriels A-stables. Comment obtenir Y a partir des tableaux de Young Y' et Y'' des restrictions de A à F' et à F'' ?
   (ii) Démontrer que $\mathcal{O}_A$ est connexe si et seulement si l'une des colonnes de Y est de longueur impaire.