

Fiche 5 — Formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, on désigne par \mathbf{K} un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Un *espace quadratique* sur \mathbf{K} est un couple (E, φ) , où E est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et φ est une forme quadratique sur E ; un tel espace est dit *régulier* si φ est de rang maximal.

Exercice 1 (Classification des formes quadratiques sur un corps fini) — Le corps \mathbf{K} est supposé fini. Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique φ .

1. Soit $a, b \in \mathbf{K} - \{0\}$. Démontrer que, pour tout $c \in \mathbf{K}$, il existe $x, y \in \mathbf{K}$ tels que $ax^2 + by^2 = c$ (*indication* : dénombrer les valeurs possibles pour ax^2 et $c - by^2$).
2. En déduire que, si φ est de rang au moins 2, alors l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbf{K}$ est surjective.
3. Démontrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de φ est $\text{diag}(1, \dots, 1, \delta, 0, \dots, 0)$, où $\delta \in \mathbf{K}^{\times, 2}$ est le discriminant¹ de φ (*indication* : construire inductivement une base orthogonale de E en utilisant la question précédente). En déduire que deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang et le même discriminant.
4. Les formes quadratiques

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 3y^2 - z^2 \quad \text{et} \quad \psi : (x, y, z) \mapsto x^2 + 2xy + 3y^2 + 2yz + 5z^2$$

sont-elles équivalentes sur \mathbf{F}_3 ? sur \mathbf{F}_5 ? sur \mathbf{F}_7 ? sur \mathbf{F}_{11} ?

5. Soit (E, φ) et (F, ψ) deux espaces quadratiques réguliers sur \mathbf{K} tels que $\dim E < \dim F$. Démontrer qu'il existe une isométrie de (E, φ) dans (F, ψ) , c'est-à-dire une application linéaire $u : E \rightarrow F$ telle que $\psi \circ u = \varphi$.

Exercice 2 (Le théorème de simplification de Witt) — Soit $A \in S_m(\mathbf{K})$ et $A_1, A_2 \in S_n(\mathbf{K})$ trois matrices symétriques. Le *théorème de simplification* de Witt affirme que les matrices $\text{diag}(A, A_1)$ et $\text{diag}(A, A_2)$ sont congruentes si et seulement si les matrices A_1 et A_2 le sont (il est clair que la condition est suffisante).

Démontrer ce théorème lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}$ ou un corps fini.

Exercice 3 (Topologie de l'espace des formes quadratiques réelles) — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On désigne par $\mathcal{Q}(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E et par $\mathcal{Q}^*(E)$ le sous-ensemble des formes *non dégénérées*. On désigne en outre par sgn l'application $\mathcal{Q}(E) \rightarrow \mathbf{N}^2$ associant à une forme quadratique sa signature.

1. En utilisant l'action naturelle de $\text{GL}(E)$ sur $\mathcal{Q}(E)$, démontrer que les fibres de sgn sont connexes par arcs.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{Q}^*(E)$. On considère la matrice A de φ dans une base de E et on suppose que tous les mineurs principaux $\Delta_i(A)$ sont non nuls.
 - (i) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ triangulaire supérieure et à diagonale unité telle que

$${}^t\text{PAP} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n).$$

1. Le *discriminant* $\text{disc}(\varphi)$ d'une forme quadratique φ est un élément du groupe quotient $\mathbf{K}^{\times}/\mathbf{K}^{\times, 2}$. Si φ est *non dégénérée*, c'est la classe de $\det(A)$, où A est la matrice de φ dans une base quelconque de E ; en général, φ induit une forme quadratique non dégénérée $\bar{\varphi}$ sur $E/\text{Ker}(\varphi)$ et on pose $\text{disc}(\varphi) = \text{disc}(\bar{\varphi})$.

(Indication : raisonner par récurrence sur n et interpréter matriciellement l'algorithme de diagonalisation (réduction) de Gauss.)

(ii) En déduire que A est congruente à la matrice

$$\text{diag}(\Delta_1(A), \Delta_2(A)/\Delta_1(A), \dots, \Delta_n(A)/\Delta_{n-1}(A)).$$

(Indication : interpréter les multiplications par P et P^{-1} en termes d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A .)

3. Démontrer que l'application $\text{sgn} : \mathcal{Q}^*(E) \rightarrow \mathbf{N}^2$ est continue si l'on munit \mathbf{N}^2 de la topologie discrète (indication : pour démontrer la continuité en un point φ , fixer une base de E dans laquelle la matrice de φ soit $\text{diag}(I_r, -I_s)$ et utiliser la question précédente).

Est-ce encore vrai en remplaçant $\mathcal{Q}^*(E)$ par $\mathcal{Q}(E)$?

4. Soit $(r, s) \in \mathbf{N}^2$ avec $r + s = \dim E$.

(i) Démontrer que $\text{sgn}^{-1}(r, s)$ est un ouvert de $\mathcal{Q}(E)$.

(ii) Démontrer que l'adhérence de $\text{sgn}^{-1}(r, s)$ dans $\mathcal{Q}(E)^*$ est l'ensemble des formes quadratiques de signature (p, q) avec $p \leq r$ et $q \leq s$.

(Indication : on pourra raisonner en termes de sous-espaces totalement positifs ou totalement négatifs.)