

Fiche 6 — Décomposition polaire

Exercice 1 (Formes normales des endomorphismes orthogonaux, symétriques et antisymétriques) — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

1. Démontrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace invariant $W \subset E$ avec $\dim W \leq 2$. (On pourra raisonner matriciellement et considérer les parties réelle et imaginaire d'un vecteur propre sur \mathbf{C} .)
2. Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout sous-espace V de E ,

$$f(V) \subset V \implies f(V^\perp) \subset V^\perp.$$

Démontrer qu'il existe une décomposition orthogonale $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} W_i$ en sous-espaces f -invariants W_i avec $\dim W_i \leq 2$. (Raisonnez par récurrence sur $\dim E$.)

3. En déduire que

- (a) tout endomorphisme symétrique est $O(n)$ -diagonalisable,
- (b) la matrice de tout endomorphisme orthogonal est $O(n)$ -semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_+} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_-} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}, \quad \text{où } R_i = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i \end{pmatrix}, \quad \vartheta_i \in \mathbf{R},$$

- (c) la matrice de tout endomorphisme antisymétrique est $O(n)$ -semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}, \quad \text{où } A_i = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_i \\ -\vartheta_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_i \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2 (Exponentielle réelle) — On désigne par $A_n(\mathbf{R})$ le sous-espace de $M_n(\mathbf{R})$ formé des matrices antisymétriques.

1. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$, démontrer que le spectre de $\exp(A)$ est $\{e^\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.
2. En déduire que la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle (*indication* : sinon, voir que M_0 serait diagonalisable sur \mathbf{C}).
3. Démontrer l'identité

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

pour tout $\vartheta \in \mathbf{R}$.

4. À l'aide de l'exercice précédent, en déduire que l'exponentielle induit par restriction une application surjective

$$\exp : A_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \text{SO}(n).$$

5. Démontrer que toute matrice $M \in \text{GL}(n, \mathbf{R})_+$ s'écrit comme le produit de deux exponentielles réelles.

Exercice 3 (Maximalité du groupe orthogonal parmi les groupes compacts de $\text{GL}_n(\mathbf{R})$) — Soit G un sous-groupe compact de $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant $O(n)$. Soit $A \in G$.

1. Soit $A = OS$ la décomposition polaire de A , i.e. $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}$. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad S^k \in G.$$

2. En déduire que 1 est l'unique valeur propre de S (*Indication : introduire une norme sur \mathbf{R}^n et la norme subordonnée sur $M_n(\mathbf{R})$, puis démontrer que chaque valeur propre de S engendre un sous-groupe borné de \mathbf{R}_+^**).
3. En déduire $G = O(n)$.

Exercice 4 (Réduction des endomorphismes hermitiens) — Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $(\cdot | \cdot)$. Soit $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint :

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

1. Démontrer qu'il existe une droite W dans E telle que $f(W) \subset W$ et $f(W^\perp) \subset W^\perp$.
2. En déduire que toute matrice hermitienne est $U(n)$ -diagonalisable.

Soit H_n (resp. H_n^{++}) le sous-ensemble de $M_n(\mathbf{C})$ formé des matrices hermitiennes (resp. hermitiennes définies positives).

3. En adaptant la preuve du cours pour les matrices symétriques réelles, démontrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre H_n et H_n^{++} .
4. En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, l'application $H \mapsto H^k$ réalise un homéomorphisme de H_n^{++} sur lui-même.

Exercice 5 (Décomposition polaire dans $\text{GL}_n(\mathbf{C})$) — D'après l'exercice précédent, l'application exponentielle réalise un homéomorphisme de H_n sur H_n^{++} . On désigne par $\ell : H_n^{++} \rightarrow H_n$ l'homéomorphisme réciproque.

1. Démontrer que les applications

$$U(n) \times H_n \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbf{C}), \quad (U, H) \longmapsto UH$$

et

$$\text{GL}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow U(n) \times H_n, \quad M \longmapsto \left(Me^{-\frac{1}{2}\ell({}^t\overline{M}M)}, \frac{1}{2}\ell({}^t\overline{M}M) \right)$$

sont des homéomorphismes bien définis et réciproques l'un de l'autre.

2. En déduire que $\text{GL}_n(\mathbf{C})$ est homéomorphe à $U(n) \times \mathbf{R}^{n^2}$.
3. En adaptant le raisonnement de l'exercice 3, démontrer que $U(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $\text{GL}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 6 (Étude de $O(p, q)$) — Soit p, q deux entiers naturels non nuls. On désigne par $O(p, q)$ le sous-groupe de $\text{GL}_{p+q}(\mathbf{R})$ formé des isométries de la forme quadratique standard de signature (p, q) sur \mathbf{R}^{p+q} , c'est-à-dire

$$O(p, q) = \{M \in \text{GL}_{p+q}(\mathbf{R}), \quad ; \quad {}^t M I_{p,q} M = I_{p,q}\}$$

où $I_{p,q}$ est la matrice $\text{diag}(I_p, -I_q)$.

- Vérifier que $O(p, q)$ est stable par transposition.
- Soit $T \in S_n^{++}$ et soit \sqrt{T} sa racine carrée dans S_n^{++} .
 - Démontrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\sqrt{T} = P(T)$ et $\sqrt{T}^{-1} = P(T^{-1})$.
(Indication : penser à un polynôme interpolateur...)
 - En déduire que, si $T \in O(p, q)$, alors $\sqrt{T} \in O(p, q)$.
- Démontrer que la décomposition polaire $(O, S) \mapsto OS$ induit un homéomorphisme

$$(O(p, q) \cap O(p+q)) \times (O(p, q) \cap S_{p+q}^{++}) \simeq O(p, q).$$

- Démontrer que l'on a

$$O(p, q) \cap O(p+q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} ; A \in O(p), D \in O(q) \right\} \simeq O(p) \times O(q).$$

- Soit L le sous-espace vectoriel de S_{p+q} formé des matrices symétriques S telles que $S I_{p,q} + I_{p,q} S = 0$.
 - Démontrer que L est un espace vectoriel réel de dimension pq .
 - Démontrer que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de L sur $O(p, q) \cap S_{p+q}^{++}$.
(Indication : observer que la condition $e^S I_{p,q} e^S = I_{p,q}$ s'écrit de manière équivalente sous la forme $I_{p,q} e^S I_{p,q}^{-1} = e^{-S}$.)
- Déduire de ce qui précède que le groupe $O(p, q)$ est homéomorphe à $O(p) \times O(q) \times \mathbf{R}^{pq}$.
- (Application) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur \mathbf{R}^n . Démontrer que son groupe d'isométries $O(q)$ est compact si et seulement si q est définie.

Exercice 7 (Un extrait d'examen) — Soit φ un endomorphisme de l'espace euclidien \mathbf{R}^n . On fixe un entier m dans $\{1, \dots, n-1\}$ et on suppose que φ préserve le volume des parallélépipèdes de dimension m , au sens suivant¹ : φ envoie un parallélépipède de dimension m et de m -volume ν sur un parallélépipède de dimension m et de m -volume ν . On veut démontrer que φ est une isométrie.

- Démontrer que φ est inversible.
- Soit $\varphi = o\sigma$ la décomposition polaire de φ , avec $o \in O_n$ et $\sigma \in S_n^{++}$. Démontrer que σ conserve les m -volumes.
- Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de σ . Démontrer que, pour toute application injective $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$,

$$\prod_{i=1}^m \lambda_{f(i)} = 1.$$

- En déduire que σ est l'identité, puis conclure.

(Indication : dans un premier temps, on pourra établir $\lambda_i = \lambda_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ en choisissant une partie I à $m-1$ éléments non contenant ni i ni j .)

1. On rappelle qu'un parallélépipède de dimension m dans \mathbf{R}^n est une partie Π de la forme

$$p + \sum_{i=1}^m [0, 1]v_i = \left\{ p + \sum_{i=1}^m x_i v_i, x_i \in [0, 1] \right\}$$

où p est un point de \mathbf{R}^n et v_1, \dots, v_m sont des vecteurs linéairement indépendants de \mathbf{R}^n . Le m -volume de Π est défini par

$$\text{Vol}_m(\Pi) = |\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m)|,$$

où \mathcal{B} est une base orthonormée (n'importe laquelle) de la direction du sous-espace $\langle P \rangle$.