Groupe symétrique, géométrie (TD4)

FIMFA Algèbre 1 (Tony Ly)

Exercice 1
Déterminer le groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 2
Soit X un polyèdre régulier de l'espace euclidien de dimension 3. On note $\operatorname{Isom} X$ le groupe des isométries laissant X invariant et Isom^+X son sous-groupe des isométries positives.

a) Montrer que si 0 est centre de symétrie de X, alors $\operatorname{Isom} X$ est isomorphe au produit direct $\operatorname{Isom}^+X \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit Δ le tétraèdre régulier.

b) Montrer que $\operatorname{Isom} \Delta$ et $\operatorname{Isom}^+\Delta$ sont respectivement isomorphes à $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$. Le groupe $\operatorname{Isom}^+\Delta$ est-il un facteur direct de $\operatorname{Isom} \Delta$?

c) Montrer que $\mathfrak{A}_4$ possède un unique sous-groupe d'ordre 4 et que ce dernier est isomorphe au *groupe de Klein* $V_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En déduire l'isomorphisme $\operatorname{Isom}^+\Delta \simeq V_4 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ce produit est-il direct ?

Soit C le cube.

d) En considérant les diagonales du cube, montrer que l'on a un morphisme $\operatorname{Isom} C \to \mathfrak{S}_4$. En déduire les isomorphismes $\operatorname{Isom}^+C \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\operatorname{Isom} C \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e) En remarquant que l'ensemble des sommets de C est la réunion des sommets de deux tétraèdres réguliers, lire la signature de $\mathfrak{S}_4$ dans Isom^+C.

f) Lire le groupe de Klein dans Isom^+C.

Exercice 3
Soit D le dodécaèdre régulier (on admet son existence). On appelle Isom^+D le *groupe de l'icosaèdre*.

a) Déterminer le nombre de faces, arêtes et sommets de D.

b) Identifier les 60 éléments du groupe de l'icosaèdre.

c) En déduire que le groupe de l'icosaèdre est simple.

d) Montrer que l'on peut inscrire 5 cubes dans le dodécaèdre, *i.e.* 5 cubes dont les sommets font partie des sommets du dodécaèdre.

e) En déduire que Isom^+D est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 4

a) En se remémorant que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique, montrer qu'il existe à isomorphisme près un unique corps à 4 éléments. On le notera $\mathbb{F}_4$.

b) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ s'injecte dans $\mathfrak{S}_5$. En déduire qu'il est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

c) Soit $g \neq 1$ un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ de polynôme caractéristique $X^2 + \alpha X + 1$. Donner, en fonction de α, le nombre d'éléments dans la classe de conjugaison de g.

d) En déduire que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Exercice 5
Soit $n \geq 1$. Un sous-groupe G de $\mathfrak{S}_n$ est dit *transitif* si son action sur $\{1, \ldots, n\}$ est transitive.

a) Déterminer les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_3$.

b) Montrer que n divise l'ordre de tout sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$.

Soit H le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ engendré par $(1\ 2\ 3\ 4)$ et $(1\ 3)$.

c) Déterminer les sous-groupes de H qui sont transitifs.
d) Déterminer le commutant de chaque élément d'ordre 2 de $\mathfrak{S}_4$, et réaliser H de cette manière.
e) Soit G un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_4$ d'ordre un diviseur de 8. Montrer qu'il est conjugué à l'un de ceux déterminés à la question (c).
f) Etablir, à conjugaison près, la liste des sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 6

On rappelle que, si G est fini d'ordre $p^\alpha m$ avec $p \nmid m$, on appelle p-Sylow de G tout sous-groupe d'ordre p^α.
Soient p un nombre premier et $n \geq 1$ un entier.

a) Quel est le cardinal d'un p-Sylow (éventuel) de $\mathfrak{S}_n$?
b) Montrer que les p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$ sont cycliques, et les identifier.
c) Soit $\alpha \geq 2$. Supposons que l'on a exhibé un p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^{\alpha-1}}$, que l'on notera S. En découpant $\{1, \ldots, p^\alpha\}$ en sous-ensembles de taille $p^{\alpha-1}$, construire un p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^\alpha}$ isomorphe à un produit semi-direct de copies de S et de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
d) En déduire l'existence d'un p-Sylow dans $\mathfrak{S}_n$.

On vient donc de démontrer l'existence d'un p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$ simplement en l'exhibant. En se rappelant que tous sont conjugués, on a même déterminé la structure des p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 7

Soit $n \geq 1$. On note $\operatorname{Inn} \mathfrak{S}_n$ le sous-groupe de $\operatorname{Aut} \mathfrak{S}_n$ des automorphismes intérieurs.

a) Soit φ un élément de $\operatorname{Aut} \mathfrak{S}_n$. Montrer que si φ transforme transposition en transposition, alors φ est intérieur.
b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant de σ.
c) En déduire que si $n \neq 6$, alors on a $\operatorname{Inn} \mathfrak{S}_n = \operatorname{Aut} \mathfrak{S}_n$.
d) Supposons $n \geq 5$. Montrer que $\operatorname{Inn} \mathfrak{S}_n = \operatorname{Aut} \mathfrak{S}_n$ implique que tous les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués.
e) En se rappelant qu'on avait réalisé $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$, déduire que l'on a $\operatorname{Inn} \mathfrak{S}_6 \neq \operatorname{Aut} \mathfrak{S}_6$.

Exercice 8

Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension 2. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des classes de conjugaison sous $\mathrm{SL}(E)$ des transvections de E. Pour $a \in k^\times$, on note T_a la transvection de matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Montrer que T_a et T_b sont conjugués si et seulement si ab^{-1} est un élément de $k^{\times 2}$.
b) En déduire une bijection naturelle entre $k^\times/k^{\times 2}$ et $\mathcal{T}$.
c) Que dire si k est $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}$?

Exercice 9

a) Rappeler les ordres de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$. Montrer que ces deux derniers sont respectivement isomorphes à $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$.
b) En examinant son centre, montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
c) Déterminer $D(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3))$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)/D(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3))$.

Rappelons que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ possède un unique sous-groupe d'ordre 8, isomorphe à $\mathbb{H}_8$.

d) En remarquant que $\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ est un élément de $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$, montrer que ce dernier est isomorphe à $\mathbb{H}_8$.
e) En déduire que l'on a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathbb{H}_8 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.