

Fiche 2 – Produits semi-directs, topologie

Dans tout ce qui suit, on désigne par \mathbf{K} un corps commutatif. À partir de l'exercice 6, G désigne un groupe topologique séparé d'élément neutre 1.

Exercice 1 (Sous-groupe parabolique) — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie n . On fait agir naturellement $GL(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d . Exhiber une structure de produit semi-direct (non triviale...) sur le stabilisateur d'un sous-espace.

Exercice 2 (Matrices de rang r) — Soit m, n deux entiers naturels non nuls. On considère l'action de $GL_m(\mathbf{K}) \times GL_n(\mathbf{K})$ sur $M_{m,n}(\mathbf{K})$ définie par $(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$.

1. Étant donné $r \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$, déterminer le stabilisateur G_r de la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Expliciter la structure de groupe sur G_r . En déduire que G_r est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes_{\varphi} H$, où $N = M_{r, m-r}(\mathbf{K}) \oplus M_{n-r, r}(\mathbf{K})$ (vu comme un groupe pour l'addition), $H = GL_r(\mathbf{K}) \times GL_{m-r}(\mathbf{K}) \times GL_{n-r}(\mathbf{K})$ et φ est une action de H sur N que l'on précisera.

Exercice 3 (Groupe affine) — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie n et soit \mathcal{E} un espace affine dirigé par E . Soit $GA(\mathcal{E})$, ou plus simplement GA , le groupe des bijections affines de \mathcal{E} et $GL(E)$, ou simplement GL , le groupe des bijections linéaires de E . On souhaite exhiber et interpréter un isomorphisme (non canonique) :

$$GA(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes GL(E).$$

Soit T le sous-groupe de GA formé des translations. Il est isomorphe à E par l'application qui, à $v \in E$, associe la translation $t_v \in GA(\mathcal{E})$ de vecteur v . Soit o un point de \mathcal{E} et GA_o le stabilisateur de o .

1. Soit $f \in GA$ et $v \in E$. Donner une expression simple de $f \circ t_v \circ f^{-1}$. En déduire que T est distingué.
2. Vérifier que GA_o est isomorphe à GL . Montrer que toute application $f \in GA$ s'écrit de façon unique comme une composée $t_v \circ g$ (respectivement $g \circ t_v$) avec $v \in E$ et $g \in GA_o$.
3. Étant donné une application $f \in GA$, on note $L(f) \in GL$ l'application linéaire associée. Vérifier que l'on a une suite exacte :

$$1 \rightarrow T \rightarrow GA(\mathcal{E}) \xrightarrow{L} GL(E) \rightarrow 1.$$

4. Exhiber une section de L et en déduire la structure de produit semi-direct.
5. On suppose à présent que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que \mathcal{E} est un espace affine euclidien. On note $Is(\mathcal{E})$ les groupe des isométries (affines) de \mathcal{E} et $Is(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E . Montrer que l'on a un isomorphisme : $Is(\mathcal{E}) \simeq T \rtimes Is(E)$.

Exercice 4 (Retour sur la décomposition de Bruhat) — On reprend les notations de l'exercice 5 de la première fiche. On considère la permutation σ_0 produit des $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ transpositions (i, j) avec $1 \leq i < j \leq p$ et $i + j = p + 1$, et on pose $\Omega(\mathbf{K}) = U(\mathbf{K})W_{\sigma_0}B(\mathbf{K})$.

1. Décrire $\Omega(\mathbf{K})$ comme un sous-ensemble de $GL_p(\mathbf{K})$ défini par la non-annulation de certains mineurs.
2. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et soit $P \in \mathbf{K}[T_1, \dots, T_n]$. Démontrer que si P s'annule identiquement sur un ouvert non vide de \mathbf{K}^n , alors P est identiquement nul (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur n).
3. Toujours avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , en déduire que $\Omega(\mathbf{K})$ est une partie ouverte et dense de $GL_p(\mathbf{K})$.

Exercice 5* (Endomorphismes diagonalisables) — Soit $D(\mathbf{K}) \subset M_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et $\Sigma_n(\mathbf{K}) \subset M_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes.

- Supposons que \mathbf{K} soit \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Démontrer que l'application $\chi : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^n$, associant à une matrice M les coefficients $a_0(M), \dots, a_{n-1}(M)$ de son polynôme caractéristique

$$\det(TI_n - M) = T^n + a_{n-1}(M)T^{n-1} + \dots + a_0(M),$$

est continue.

- Démontrer que l'ensemble des n -uplets $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ tels que toutes les racines du polynôme $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0$ soient simples est une partie ouverte et dense. (*Indication* : utiliser le discriminant, dont la définition est rappelée ci-dessous).
- En déduire que $D_n(\mathbf{C})$ et $\Sigma_n(\mathbf{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbf{C})$, et que $\Sigma_n(\mathbf{C})$ est l'intérieur de $D_n(\mathbf{C})$.
- Démontrer que $D_2(\mathbf{R})$ n'est pas dense dans $M_2(\mathbf{R})$.

Rappel : résultant et discriminant – Soit \mathbf{K} un corps commutatif. Pour tout entier $d \geq 0$, on désigne par $\mathbf{K}[T]_{\leq d}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d .

Soit $P, Q \in \mathbf{K}[T]$ deux polynômes de degrés respectifs $p, q \geq 1$. Considérons l'application linéaire

$$\Phi : \mathbf{K}[T]_{\leq q-1} \oplus \mathbf{K}[T]_{\leq p-1} \rightarrow \mathbf{K}[T]_{\leq p+q-1}, \quad (U, V) \mapsto PU + QV.$$

- Démontrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si Φ est un isomorphisme. (*Indication* : considérer l'injectivité (resp. la surjectivité) de Φ pour voir que la condition est nécessaire (resp. suffisante))
- Écrivons $P = a_p T^p + a_{p-1} T^{p-1} + \dots + a_0$ et $Q = b_q T^q + b_{q-1} T^{q-1} + \dots + b_0$. Expliciter la matrice de Φ par rapport aux bases $(1, T, \dots, T^{q-1}; 1, T, \dots, T^{p-1})$ et $(1, T, \dots, T^{p+q-1})$. En déduire qu'il existe un polynôme $R \in \mathbf{K}[X_0, X_1, \dots, X_p, Y_0, Y_1, \dots, Y_q]$ tel que

$$\det \Phi = R(a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q).$$

Par définition, $\det \Phi$ est le *résultant* des polynômes P et Q ; on le note $\text{Res}(P, Q)$. Par construction, c'est un élément de \mathbf{K} qui s'annule si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Pour un polynôme P de degré p , on pose $\text{disc}(P) = (-1)^{p(p-1)/2} \text{Res}(P, P')$; c'est le *discriminant* de P . On observe que $\text{disc}(P)$ est un polynôme en les coefficients de P .

- Calculer $\text{disc}(P)$ pour $P = aT^2 + bT + c$, puis pour $P = T^3 + aT + b$.

Exercice 6 (Propriétés élémentaires des groupes topologiques) —

- Soit $g_0 \in G$. Montrer que les applications $L_{g_0} : G \rightarrow G, g \mapsto g_0 g$ et $R_{g_0} : G \rightarrow G, g \mapsto g g_0$ sont des homéomorphismes.
- Démontrer que si $U \subset G$ est un ouvert et $V \subset G$ est une partie quelconque, alors $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$ et $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ sont ouverts.
- Démontrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.

En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé : donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV n'est pas fermé.

Exercice 7 (Voisinsages) —

- Démontrer que, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinage de 1, les ensembles Vg_0 , (resp. $g_0 V$) forment un système fondamental de voisinages de g_0 .
- Démontrer que l'application $f : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g g_0 h^{-1}$ est continue. En déduire, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de 1, les ensembles $Vg_0 V^{-1}$ forment un système fondamental de voisinages du point g_0 de G .

Exercice 8 (Adhérences) — On désigne par \overline{A} l'adhérence de la partie A de G .

1. (a) Soit U un voisinage de 1 et soit g, h dans G . Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $gVhV \subset ghU$.
 (b) En déduire que si g et h sont dans les adhérences \overline{A} et \overline{B} de parties A et B de G , alors $ghU \cap \overline{AB} \neq \emptyset$.
 (c) Démontrer que $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{AB}$.
2. Prouver l'égalité $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$.
3. Montrer que pour tout g, h dans G , $g\overline{A}h = \overline{gAh}$.
4. On suppose que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $A \times B$. En considérant l'application $f : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\overline{A} \times \overline{B}$.
5. Démontrer que l'adhérence d'un sous groupe H de G est un sous groupe de G , puis que \overline{H} est abélien si et seulement si H l'est.

Exercice 9 (Composante neutre) — Soit G° la composante connexe de 1.

1. Démontrer que G° est fermée.
Remarque : il peut arriver que G° ne soit pas ouvert ; voir un contre-exemple à la fin de l'exercice suivant.
2. Démontrer que gG° est la composante connexe de g . Démontrer que G° est stable par conjugaison.
3. Démontrer que si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G° , alors $H = G^\circ$.
4. Démontrer que si G est connexe, alors tout voisinage V de 1 engendre G , i.e.

$$G = \bigcup_{n \geq 1} V^n.$$

(Indication : observer que, quitte à restreindre V , on peut supposer $V^{-1} = V$).

5. Démontrer que G° est ouvert si et seulement si 1 a un voisinage connexe dans G .

Exercice 10 (Sous-groupes de \mathbf{R}) —

1. Soit H un sous-groupe non trivial de \mathbf{R} et soit a la borne inférieure de $H \cap \mathbf{R}_{>0}$.
 (a) Démontrer que si a est non nul, alors $H = a\mathbf{Z}$.
 (b) Démontrer que si a est nul, alors H est dense dans \mathbf{R} .
 (c) En déduire que tout sous-groupe de \mathbf{R} est soit cyclique, soit dense.
2. Soit α un nombre réel et soit $H = \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.
 (a) Supposons que α soit rationnel et écrivons $\alpha = \frac{u}{v}$ avec $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$. Démontrer que $H = \frac{d}{v}\mathbf{Z}$, où $d = \text{pgcd}(u, v)$.
 (b) Démontrer que, si α est irrationnel, alors H est dense dans \mathbf{R} .
 (c) En déduire que tout élément de $[-1, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n \in \mathbf{N}}$.
 (d) En déduire également qu'il existe une puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par 12345.
3. Soit G le groupe quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, muni de la topologie quotient ; on note $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow G$ la projection canonique. Fixons un nombre irrationnel ϑ . On note H_0 le sous-groupe de \mathbf{R}^2 formé des couples (x, y) tels que $y = \vartheta x$, H son image par la projection π et \tilde{H} la saturation de H_0 , c'est-à-dire :

$$\tilde{H} = \pi^{-1}(\pi(H_0)).$$

Démontrer que \tilde{H} est dense dans \mathbf{R}^2 et en déduire que H est dense dans G . Le groupe quotient G/H est-il séparé ?

4. On considère le sous-groupe \mathbf{Q} de \mathbf{R} muni de la topologie métrique induite.
 (a) Démontrer que \mathbf{Q} n'est pas discret.
 (b) Démontrer que la composante connexe de l'élément neutre 0 est $\{0\}$.