Université Lyon 1 – 2013-2014
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 3 – Groupes topologiques et groupes classiques

Exercice 1 (Caractérisation locale d'un groupe topologique) — Soit G un groupe.

1. Dans cette question, on suppose que G est muni d'une topologie qui en fait un groupe topologique. On désigne par $\mathcal{V}(1)$ l'ensemble des voisinages de 1. Démontrer que les cinq conditions suivantes sont vérifiées :

(i) toute partie de G contenant un élément de $\mathcal{V}(1)$ appartient à $\mathcal{V}(1)$;

(ii) $\mathcal{V}(1)$ est stable par intersections finies ;

(iii) pour tout $\mathrm{V} \in \mathcal{V}(1)$, il existe $\mathrm{W} \in \mathcal{V}(1)$ tel que $\mathrm{W}^2 \subset \mathrm{V}$;

(iv) $\mathcal{V}(1)$ est stable sous la bijection

$$\mathcal{P}(\mathrm{G}) \to \mathcal{P}(\mathrm{G}), \quad \mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}^{-1} \ ;$$

(v) pour tout $g \in \mathrm{G}$, $\mathcal{V}(1)$ est stable sous la bijection

$$\mathcal{P}(\mathrm{G}) \to \mathcal{P}(\mathrm{G}), \quad \mathrm{V} \mapsto g\mathrm{V}g^{-1}.$$

Démontrer en outre que si G est séparé, alors :

(vi) $\bigcap_{\mathrm{V} \in \mathcal{V}(1)} \mathrm{V} = \{1\}$.

2. Réciproquement, supposons que $\mathcal{V}(1)$ soit un ensemble de parties de G satisfaisant aux conditions (i)-(v) ci-dessus. Démontrer qu'il existe une et une seule topologie sur G qui en fasse un groupe topologique et pour laquelle $\mathcal{V}(1)$ soit l'ensemble des voisinages de 1. De plus, si $\mathcal{V}(1)$ vérifie la condition (vi), démontrer que cette topologie est alors séparée.

Exercice 2 (Connexité de SL_n) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Démontrer que toute matrice de transvection se déforme continuement sur I_n dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.
2. En déduire que le groupe topologique $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est connexe (par arcs). (*Indication* : utiliser l'exercice 4 de la fiche 1).

Exercice 3 (Groupes classiques compacts) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Démontrer que les groupes topologiques $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont compacts.

Exercice 4 (Connexité) — Soit G un groupe topologique séparé et soit H un sous-groupe fermé.

1. Démontrer qu'un espace topologique X est connexe si et seulement si, pour tous ouverts non vides $\mathrm{U}, \mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ tels que $\mathrm{X} = \mathrm{U} \cup \mathrm{V}$, l'intersection $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est non vide.
2. Démontrer que, si H et G/H sont connexes, alors G est connexe. L'assertion réciproque est-elle vraie ?
3. En guise d'application, démontrer que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+ = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \ \mid \ \det(\mathrm{A}) > 0\}$$

est la composante connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant l'identité (la *composante neutre*).

Exercice 5 (Connexité des groupes orthogonaux et unitaires) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. On considère l'action naturelle des groupes $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n$.

1. Déterminer le stabilisateur et l'orbite du premier vecteur de la base canonique.
2. Supposons $n \geqslant 2$. Démontrer que la sphère unité

$$\mathbf{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

   est connexe. (*Indication* : on pourra raisonner sur des hémisphères).
3. Déduire de ce qui précède que $\mathbf{S}^{n-1}$ est homéomorphe à l'espace homogène $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbf{R})$, puis que le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe pour tout $n \geqslant 1$. (*Indication* : raisonner par récurrence sur n en utilisant l'exercice 2).
4. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.
5. Adapter ce raisonnement pour démontrer que les groupes $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SU}_n(\mathbf{C})$ sont connexes.

Exercice 6 (Groupes linéaires/orthogonaux et produit semi-direct) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct topologique de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ par $\mathbf{R}^\times$. Idem sur $\mathbf{C}$.
2. Démontrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est isomorphe à un produit semi-direct topologique de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Pour quelles valeurs de n ce produit est-il direct (c'est-à-dire isomorphe au produit direct des deux groupes) ?

Exercice 7* (Exponentielle) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère l'application exponentielle

$$\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{K}), \quad \mathrm{A} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{A}^n.$$

1. Justifier soigneusement le bien-fondé de cette définition.
2. Démontrer que si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ sont deux matrices qui commutent, alors $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.
3. En utilisant la série entière du logarithme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{A}^n}{n}$, démontrer que l'image de exp contient un voisinage de I_n.
4. Si $n = 1$, en déduire : $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$. Peut-on faire le même raisonnement lorsque $n \geqslant 2$?
5. Démontrer que exp induit un homéomorphisme entre les (sous-)espaces topologiques

$$\mathrm{Nilp}_n(\mathbf{K}) = \{\mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \mid \mathrm{N} \text{ est nilpotent}\} \ \text{ et } \ \mathrm{Unip}_n(\mathbf{K}) = \{\mathrm{U} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \mid \mathrm{U} \text{ est unipotent}\}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, on va prouver la surjectivité de l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ en adaptant le raisonnement de la question 4. Plus précisément, on se propose de démontrer le théorème suivant :

pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$*, il existe une matrice* $\mathrm{B} \in \mathbf{C}[\mathrm{A}]$ *telle que* $\mathrm{A} = \exp(\mathrm{B})$.

Rappelons tout d'abord la *décomposition de Dunford-Jordan* :

(a) Version *additive* : pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, il existe une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N dans $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$.

(m) Version *multiplicative* : si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, alors $\mathrm{D} \in \mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times = \mathbf{C}[\mathrm{A}] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, la matrice $\mathrm{U} = \mathrm{I}_n + \mathrm{D}^{-1}\mathrm{N} \in \mathbf{C}[\mathrm{A}]$ est unipotente et $\mathrm{A} = \mathrm{DU}$.

6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Avec les notations ci-dessus, démontrer que $\exp(\mathrm{N})$, $\exp(\mathrm{D})$ et donc $\exp(\mathrm{A})$ appartiennent à $\mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times$. (*Indication* : c'est facile pour $\exp(\mathrm{N})$. Pour $\exp(\mathrm{D})$, écrire $\mathrm{D} = \mathrm{Q}\,\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)\,\mathrm{Q}^{-1}$ et utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange P tel que $\mathrm{P}(d_i) = e^{d_i}$ pour tout i pour obtenir $\exp(\mathrm{D}) \in \mathbf{C}[\mathrm{D}]$).

7. De manière analogue, démontrer que, si A est suffisamment proche de l'identité, alors $\log(\mathrm{A})$ est bien défini et appartient à $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$.

Fixons maintenant $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On munit $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$ et $\mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times$ des topologies induites par celle de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

8. Démontrer que $\mathbf{C}[\mathrm{A}]$ et $\mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times$ sont des groupes topologiques connexes.
9. Démontrer que l'exponentielle induit un homomorphisme de groupes $\mathbf{C}[\mathrm{A}] \to \mathbf{C}[\mathrm{A}]^\times$ dont l'image contient un voisinage de 1, puis conclure.

Sur les réels, la situation est moins favorable.*

10. Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, démontrer que $\mathrm{Sp}(\exp(\mathrm{A})) = \exp(\mathrm{Sp}(\mathrm{A}))$ (*Indication* : trigonaliser A sur $\mathbf{C}$). En déduire que la matrice $\mathrm{diag}(-1,-2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})_+$ n'est pas une exponentielle réelle.
11. En utilisant l'exercice 9 de la fiche 2, démontrer cependant que toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ est un produit d'exponentielles réelles.

Exercice 8* (Sous-groupes abéliens compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$) — Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. On commence par considérer une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ soit *bornée* et on prouve que A est diagonalisable.

1. Démontrer que toutes les valeurs propres de A sont des nombres complexes de module 1.
2. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{DU}$ la décomposition de Dunford-Jordan multiplicative de A (cf. exercice 7). Démontrer que les suites $(\mathrm{D}^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $(\mathrm{U}^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sont bornées.
3. L'objectif est maintenant de prouver que $\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$. Par trigonalisation, on peut supposer que U appartient au sous-groupe unipotent standard $\mathrm{U}(\mathbf{C})$ des matrices triangulaires supérieures à diagonale unité.
   (i) Exhiber une suite de composition
   $$1 = \mathrm{U}_0 \lhd \mathrm{U}_1 \lhd \ldots \lhd \mathrm{U}_{n-2} \lhd \mathrm{U}_{n-1} = \mathrm{U}(\mathbf{C})$$
   telle que l'on ait un isomorphisme de groupes topologiques $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i-1} \simeq (\mathbf{C},+)^i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n-1\}$.
   (ii) En raisonnant par induction descendante, démontrer que $\mathrm{U} \in \mathrm{U}_i$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, c'est-à-dire $\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$.

En guise d'application de ce qui précède, démontrer que tout sous-groupe compact abélien K de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est, à conjugaison près, contenu dans le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients (non nuls) de module 1.

Exercice 9* (Groupe de Heisenberg) — Soit n un entier naturel non nul. On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+2}(\mathbf{R})$ formé des matrices de la forme

$$[x,y,z] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & \ddots & 0 & 0 & y_1 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & (0) & & \ddots & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n,\ y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R}^n,\ z \in \mathbf{R}.$$

1. Calculer le produit $[x,y,z][x',y',z']$ de deux éléments de G.
2. Quel est le centre Z de G ? Montrer que G/Z est isomorphe à $\mathbf{R}^{2n}$ comme groupe topologique.
3. Le groupe G est-il isomorphe au produit semi-direct de $\mathbf{R}^{2n}$ par Z ?