Université Lyon 1 – 2013-2014
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 6 — Décomposition polaire

Exercice 1 (Exponentielle réelle) — On désigne par $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices antisymétriques.

1. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, démontrer que le spectre de $\exp(\mathrm{A})$ est $\{e^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\}$.
1. En déduire que la matrice $\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle (*indication* : sinon, voir que M_0 serait diagonalisable sur $\mathbf{C}$).
2. Démontrer l'identité
$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$
pour tout $\vartheta \in \mathbf{R}$.
3. À l'aide de l'exercice 1 de la fiche 4, en déduire que l'exponentielle induit par restriction une application surjective
$$\exp : \mathrm{A}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}(n).$$
4. Démontrer que toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})_+$ s'écrit comme le produit de deux exponentielles réelles.

Exercice 2 (Maximalité du groupe orthogonal parmi les groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$) — Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant $\mathrm{O}(n)$. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$.

1. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ la décomposition polaire de A, i.e. $\mathrm{O} \in \mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}$. Démontrer que :
$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \mathrm{S}^k \in \mathrm{G}.$$
2. En déduire que 1 est l'unique valeur propre de S (utiliser une norme sur $\mathbf{R}^n$).
3. En déduire $\mathrm{G} = \mathrm{O}(n)$.

Exercice 3 (Réduction des endomorphismes hermitiens) — Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$ un endomorphisme auto-adjoint :
$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

1. Démontrer qu'il existe une droite W dans E telle que $f(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W}$ et $f(\mathrm{W}^\perp) \subset \mathrm{W}^\perp$.
2. En déduire que toute matrice hermitienne est $\mathrm{U}(n)$-diagonalisable.

Soit H_n (resp. H_n^{++}) le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ formé des matrices hermitiennes (resp. hermitiennes définies positives).

3. En adaptant la preuve du cours pour les matrices symétriques réelles, démontrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre H_n et H_n^{++}.
4. En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, l'application
$$\mathrm{H}_n^{++} \longrightarrow \mathrm{H}_n^{++}, \quad \mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}^k$$
est un homéomorphisme.

Exercice 4 (Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$) — D'après l'exercice précédent, l'application exponentielle réalise un homéomorphisme de H_n sur H_n^{++}. On désigne par $\ell : \mathrm{H}_n^{++} \to \mathrm{H}_n$ l'homéomorphisme réciproque.

1. Démontrer que les applications

$$\mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}, \quad (\mathrm{U}, \mathrm{H}) \longmapsto \mathrm{UH}$$

et

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n, \quad \mathrm{M} \longmapsto \left(\mathrm{M}e^{-\frac{1}{2}\ell({}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})}, \frac{1}{2}\ell({}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})\right)$$

sont des homéomorphismes bien définis et réciproques l'un de l'autre.

2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbf{R}^{n^2}$.
3. En adaptant le raisonnement de l'exercice 7, démontrer que $\mathrm{U}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 5 (Décomposition polaire des groupes classiques) — Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On suppose que G est stable sous l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^* = {}^t\overline{\mathrm{M}}$ et que $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}_n^{++}$ est stable par passage à la racine carrée (cf. exercice 3, question 4).

Démontrer que l'application naturelle $(\mathrm{G} \cap \mathrm{U}(n)) \times (\mathrm{G} \cap \mathrm{H}_n^{++}) \longrightarrow \mathrm{G}$ est un homéomorphisme.

Exercice 6 (Décomposition polaire des groupes classiques, suite) — Soit $\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice telle que $\mathrm{J}^2 = \pm \mathrm{I}_n$. On pose

$$\mathrm{G} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \mid \mathrm{M}^*\mathrm{JM} = \mathrm{J}\}.$$

1. Démontrer que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
2. Démontrer l'identité

$$\mathrm{M}^*\mathrm{JMJM}^* = \mathrm{M}^*\mathrm{J}^2$$

pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$. En déduire que G est stable sous l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^*$.

3. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{G} \cap \mathrm{H}_n^{++}$.
   (i) Démontrer qu'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\sqrt{\mathrm{M}} = \mathrm{P}(\mathrm{M})$ et $\sqrt{\mathrm{M}}^{\,-1} = \mathrm{P}(\mathrm{M}^{-1})$.
   (ii) En déduire que $\sqrt{\mathrm{M}}$ appartient à $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}_n^{++}$.
4. En adaptant le raisonnement de l'exercice 2 démontrer que $\mathrm{G} \cap \mathrm{U}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de G.

Exercice 7 (Décomposition polaire des groupes classiques, fin) — La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On reprend les notations et les hypothèses de l'exercice précédent et on pose par ailleurs

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{K}} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \quad \exp(t\mathrm{M}) \in \mathrm{G}\}.$$

1. Démontrer que $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $\mathrm{M}^*\mathrm{J} + \mathrm{JM} = 0$; en particulier, il s'agit d'un sous-espace vectoriel *réel* de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Expliciter $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ lorsque $\mathrm{J} = \mathrm{I}_n$.
3. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{G} \cap \mathrm{H}_n^{++}$. D'après l'exercice 3, il existe une unique matrice $\mathrm{N} \in \mathrm{H}_n$ telle que $\mathrm{M} = \exp(\mathrm{N})$.
   (i) Démontrer que $\exp(t\mathrm{N})$ appartient à G pour tout nombre rationnel t dont le dénominateur est une puissance de 2 (*indication* : utiliser le fait que l'application $\mathrm{H} \mapsto \sqrt{\mathrm{H}}$ de H_n^{++} dans lui-même stabilise $\mathrm{G} \cap \mathrm{H}_n^{++}$ (exercice 5, question 4 (ii))).
   (ii) En déduire que l'exponentielle induit un homéomorphisme $\mathfrak{g} \cap \mathrm{H}_n \longrightarrow \mathrm{G} \cap \mathrm{H}_n^{++}$.
4. Démontrer que G est homéomorphe à $(\mathrm{G} \cap \mathrm{U}(n)) \times \mathbf{R}^d$, où $d = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}$.

Exercice 8 (Groupes unitaires) — On considère la matrice $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{pmatrix}$ (avec $p+q=n$) et on pose

$$\mathrm{U}(p,q) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \mid \mathrm{M}^*\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}\}$$

et

$$\mathfrak{u}(p,q) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \mid \forall t \in \mathbf{R},\ \exp(t\mathrm{M}) \in \mathrm{U}(p,q)\}.$$

1. Expliciter $\mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{u}(p,q)$.
2. En déduire un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels $\mathfrak{u}(p,q) \cap \mathrm{H}_n \simeq \mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{C})$ puis un homéomorphisme $\mathrm{U}(p,q) \simeq \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \times \mathbf{R}^{2pq}$.
3. En déduire que le groupe $\mathrm{U}(p,q)$ est connexe.

Exercice 9 (Groupes orthogonaux) — On pose

$$\mathrm{O}(p,q) = \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{o}(p,q) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R},\ \ \exp(t\mathrm{M}) \in \mathrm{O}(p,q)\}.$$

1. Expliciter $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{o}(p,q)$.
2. En déduire un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels $\mathfrak{o}(p,q) \cap \mathrm{H}_n \simeq \mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, puis un homéomorphisme $\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}$.
3. Supposons $p, q \geqslant 1$ et écrivons les éléments de $\mathrm{O}(p,q)$ sous la forme de matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \ \ \mathrm{A} \in \mathrm{M}_p(\mathbf{R}),\ \mathrm{D} \in \mathrm{M}_q(\mathbf{R}),\ \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{R}) \text{ et } \mathrm{C} \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbf{R}).$$

(i) Vérifier que l'on a ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = {}^t\mathrm{C}\mathrm{C} + \mathrm{I}_p$ et en déduire que la matrice symétrique ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est définie positive, d'où $\det \mathrm{A} \neq 0$. Démontrer de même que l'on a $\det \mathrm{D} \neq 0$.

(ii) On pose $\sigma(x) = x/|x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$. Démontrer que l'application

$$\lambda : \mathrm{O}(p,q) \longrightarrow \{\pm 1\}^2, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \longmapsto (\sigma(\det \mathrm{A}), \sigma(\det \mathrm{D}))$$

est continue et surjective, et que ses fibres sont les composantes connexes de $\mathrm{O}(p,q)$.

(iii) Démontrer que λ est un homomorphisme de groupes (*indication* : écrire les composantes connexes comme des classes modulo la composante neutre).

(iv) Démontrer que $\mathrm{O}(p,q)$ est un produit semi-direct de sa composante neutre par $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Exercice 10 (Groupe symplectique réel) — On considère maintenant la matrice $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$ et on pose

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{R}) \mid {}^t\mathrm{M}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}\}, \quad \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbf{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R},\ \ \exp(t\mathrm{M}) \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R})\}.$$

1. Démontrer que l'application

$$\mathrm{U}(n) \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R}), \quad \mathrm{A} + i\mathrm{B} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$$

   est bien définie et induit un isomorphisme de groupes topologiques $\mathrm{U}(n) \simeq \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R}) \cap \mathrm{U}(2n)$.
2. Démontrer que $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbf{R}) \cap \mathrm{H}_n$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathrm{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ des couples de matrices réelles symétriques.
3. En déduire que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbf{R}^{n(n-1)}$, puis que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ est un sous-groupe connexe de $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbf{R})$.