Université Lyon 1 – 2013-2014
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 7 — Comptage sur les corps finis

Exercice 1 (Isomorphismes exceptionnels) — 1. Construire des isomorphismes

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\mathrm{G} \leqslant \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe d'indice n. On se propose de démontrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

(i) Étudier directement le cas $n \leqslant 4$.

(ii) Supposons $n \geqslant 5$ et soit $\mathrm{X} = \mathfrak{S}_n/\mathrm{G}$. Démontrer que l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur X par translations fournit un isomorphisme $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{S}(\mathrm{X})$ identifiant G au stabilisateur d'un point de X. Conclure.

(iii) Construire des isomorphismes

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5 \quad \text{et} \quad \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5.$$

3. Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif quelconque.

(i) Démontrer que le déterminant induit un homomorphisme de groupes

$$\delta : \mathrm{PGL}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^n$$

où $(\mathbf{K}^\times)^n$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{K}^\times$ formé des puissances n-ièmes.

(ii) En déduire une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{PSL}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathrm{PGL}_n(\mathbf{K}) \xrightarrow{\delta} \mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^n \longrightarrow 1\,.$$

3. Supposons que le corps $\mathbf{K}$ soit fini, de caractéristique p. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{K}) \simeq \mathrm{PGL}_n(\mathbf{K})$

(ii) $\mathrm{pgcd}(n, q-1) = 1$.

Exercice 2 (Cône nilpotent sur un corps fini) — Soit $\mathbf{K}$ un corps fini à q éléments et soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_3(\mathbf{K})$. On se propose de calculer le cardinal de $\mathcal{N}$ en exploitant l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{K})$ par conjugaison sur $\mathcal{N}$.

1. Décrire les orbites de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{N}$.

2. Pour chacune de ces orbites, expliciter le stabilisateur d'un élément bien choisi. En déduire le cardinal de chaque orbite.

3. En déduire le cardinal de $\mathcal{N}$.

Exercice 3 (Décomposition cellulaire des grassmanniennes et q-binôme) — Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et soit $0 \leqslant p \leqslant n$ deux entiers. On rappelle que la *grassmannienne* des p-plans dans $\mathbf{K}^n$ est l'ensemble $\mathbf{Gr}_{p,n}(\mathbf{K})$ des sous-espaces vectoriels de dimension p dans $\mathbf{K}^n$.

1. On fait agir $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ sur l'espace $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ par multiplication à droite.

(i) Décrire cette action en termes d'opérations matricielles élémentaires.

(ii) Étant donné $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, notons $\mathrm{V}(\mathrm{A})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ engendré par les colonnes de A. Démontrer que l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{V}(\mathrm{A})$ induit une bijection

$$\{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \mid \mathrm{rg}\ (\mathrm{A}) = p\} / \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}) \tilde{\to} \mathbf{Gr}_{p,n}(\mathbf{K}).$$

(iii) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice de rang p. Démontrer que l'orbite de A contient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & & & * \\ \vdots & & & & \\ * & * & & & * \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & * & & & * \\ & * & & & * \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & * \\ & & & & * \\ & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

où les 1 apparaissent aux lignes $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ et sont suivis dans leur ligne et leur colonne par des 0, et où les $*$ représentent des scalaires quelconques.

(iv) Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, soit V_i le sous-espace de $\mathbf{K}^n$ engendré par les i premiers vecteurs de la base canonique. Avec les notations précédentes, démontrer que les entiers $i_1 < \ldots < i_p$ sont précisément les valeurs de i telles que

$$\dim\ (\mathrm{V}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{V}_i) < \dim\ (\mathrm{V}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{V}_{i-1}).$$

(v) Déduire de ce qui précède que, dans la question (iii) ci-dessus, chaque orbite contient une unique matrice de la forme considérée.

2. Déduire de ce qui précède que $\mathbf{Gr}_{p,n}(\mathbf{K})$ est la réunion de parties deux à deux disjointes $\mathbf{Gr}^{\mathrm{I}}(\mathbf{K})$, indexées par l'ensemble des parties à p éléments $\mathrm{I} \subset \{1, \ldots, n\}$ et telles que

$$\mathbf{Gr}^{\mathrm{I}}(\mathbf{K}) \simeq \mathbf{K}^{d_{\mathrm{I}}},$$

où

$$d_{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{p} (i_j - j)$$

si $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ sont les éléments de I.

3. On suppose maintenant que $\mathbf{K}$ est un corps fini de cardinal q.

(i) Expliciter le cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et du stabilisateur d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ de dimension p.

(ii) Déduire de ce qui précède l'identité suivante :

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-p+1} - 1)}{(q^p - 1)(q^{p-1} - 1) \cdots (q - 1)} = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} q^{(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_p - p)}.$$

(iii) Justifier que cette expression est valable lorsque q est considéré comme une indéterminée.

(iv) On fixe une autre indéterminée t. Démontrer la formule du q-binôme de Newton :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + q^i t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}_q q^{j(j+1)/2}\, t^j, \quad \text{où } \binom{n}{j}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-j+1} - 1)}{(q^j - 1)(q^{j-1} - 1) \cdots (q - 1)}.$$

(v) Prendre q réel ou complexe et le faire tendre vers 1 dans la formule précédente. Justifier ainsi les notations et la dénomination.