Ecole Normale Supérieure de Lyon Laboratoire de Physique

Habilitation à diriger des Recherches

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Polymères en milieu aléatoire : Localisation, Phénomènes critiques et Critère de Harris

Fabio TONINELLI

Soutenue publiquement le 18 mai 2010, devant le jury composé de :

rapporteur
rapporteur
rapporteur
Lyon
Lyon
]

A Petra e Silvia

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes collaborateurs les plus directs : Bernard Derrida, Giambattista Giacomin et Hubert Lacoin. Je travaille avec eux avec le plus grand plaisir, et j'apprécie profondément leurs qualités à la fois humaines et scientifiques. Les discussions que nous avons eu ensemble m'ont toujours fait découvrir des nouveaux points de vue sur la mécanique statistique et sur les probabilités.

Je tiens aussi à remercier d'autres collègues avec lesquels j'ai eu des échanges scientifique très importants sur les sujets de ce travail : Ken Alexander, Thierry Bodineau, Erwin Bolthausen, Francesco Caravenna, Frank den Hollander, Krzysztof Gawedzki et Massimiliano Gubinelli.

Je suis très reconnaissant aux rapporteurs et aux membres du jury, pour avoir bien voulu consacrer une partie de leur temps à lire ce manuscript, et pour avoir accepté de venir à Lyon en occasion de ma soutenance.

Je ne veux pas oublier, dans ces remerciements, les membres de l'équipe de Physique Théorique et, plus en général, du Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, qui m'ont accueilli dans un milieu à la fois excellent du point de vue scientifique et agréable du point de vue humain. Un grand merci en particulier à François Delduc pour son aide précieux pendant la redaction de ce mémoire.

Finalement, je remercie sincèrement le CNRS pour m'avoir recruté et m'avoir donné la chance de poursuivre mes recherches en pleine liberté et dans des conditions aussi favorables.

RÉSUMÉ

L'objet de ce mémoire, rédigé afin d'être habilité à diriger des recherches, est de présenter mes travaux de recherche dans le domaine des *polymères en interaction avec un milieu aléatoire*. J'ai commencé à m'intéresser à ce sujet en 2004, après quelques années passées à m'occuper de verres de spin, un autre domaine la mécanique statistique des systèmes désordonnés. Introduits à l'origine en physique et bio-physique afin de donner une description simple de certains phénomènes de localisation de polymères et interfaces (voir le Chapitre 1), ces modèles ont bientôt attiré l'intérêt de la communauté de la physique mathématique et des probabilités, grâce à leurs connexions multiples avec la théorie des marches aléatoires en milieu aléatoire, des interfaces aléatoires, des processus de renouvellement, etc.

Le prototype des modèles que je vais traiter dans ce travail est le modèle d'accrochage désordonné, qui décrit un polymère dirigé en interaction, via un potentiel aléatoire, avec un défaut unidimensionnel (les définitions précises seront données dans le Chapitre 2). Ce modèle présente une transition de phase, dite de localisation, dont on va étudier le propriétés.

L'intérêt principal de ce modèle (du moins, pour moi personnellement) est qu'il représente un cadre idéal pour étudier la question de l'effet du désordre gelé (quenched disorder en anglais) sur les propriétés critiques d'une transition de phase. Il s'agit d'une question très naturelle également dans l'étude d'autres systèmes désordonnés, comme par exemple le modèle d'Ising avec couplages ferromagnétiques aléatoires. Les travaux de physique théorique font souvent appel à un critère dit "de Harris", qui est censé donner des prédictions correctes dans plusieurs situations. Les arguments mathématiques en support de ces prédictions, par contre, sont très rares, et à notre connaissance notre étude du modèle d'accrochage désordonné constitue le premier exemple où on arrive à justifier pleinement le critère de Harris (cas de désordre pertinent, de désordre non pertinent et de désordre marginal).

Le partie centrale de ce mémoire est le Chapitre 3, où je présenterai les résultats principaux que l'on a obtenu concernant l'effet du désordre sur les propriétés critiques : (1) la preuve qu'en présence de désordre la transition est toujours du deuxième ordre, en contraste avec le cas homogène où elle peut être du premier ordre (travaux avec G. Giacomin [53, 54]) et (2) une réponse assez complète à la question de savoir quand le désordre a comme effet de décaler le point critique annealed (travaux avec B. Derrida, G. Giacomin et H. Lacoin [48, 35, 49, 50]). Comme on le verra, nos résultats ont permis aussi de résoudre certaines controverses qui existaient dans la littérature physique (ordre de la transition pour le modèle de Poland-Scheraga de dénaturation de l'ADN, pertinence du désordre pour le modèle d'accrochage en dimension (1 + 1)). Globalement, ces résultats d'un côté constituent une preuve mathématique des prédictions basées sur le critère de Harris, et d'autre part vont bien au delà, puisque nous arrivons aussi à résoudre le cas de la dimension "marginale" où ce critère, au moins dans sa version la plus naïve, ne donne aucune prédiction.

Dans le Chapitre 4, on changera un peu de perspective et, au lieu de s'intéresser au comportement de l'énergie libre près du point critique, on se penchera plutôt sur les propriétés trajectorielles dans les différents régimes (localisé, délocalisé, critique). Le résultat le plus marquant ici est que, dans la phase localisée, il y a au plus de l'ordre de $\log N$ contacts entre le polymère et le défaut, N étant la taille du système (travail avec G. Giacomin [51]), tandis que précédemment tout ce que l'on savait montrer était que ce nombre est beaucoup plus petit que N [15].

Le Chapitre 5 se situe un peu à part au niveau des questions abordées et des techniques mathématiques utilisées : ici, on se pose la question de savoir quelles sont les conséquences dynamiques de la transition de localisation. Pour cela, on oublie le désordre et on se concentre sur un modèle homogène (i.e. avec interactions déterministes), qui pose déjà suffisamment de défis. Le résultat principal, obtenu avec P. Caputo et F. Martinelli [23], est l'identification d'une transition de phase dynamique, où la dépendance du temps d'équilibration comme fonction de la taille du système change qualitativement. Cette étude se situe dans le contexte plus général de l'étude de la relaxation à l'équilibre pour les chaînes de Markov réversibles [69], et dans notre travail nous avons dû surmonter de nouvelles difficultés, à la fois conceptuelles et techniques, par rapport au cas beaucoup plus standard de la dynamique de Glauber pour des modèles de spin.

Finalement, dans le Chapitre 6 je montrerai que les méthodes que nous avons développées pour le modèle d'accrochage sont suffisamment puissantes pour s'adapter à d'autres modèles de polymères avec interactions aléatoires. En particulier, on verra que notre méthode de moments fractionnaires/changement de mesure permet de montrer que pour le "polymère dirigé en milieu aléatoire" en dimension (2 + 1) le désordre est "toujours fort" (travail de H. Lacoin [66]) et de résoudre la question du rapport entre les points critiques quenched et annealed, à la fois pour le "modèle d'accrochage sur une marche aléatoire" (travaux de Birkner-Sun [13] et de mon étudiant Q. Berger avec moi-même [9]) et pour les "hétéropolymères à proximité d'une interface sélective" (travaux de différents auteurs, moi compris [18, 78, 80]).

En annexe, le lecteur peut trouver certains des articles où j'ai publié les résultats qui sont présentés dans ce mémoire.

Les techniques mathématiques que l'on a dû employer pour obtenir les résultats illustrés dans ce mémoire sont assez diverses et vont (pour donner quelques exemples) de la théorie du renouvellement, à celle des grandes déviations, à des méthodes de couplage pour les chaînes de Markov et de concentration de la mesure. Cette étude a donc été pour moi aussi une occasion parfaite pour élargir mes horizons et connaissances scientifiques, à la fois dans le domaine des probabilités et de la mécanique statistique.

Table des matières

1	INT	FRODUCTION ET MOTIVATIONS	1
	1.1	Quelques exemples de transition de localisation	1
		1.1.1 Transition "de mouillage" pour Ising 2D	1
		1.1.2 Transition de dénaturation de l'ADN	3
		1.1.3 Accrochage d'un polymère sur un défaut	4
		1.1.4 Quels éléments communs?	5
	1.2	Mise en perspective	5
2	MC	DDÈLE D'ACCROCHAGE DÉSORDONNÉ	9
	2.1	Un exemple intuitif : accrochage d'un polymère en dimension $(1 + d)$	9
		2.1.1 Un autre modèle très populaire : mouillage en dimension $(1+1)$	11
	2.2	Généralisation : un point de vue de théorie du renouvellement	12
		2.2.1 Hypothèses sur la loi du désordre	15
	2.3	Energie libre, point critique et transition de localisation	16
		2.3.1 Modèle d'accrochage "annealed"	17
	2.4	Etude du modèle d'accrochage homogène	18
	2.5	Modèle hiérarchique d'accrochage	20
	2.6	Les questions que l'on se pose	23
3	PE	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS"	25
3	PE 3.1	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	$25 \\ 25$
3	PE 3.1	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris 3.1.1 Un autre argument heuristique, et une longue controverse	25 25 28
3	PE 3.1 3.2	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 25 28 29
3	PE 3.1 3.2	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 25 28 29 31
3	 PE 3.1 3.2 3.3 	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	 25 25 28 29 31
3	PE: 3.1 3.2 3.3	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 25 28 29 31 33
3	 PE2 3.1 3.2 3.3 3.4 	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 28 29 31 33 36 26
3	PE 3.1 3.2 3.3 3.4	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris 3.1.1 Un autre argument heuristique, et une longue controverse 3.1.1 Discontinuité de l'exposant critique pour $\alpha > 1/2$ 3.2.1 Un argument de grandes déviations 3.2.1 La région de désordre fort : comment faire mieux de Jensen sans trop se fatiguer 3.2.1 Décalage ou non du point critique par un désordre arbitrairement faible? 3.4.1 Le cas du désordre "non pertinent" 3.4.2	25 28 29 31 33 36 36 30
3	PE : 3.1 3.2 3.3 3.4	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 25 28 29 31 33 36 36 39 40
3	 PE: 3.1 3.2 3.3 3.4 	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	 25 25 28 29 31 33 36 36 39 40 41
3	PE : 3.1 3.2 3.3 3.4	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS"L'argument heuristique de Harris3.1.1Un autre argument heuristique, et une longue controverseDiscontinuité de l'exposant critique pour $\alpha > 1/2$ 3.2.1Un argument de grandes déviationsLa région de désordre fort : comment faire mieux de Jensen sans trop sefatiguerDécalage ou non du point critique par un désordre arbitrairement faible ?3.4.1Le cas du désordre "non pertinent"3.4.2Le cas du désordre "marginal"3.4.4 $\alpha \ge 1/2$: un argument de changement de mesure	 25 25 28 29 31 33 36 36 39 40 41
3	PE: 3.1 3.2 3.3 3.4 PR	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 28 29 31 33 36 36 39 40 41 47
3	PE: 3.1 3.2 3.3 3.4 PR 4.1	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 28 29 31 33 36 36 39 40 41 47
3	PE: 3.1 3.2 3.3 3.4 PR 4.1 4.2	RTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS" L'argument heuristique de Harris	25 28 29 31 33 36 36 36 39 40 41 47 47 49

5	CONSÉQUENCES DYNAMIQUES DE LA TRANSITION DE LO-	
	CALISATION	55

6

5.1	Transi	tion de phase dynamique pour un modèle d'accrochage homogène	56
	5.1.1	Une dynamique effective unidimensionnelle	58
EX	TENS	IONS ET PERSPECTIVES	63
6.1	Hétére	poplymères à l'interface entre deux solvants (copolymères)	63
	6.1.1	Quel rapport avec le modèle d'accrochage?	67
	6.1.2	Universalité et comportement à faible désordre	68
	6.1.3	Bornes inférieures : à la recherche d'une bonne "stratégie"	69
6.2	D'aut	res modèles de polymères en milieu aléatoire	70
	6.2.1	Polymères dirigés en milieu aléatoire	70
	6.2.2	Modèle d'accrochage <i>sur</i> une marche aléatoire	71

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

1

Ce chapitre veut servir de motivation au sujet de ce mémoire. La façon la plus facile de justifier l'étude du modèle d'accrochage désordonné est de montrer qu'un certain nombre de transitions de phases très intéressantes, qui ont lieu dans des situations physiques assez diverses, peuvent être décrites dans ce même cadre. C'est ce que je ferai dans la Section 1.1. Par contre, la vraie raison qui m'a poussé à dédier plusieurs années à l'étude de ce modèle a très peu à faire avec les applications concrètes décrites dans la Section 1.1, et est à chercher plutôt dans le désir de comprendre, dans un contexte bien défini, certaines questions générales liées au groupe de renormalisation pour des systèmes désordonnés. J'essayerai de clarifier ce point dans la Section 1.2.

1.1 Quelques exemples de transition de localisation

Nous allons décrire ici quelques exemples de phénomènes physiques qui peuvent être décrits, moyennant un certain nombre d'approximations, par le modèle d'accrochage désordonné qui sera introduit avec toutes le définitions nécessaires dans le chapitre suivant. Nous renvoyons aux références [40], [41] et [47, Chap. 1] pour plus de détails et d'exemples.

1.1.1 Transition "de mouillage" pour Ising 2D

Considérons un système bidimensionnel à un point de transition de phase du premier ordre, e.g. le modèle d'Ising en dimension d = 2 à champ magnétique nul et $T < T_c$, ou bien un système liquide-gaz (toujours en d = 2) pour des valeurs de température et de pression qui se trouvent sur la ligne de coexistence des phases. Pour fixer les idées, on gardera en tête l'exemple d'Ising. Supposons que le système soit enfermé dans un domaine carré de taille N, avec des conditions au bord qui imposent une des deux phases le long de la base du carré, et l'autre phase le long des trois autres côtés. Par exemple, pour le modèle d'Ising on peut imposer des conditions au bord + le long de la base et - sur le reste du bord. Dans cette situation, il y a nécessairement une interface qui sépare les deux phases dans le domaine, et qui relie les deux extrémités de la base, cf. Figure 1.1 (a).

À très basse température, il est raisonnable de décrire l'interface comme une marche aléatoire symétrique conditionnée à être non-négative, où la contrainte de non-négativité ("hard wall constraint") est simplement due au fait évident que l'interface ne peut pas sortir du système, cf. Figure 1.1 (b). On parlera d'approximation de *interface effective*. Une situation très intéressante se présente si le long de la base les spins sont soumis à des



Séquence des champs aléatoires

FIGURE 1.1. Une vision schématique de la coexistence de phases avec la ligne de séparation (dessin (a)). Si on néglige la présence de "surplombs" (dessin (b)), l'interface peut être vue comme la trajectoire d'une marche aléatoire contrainte à être positive et à revenir en zéro au temps N, ou comme un polymère dirigé en dimension 1 + 1 en présence d'un mur. L'approximation de marche aléatoire est qualitativement bonne à basse température, puisque les "surplombs" entraînent un excès d'énergie d'interface. Les points de contact interface/paroi, ordonnés de la gauche vers la droite, sont appelés τ_0, τ_1, \ldots

champs magnétiques aléatoires (paroi désordonnée) : l'interface, et donc la phase "moins", aura tendance à toucher la paroi aux points *i* où le champ magnétique h_i est négatif et sera par contre repoussée par les points où $h_i > 0$. Si globalement les champs magnétiques sont suffisamment négatifs, l'interface colle à la paroi (on dira dans ce cas que l'on se trouve dans phase localisée, ou phase sèche); dans le cas contraire, elle resta à une distance diffusive d'ordre \sqrt{N} de la paroi (phase délocalisée ou mouillée). La nomenclature phase sèche/mouillée devient claire dans l'exemple du système liquide-gaz, où la phase mouillée correspond à la situation où la paroi est recouverte par une couche macroscopique de liquide, et la phase sèche au cas où la hauteur de l'interface (l'épaisseur de la couche liquide) est d'ordre 1, donc microscopique par rapport à la taille du système. La transition entre les deux situations prend le nom de transition de mouillage (wetting transition en anglais). Nous renvoyons à [40, Sec. 7] pour une discussion bien plus élaborée sur la transition de mouillage.

Comme on le verra dans la Section 2.1.1 (voir aussi [42, 36], qui toutefois utilisent un langage et des notations très différents), dans l'approximation d'interface effective la description mathématique de l'interaction interface/paroi est assez simple : si $\{\tau_i\}_{i\geq 0}$ sont les coordonnées horizontales des points où l'interface touche la paroi (avec $\tau_i < \tau_{i+1}$ et $\tau_0 = 0$, cf. Figure 1.1), on a que la probabilité d'une certaine configuration des points de contact $\tau := \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots\}$ est proportionnelle à

$$P(\tau) \propto \prod_{i\geq 1} K(\tau_i - \tau_{i-1}) e^{u_{\tau_i}}$$
(1.1.1)

avec $K(\cdot)$ une fonction positive telle que $K(n) \sim \sigma n^{-3/2}$ pour *n* grand, tandis que u_i est proportionnel à (-1) fois le champ magnétique local h_i . σ est une constante positive qui ne joue aucun rôle essentiel : si on change σ , on modifie la valeur précise du point critique mais les exposants critiques restent les mêmes.

1.1.2 Transition de dénaturation de l'ADN

L'ADN est une molécule biologique extrêmement complexe, mais pour décrire qualitativement le phénomène de la dénaturation on utilise souvent la description suivante, plutôt grossière. Si on oublie la structure en double hélice, l'ADN peut être vu (voir Fig. 1.2) comme formé par deux brins complémentaires très longs, liés ensemble par des liens chimiques. Chaque brin est un polymère inhomogène, dont les monomères (ou "bases") sont de quatre types différents (appelés A, T, G, C). Le monomère A se lie avec T, et C avec G. Le deuxième brin peut donc être obtenu du premier avec les substitutions $A \leftrightarrow T$ et $C \leftrightarrow G$ (c'est dans ce sens que nous avons dit que les deux brins sont "complémentaires"). La paire de bases numéro n de la chaîne a donc une énergie de lien u_n , qui peut avoir deux valeurs, u_{AT} ou u_{GC} , selon son type. Lorsque le système est réchauffé, certains des liens peuvent se rompre à cause de l'agitation thermique, et des boucles se forment. À une certaine température T_c (d'environ 90 degrés Celsius) les deux brins se séparent, et c'est ce que l'on appelle la transition de dénaturation. On a donc une phase dénaturée pour $T > T_c$ (dans le langage du modèle d'accrochage du chapitre suivant, on va l'appeler aussi "phase délocalisée") et une phase "normale" ou "localisée" pour $T < T_c$.



FIGURE 1.2. Une vue très schématique de la molécule d'ADN. L'index n compte la paire de bases, à partir (par exemple) du bord gauche du système. La séquence des bases *ne change pas* sous l'action de l'agitation thermique.

Un modèle souvent utilisé pour décrire ce phénomène est celui de Poland-Scheraga (la littérature physique sur le sujet est vaste; nous renvoyons à l'article de revue [73] et à sa bibliographie). Appelons $P(\tau_1, \tau_2, ...)$ (avec $\tau_i < \tau_{i+1}$) la probabilité que les paires de

bases dont le lien n'est pas ouvert sont celles et seulement celles dont l'index coïncide avec un des entiers τ_i . Dans le modèle de Poland-Scheraga on suppose que

$$P(\tau_1, \tau_2, ...) \propto \prod_{i \ge 1} K(\tau_i - \tau_{i-1}) e^{u_{\tau_i}/T}$$
 (1.1.2)

où $\tau_0 = 0$ par convention, T est la température, K(n) est une fonction positive telle que $K(n) \sim \sigma/n^{-c}$ pour $n \to \infty$, et σ et c sont deux paramètres positifs. On voit tout d'abord que seulement les liens non ouverts contribuent à l'énergie, ce qui est logique. Deuxièmement, on voit que à chaque boucle de longueur n est associée une "entropie de boucle" log K(n). La valeur physiquement correcte de l'exposant c ("loop closure exponent") a été fortement débattue dans la littérature physique. Nous n'entrerons pas dans cette question et nous nous limitons à indiquer que la valeur la plus acceptée [65] est autour de $c \approx 2.15$ (elle tient compte des contraintes d'auto-évitement des deux brins et des boucles). Comme on va le discuter dans les Chapitres 2 et 3, les propriétés critiques de la transition dépendent fortement de la valeur de c. Pour ce qui concerne le préfacteur σ ("cooperativity parameter"), par contre, sa valeur (que d'habitude on prend de l'ordre de 10^{-5}) ne jouera aucun rôle dans notre étude (mais elle serait bien sûr importante si on s'intéressait à comparer la théorie aux données expérimentales).

Si on suppose que les types de bases sont placées aléatoirement le long de la chaîne, on a donc une suite de variables aléatoires u_n et le modèle de Poland-Scheraga devient un modèle de mécanique statistique avec désordre gelé (ou "quenched"). Souvent on fait une hypothèse encore plus audacieuse, en supposant que les variables u_n sont des variables aléatoires indépendantes.

1.1.3 Accrochage d'un polymère sur un défaut

Considérons un polymère, donc un longue chaîne unidimensionnelle, étirée dans une des directions de l'espace \mathbb{R}^{d+1} (disons la direction $\vec{e_1}$ de la première coordonnée de l'espace), cf. Fig. 1.3. Supposons qu'il y ait dans l'espace un défaut, lui aussi dans la direction $\vec{e_1}$ mais parfaitement linéaire, avec lequel le polymère interagit via un potentiel (aléatoire) qui dépend de la position le long du défaut, cf. Figure 1.3. L'interaction est à très courte portée, donc elle n'a d'effet que quand le polymère touche le défaut. (C'est apparemment une description raisonnable de l'interaction entre les lignes de flux qui se forment dans les supraconducteurs, et des "défauts filiformes" [72], un sujet sur lequel je suis particulièrement ignorant).

Si on néglige l'interaction du polymère avec lui-même (par exemple à travers l'idéalisation de polymère dirigé) et on appelle τ_i , avec $i \ge 1$, les points de contact polymère/défaut, on arrive facilement (cf. Section 2.1) à un modèle de mécanique statistique où la probabilité d'une certaine configuration de l'ensemble τ des points de contact est donnée par l'expression (1.1.1), où maintenant u_i est le potentiel d'accrochage au point i du défaut et $K(n) \sim \sigma n^{-d/2}$ si la dimension d est au moins 2, et $K(n) \sim \sigma n^{-3/2}$ si d = 1. L'égalité des exposants de queue en dimension d = 1 et d = 3, un fait assez surprenant à première vue, ne cache rien de particulièrement profond, et découle de (2.1.3) ci-dessous.

Si le potentiel d'accrochage est (globalement) suffisamment attractif, le polymère colle au défaut (phase localisée ou accrochée, "pinned phase"), dans le cas contraire il s'en éloigne diffusivement (phase délocalisée ou décrochée ou "depinned").



FIGURE 1.3. Polymère en interaction avec un défaut unidimensionnel. Le potentiel d'accrochage le long du défaut est inhomogène, i.e. dépend du site. Dans la modélisation, on suppose que le polymère est suffisamment étiré horizontalement pour pouvoir négliger ses auto-interactions et auto-intersections. C'est le cas par exemple dans l'approximation de polymère dirigé (la trajectoire du dessin n'est pas dirigée).

1.1.4 Quels éléments communs?

Les trois exemples que nous avons décrit sont d'origine physique très différente, mais on peut faire ressortir certains éléments clés en commun, qui permettront une description mathématique unifiée :

- une suite unidimensionnelle de variables aléatoires $\{u_i\}_{i\geq 1}$ (champs magnétiques de bord, énergies de lien des paires de bases, potentiels d'accrochage le long d'une ligne);
- un ensemble unidimensionnel τ de "points de contact" (contacts interface-paroi, liens chimiques non ouverts, contacts polymère-défaut);
- une forme commune pour l'énergie de la "boucle" ou "excursion" entre le point i et le point j, du type

$$K(j-i)e^{u_j},$$
 (1.1.3)

avec $K(i) \sim \sigma i^{-c}$ pour un certain $\sigma > 0$ et $c \ge 1$;

 une transition entre une phase localisée (phase sèche, ou phase normale de l'ADN, ou phase accrochée selon le cas) où le nombre de contacts croît comme la taille linéaire du système, et une phase délocalisée (ou mouillée, ou dénaturée, ou décrochée) où ce nombre croît beaucoup moins vite ou pas du tout.

1.2 Mise en perspective

La question principale qui a motivé l'étude présentée dans ce mémoire est (vaguement) la suivante : étant donné un système qui a une transition de phase (en particulier, du deuxième ordre), que se passe-t-il si on introduit de l'aléa dans le Hamiltonien, e.g., si on rend aléatoires les couplages ? Déjà, il n'est souvent pas évident de savoir si la transition de phase persiste ou pas en présence de désordre. Dans le cas affirmatif, il est naturel de se poser la question de savoir ce que deviennent les exposants critiques du système non désordonné (ou "système pur"). Il s'agit en général de questions d'une difficulté formidable, non seulement si on a l'ambition de montrer des théorèmes, mais même du point de vue d'approches mathématiquement non rigoureuses, par exemple issues du groupe de renormalisation.

Heureusement, il y a un argument développé dans les années '70 par A. B. Harris [59], et donc appelé "critère de Harris", qui donne une recette très simple : les propriétés critiques du système pur sont modifiées par un désordre faible si l'exposant critique¹ $\nu_{c.s.}$ de la chaleur spécifique est positif, et ne le sont pas si $\nu_{c.s.} < 0$ (dans le jargon du groupe de renormalisation, on dira que le désordre est *pertinent* dans le premier cas et *non pertinent* dans le deuxième). Le "critère de Harris" a été formulé à l'origine pour le modèle d'Ising ferromagnétique avec couplages aléatoires, mais au cours des années il a été étendu bien au delà de ce contexte ; en général, il est assez robuste et il donne une réponse assez fiable à la question de la pertinence du désordre.

Toutefois, à l'exception de quelques travaux comme ceux de Chayes *et al.* [27] que nous mentionnerons plus tard, les résultats mathématiques en support des prédictions du critère de Harris sont très rares. En plus, dans le cas "marginal" où l'exposant critique de la chaleur spécifique vaut exactement $\nu_{c.s.} = 0$, le "critère de Harris" dans sa version la plus immédiate ne donne aucune prédiction sur la pertinence du désordre. Cela est assez embêtant, puisque $\nu_{c.s.} = 0$ correspond à plusieurs modèles intéressants : par exemple, le modèle d'Ising en dimension d = 2 [38, 74] et le modèle de mouillage en dimension (1 + 1), cf. Section 2.1.1. Ajoutons aussi que, dans le cas marginal $\nu_{c.s.} = 0$, le désordre peut être soit pertinent soit non pertinent, selon le modèle particulier que l'on considère (par exemple, on verra que on a pertinence du désordre pour le modèle de mouillage en dimension (1 + 1), tandis que il y a des arguments qui indiquent la non pertinence pour le modèle d'Ising en dimension d = 2 [38, 74]).

Il y a au moins deux raisons pourquoi nous avons choisi le contexte du modèle d'accrochage pour attaquer le problème de justifier mathématiquement le critère de Harris. Tout d'abord, le modèle d'accrochage n'est pas un modèle, mais une classe de modèles, qui dépendent d'un paramètre continu $\alpha \geq 0$. Selon la valeur de α , les exposants critiques du système pur (en particulier $\nu_{c.s.}$) changent : on a $\nu_{c.s.} < 0$ pour $\alpha < 1/2$, $\nu_{c.s.} > 0$ pour $\alpha > 1/2$ et $\nu_{c.s.} = 0$ pour $\alpha = 1/2$. Il s'agit donc d'un cadre idéal pour essayer de comprendre le critère de Harris dans toute sa généralité. Deuxièmement, ces modèles ont une structure unidimensionnelle sous-jacente qui fait de sorte que, en absence de désordre, on peut trouver une solution exacte pour l'énergie libre, pour les exposants critiques et pour n'importe quelle fonction de corrélation. En particulier, on verra dans la Section 2.4 que (toujours pour le modèle pur!) la transition de phase peut être de n'importe quel ordre selon la valeur de α (allant donc d'une transition du premier ordre pour $\alpha > 1$, où le paramètre d'ordre a une discontinuité, à une transition d'ordre infini pour $\alpha = 0$, où il s'annule de façon infiniment différentiable).

Une fois le désordre introduit, la solubilité exacte du modèle est perdue. Toutefois, le cœur de ce mémoire est de montrer que on peut quand même élucider complètement la question de quand le désordre est pertinent et de quand il ne l'est pas. Cas assez rare, nous sommes même arrivés à déterminer la pertinence du désordre dans le cas marginal $\alpha = 1/2$, où l'exposant critique de la chaleur spécifique est nul. Les résultats que nous avons obtenu dans cette étude ont permis entre autre de résoudre certaines questions qui

^{1.} Le symbole standard pour cet exposant critique est α , mais nous n'utiliserons pas cette convention, puisque à partir du chapitre suivant α dénotera une autre quantité .

étaient controversées dans la littérature physique : c'est le cas par exemple de la preuve de la pertinence du désordre pour le modèle de mouillage en dimension (1 + 1) (certains auteurs affirmaient erronément que le désordre serait non pertinent dans ce cas).

Comme on va le mentionner dans le dernier chapitre de ce mémoire, des extensions très jolies de nos méthodes ont été obtenues par différents auteurs, ce qui leur a permis de prouver différents résultats importants pour des modèles comme le polymère dirigé en milieu aléatoire et le modèle d'accrochage *sur* une marche aléatoire ("Random Walk Pinning Model"). Cela donne l'espoir que les résultats présentés dans ce mémoire joueront un rôle important dans le processus de compréhension de l'effet du désordre dans les modèles de la mécanique statistique.

MODÈLE D'ACCROCHAGE DÉSORDONNÉ

Dans ce chapitre, nous allons définir l'objet principal de notre étude : le modèle d'accrochage désordonné. Nous commencerons par un exemple assez simple, l'accrochage d'un polymère dirigé sur un défaut unidimensionnel, que nous introduirons de façon un peu informelle dans la Section 2.1. Ensuite, dans la Section 2.2, nous généraliserons le modèle en adoptant le point de vue de la théorie du renouvellement (cf. [8] pour une introduction à la théorie du renouvellement). Cette généralisation permet non seulement un traitement plus élégant et unifié, mais surtout, grâce à l'introduction d'un paramètre continu α qui d'une certaine façon remplace la dimension physique d du système, permet d'avoir une phénoménologie bien plus intéressante près du point critique, comme il sera discuté dans le Chapitre 3.

2.1 Un exemple intuitif : accrochage d'un polymère en dimension (1+d)

On va reprendre ici, avec des définitions précises, le modèle de la Section 1.1.3.

La définition du modèle demande deux ingrédients assez simples : une marche aléatoire S sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$, dont on supposera que les incréments sont indépendants, symétriques et à variance finie, et une suite de variables aléatoires i.i.d. (identiques et identiquement distribuées) $\omega = \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. La loi de S sera dénotée par \mathbf{P}^{RW} (RW pour random walk), et la loi de ω par \mathbb{P} ; on suppose que $\mathbb{E} \omega_1 = 0$ et $\mathbb{E} \omega_1^2 = 1$. Remarquons que la trajectoire de S dans l'espace-temps, $\{(S_n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, peut être vue comme la configuration d'un polymère dirigé en dimension 1 + d, voir la Figure 2.1. Comme on le discutera, \mathbf{P}^{RW} doit être pensée comme la loi "libre" (i.e., en absence d'interactions) du polymère, et ω comme l'aléa (désordre gelé) présent dans le milieu où le polymère se trouve.

Comme d'habitude en mécanique statistique, on définit le modèle d'abord pour une taille finie $N \in \mathbb{N}$ et on prend la limite thermodynamique $N \to \infty$ ensuite. Pour une réalisation donnée ω du désordre et pour $\beta \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$ donnés (on va discuter la signification de ces deux paramètres dans un instant), la mesure de Gibbs $\mathbf{P}_{N,\omega}$ est définie par sa densité par rapport à la mesure "libre" \mathbf{P}^{RW} :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}^{\mathrm{RW}}}(S) := \frac{1}{Z_{N,\omega}} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \left(\beta\omega_n + h\right) \mathbf{1}_{\{S_n=0\}}\right) \mathbf{1}_{\{S_N=0\}}, \qquad (2.1.1)$$

où la constante de normalisation $Z_{N,\omega}$ (fonction de partition) est

$$Z_{N,\omega} = \mathbf{E}^{\mathrm{RW}} \left[\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \left(\beta\omega_n + h\right) \mathbf{1}_{\{S_n=0\}}\right) \mathbf{1}_{\{S_N=0\}} \right]$$
(2.1.2)

et $\mathbf{1}_A$ dénote la fonction caractéristique de l'ensemble A. Le facteur $\mathbf{1}_{\{S_N=0\}}$ est donc simplement une contrainte ou condition au bord qui force le point final du polymère à toucher le défaut. Si S revient a l'origine au temps n, elle reçoit donc la récompense (ou pénalité, selon son signe) $\beta \omega_n + h$, que l'on peut interpréter comme un potentiel d'accrochage à l'origine. Ce potentiel a une partie constante h (potentiel d'accrochage homogène) et une partie fluctuante $\beta \omega_n$; on appellera souvent β "l'intensité du désordre".



FIGURE 2.1. Le modèle d'accrochage (2.1.1) en dimension 1 + 1, i.e., pour d = 1. La ligne horizontale représente le défaut : au point *i* le long du défaut, il y a un potentiel $u_i = \beta \omega_i + h$, positif (attractif) ou négatif (répulsif).

Ce modèle a une interprétation assez simple (voir la Figure 2.1 pour le cas d = 1) : le polymère dirigé interagit avec un défaut unidimensionnel (la ligne $\{(0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$) sur laquelle se trouvent des "charges" aléatoires ω_n . Au point (0,n) le défaut est attractif ou répulsif selon que $\beta\omega_n + h$ est positif ou négatif. Comme nous l'avons déjà brièvement discuté dans le Chapitre 1, on veut étudier la transition qui se passe à une certaine valeur de seuil $h_c(\beta)$, entre une phase localisée où le polymère reste à une distance d'ordre 1 du défaut, et la phase délocalisée où cette distance croît comme \sqrt{N} . Bien sur, si $h = \beta = 0$ il n'y a pas d'interaction entre le polymère et le défaut, et le polymère a un comportement diffusif (en particulier, il est délocalisé). Nous donnerons une définition précise de localisation et délocalisation dans la prochaine section.

Il est important d'observer que, si on définit l'ensemble $\tau := \{n \ge 0 : S_n = 0\}$ des points de retour de la marche à l'origine, alors sous la loi \mathbf{P}^{RW} (i.e., pour $h = \beta = 0$) τ est un processus de renouvellement. Cela signifie que si l'on écrit $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \ldots\}$ avec $\tau_0 = 0$ (la marche part de l'origine) et $\tau_i > \tau_{i-1}$, on a que les intervalles de temps $(\tau_i - \tau_{i-1})$ sont des variables aléatoires positives i.i.d. (et cela grâce à la propriété de Markov de la marche aléatoire). De plus, il est connu (voir [47, App. A.6] et [64] pour d = 2) que la loi des sauts de τ (dite aussi loi inter-arrivée) a une queue qui décroît comme une puissance :

$$\mathbf{P}^{\text{RW}}(\tau_i - \tau_{i-1} = n) = \mathbf{P}^{\text{RW}}(\inf\{i > 0: S_i = 0\} = n) \overset{n \to \infty}{\sim} \begin{cases} \frac{c_1}{n^{3/2}} & \text{if } d = 1\\ \frac{c_2}{n(\log(n))^2} & \text{if } d = 2 \ (2.1.3)\\ \frac{c_d}{n^{d/2}} & \text{if } d \ge 3 \end{cases}$$

où c_d sont des constantes positives, dont la valeur précise dépend de la loi des incréments $S_i - S_{i-1}$. (Dans le cas particulier de la marche aléatoire simple, il est sous-entendu que l'on se restreint à $n \in 2\mathbb{N}$ dans (2.1.3), à cause du fait que la marche simple est une marche aléatoire périodique de période 2). Il faut aussi observer que, puisque la marche aléatoire est récurrente en dimension $d \leq 2$ et transiente sinon, on aura que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}^{\text{RW}}(\tau_1 = n) = 1$ pour d = 1, 2 et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}^{\text{RW}}(\tau_1 = n) < 1$ pour $d \geq 3$. Par conséquent, τ sera un processus de renouvellement récurrent dans le premier cas (la cardinalité de τ sera infinie avec probabilité 1) et transient dans le deuxième cas : la cardinalité de τ devient une variable aléatoire géométrique, de moyenne

$$\frac{\mathbf{P}^{\mathrm{RW}}(\tau_1 < \infty)}{1 - \mathbf{P}^{\mathrm{RW}}(\tau_1 < \infty)}$$

Cela est dû au fait que, à chaque saut, le processus a une probabilité $1 - \mathbf{P}^{RW}(\tau_1 < \infty)$ de terminer.

Remarque 2.1.1. La raison pour laquelle nous donnons tant d'importance à l'ensemble τ est que le Hamiltonien

$$\sum_{n \le N} (\beta \omega_n + h) \mathbf{1}_{\{S_n = 0\}} = \sum_{n \le N} (\beta \omega_n + h) \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}$$
(2.1.4)

est une fonction seulement de τ et non pas de toute la trajectoire S_n ; cela signifie que, si on conditionne sur la configuration de τ , la trajectoire S devient une collection d'excursions indépendantes de la marche aléatoire, un processus très bien connu. La partie non triviale de la loi $\mathbf{P}_{N,\omega}$ est donc la loi marginale de τ .

2.1.1 Un autre modèle très populaire : mouillage en dimension (1+1)

Soit $S = \{S_n\}_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple et symétrique sur \mathbb{Z} , qui part de 0, et dénotons sa loi par \mathbf{P}^{SRW} . On a donc que les incréments $(S_i - S_{i-1})$ sont indépendants, et que $\mathbf{P}^{\text{SRW}}(S_i - S_{i-1} = \pm 1) = 1/2$. On va définir une mesure de probabilité $\mathbf{P}_{N,\omega}^+$ qui vit sur les trajectoires non-négatives :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}^{+}}{\mathrm{d}\mathbf{P}^{\mathrm{SRW}}}(S) := \frac{1}{Z_{N,\omega}^{+}} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \left(\beta\omega_{n}+h\right) \mathbf{1}_{\{S_{n}=0\}}\right) \mathbf{1}_{\{S_{n}\geq0,n=1,\dots,N;S_{N}=0\}}, \qquad (2.1.5)$$

avec

$$Z_{N,\omega}^{+} = \mathbf{E}^{\text{SRW}} \left[\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \left(\beta \omega_n + h\right) \mathbf{1}_{\{S_n = 0\}}\right) \mathbf{1}_{\{S_n \ge 0, n = 1, \dots, N; S_N = 0\}} \right].$$
(2.1.6)

Soit maintenant $\mathbf{P}_{N,\omega}$ la mesure définie dans (2.1.1) dans le cas particulier où d = 1 et S est la marche aléatoire simple, et $Z_{N,\omega}$ la fonction de partition correspondante. Alors, on voit

facilement que $\mathbf{P}_{N,\omega}^+$ n'est rien d'autre que la mesure $\mathbf{P}_{N,\omega}$ conditionnée à l'événement que S est non-négatif jusqu'au temps N, i.e., $\mathbf{P}_{N,\omega}^+(\cdot) = \mathbf{P}_{N,\omega}(\cdot|S \ge 0)$. Une autre observation est que, pour tout N et toute réalisation ω du désordre, on a que $Z_{N,\omega}^+$, avec paramètres (β, h) , coïncide avec $Z_{N,\omega}$, avec paramètres $(\beta, h - \log 2)$. La raison est que, si $\{S_n\}_{n=0,\dots,N}$ est une trajectoire du modèle de mouillage qui satisfait $S_n \ge 0$ pour tout $n \le N$ et $S_0 = S_N = 0$ et qui revient x fois en zéro, il existe exactement

$$2^{x} = e^{\log 2 \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{S_{n}=0\}}}$$

trajectoires différentes $\{s_n\}_{n=0,\ldots,N}$ du modèle d'accrochage en dimension 1+1, telles que $|s_n| = S_n$, toutes avec la même énergie (vu que le Hamiltonien dépend seulement des points de contact, cf. la Remarque 2.1.1). En particulier, si on n'est intéressé qu'à l'énergie libre (cf. Section 2.3), étudier un modèle ou l'autre est totalement équivalent. Cette dernière observation, pourtant élémentaire, a souvent été ignorée dans la littérature, ce qui entraîne l'existence de nombreux travaux qui traitent séparément le modèle avec et sans contrainte de positivité.

2.2 Généralisation : un point de vue de théorie du renouvellement

En vue de la discussion de la Remarque 2.1.1, une généralisation naturelle du modèle (2.1.1) est la suivante. Le point de départ est maintenant un processus de renouvellement $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \ldots\}$ de loi **P** sur l'ensemble des entiers non négatifs (voir Figure 2.2), dont on supposera seulement que $\tau_0 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$K(n) := \mathbf{P}(\tau_i - \tau_{i-1} = n) = \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}}$$
(2.2.1)

pour un certain $\alpha \geq 0$, où $L(\cdot)$ est une fonction à variation lente, i.e. une fonction positive telle que $\lim_{n\to\infty} L(xn)/L(n) = 1$ pour tout x > 0. Par exemple, toute puissance (avec exposant positif ou négatif) de $\log(\cdot+1)$ est à variation lente. Pour un traitement approfondi des propriétés des fonctions à variation lente et une panoramique des nombreux contextes où elles apparaissent, nous renvoyons à la monographie [11].

On verra que le modèle d'accrochage a un comportement extrêmement différent selon la valeur de α ; pour l'instant, remarquons seulement qu'une différence évidente est que $\mathbf{E}(\tau_1) < \infty \text{ si } \alpha > 1 \text{ et } +\infty \text{ si } \alpha < 1$, et cela parce que

$$\mathbf{E}(\tau_1) = \sum_{n \ge 1} K(n)n = \sum_{n \ge 1} \frac{L(n)}{n^{\alpha}}.$$

La fonction a variation lente $L(\cdot)$ va être importante principalement dans deux cas :

- − dans le "cas marginal" $\alpha = 1/2$ puisque, comme on le verra dans le Chapitre 3, selon la vitesse a laquelle L(n) diverge pour $n \to \infty$, on est dans le régime de désordre pertinent ou non pertinent;
- dans le cas $\alpha = 0$, puisque si $L(\cdot)$ était asymptotiquement constante $K(\cdot)$ ne serait pas normalisable comme une probabilité.

Pour l'instant nous n'avons pas spécifié si τ est transient ou récurrent mais, comme on va le voir dans un instant, on peut toujours se ramener au cas récurrent, c'est à dire que pour le modèle auquel nous sommes intéressés il n'y a pas de perte de généralité à supposer que $\mathbf{P}(\tau_1 < \infty) = \sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$.



FIGURE 2.2. Le renouvellement τ part de $\tau_0 = 0$, et ses incréments $\tau_i - \tau_{i-1}$ sont des variables i.i.d. à valeurs entières.

Comme dans la section précédente, ω est une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées et de variance 1, dont la loi est dénotée par \mathbb{P} . En analogie avec (2.1.1), on définit la mesure de Gibbs $\mathbf{P}_{N,\omega}$ comme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,\omega}} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \left(\beta\omega_n + h\right)\delta_n\right) \delta_N.$$
(2.2.2)

Nous avons utilisé la notation $\delta_n := \mathbf{1}_{n \in \tau} = \mathbf{1}_{\{\exists k: \tau_k = n\}}$, où on regarde de façon naturelle τ comme un sous-ensemble de $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Remarquons que $\mathbf{P}_{N,\omega}$ est une loi sur les ensembles $\tau \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ et non pas sur les trajectoires S, comme la loi définie par (2.1.1). La fonction de partition $Z_{N,\omega}$ qui fait de $\mathbf{P}_{N,\omega}$ une probabilité est donnée par

$$Z_{N,\omega} := \mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \left(\beta\omega_n + h\right)\delta_n\right)\delta_N\right].$$
(2.2.3)

La raison pour laquelle on peut toujours supposer que τ est récurrent est que si on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$, on peut définir un nouveau renouvellement de loi $\widetilde{\mathbf{P}}$ en posant $\widetilde{K}(\cdot) = K(\cdot) / \sum_{n \in \mathbb{N}} K(n)$: dans ce cas, on voit immédiatement que (avec notations évidentes) $Z_{N,\omega}(\beta,h) = \widetilde{Z}_{N,\omega}(\beta,h + \log \sum_{n \in \mathbb{N}} K(n))$. Supposer que τ est récurrent revient donc a décaler de façon triviale le paramètre h. À partir de ce moment, nous supposerons toujours que $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$.

Avant de terminer cette section, nous mentionnons un résultat concernant le comportement asymptotique de la fonction de Green $\mathbf{P}(n \in \tau) = \mathbf{P}(\exists i \in \mathbb{N} : \tau_i = n)$, pour n grand, qui sera essentiel dans la suite : on a

$$\mathbf{P}(n \in \tau) \stackrel{n \to \infty}{\sim} \begin{cases} \frac{\alpha \sin(\pi \alpha)}{\pi} \frac{1}{n^{1-\alpha} L(n)} & \text{si } 0 < \alpha < 1\\ \bar{L}(n) & \text{si } \alpha = 1 \text{ et } \mathbf{E}[\tau_1] = \infty \\ 1/\mathbf{E}[\tau_1] & \text{si } \mathbf{E}[\tau_1] < \infty, \end{cases}$$
(2.2.4)

où $\overline{L}(\cdot)$ est une fonction à variation lente qui tend vers zéro à l'infini. Dans le cas $\mathbf{E}[\tau_1] < \infty$ ceci n'est rien d'autre que le Théorème du Renouvellement (cf. par exemple [8]); pour $0 < \alpha < 1$, ce résultat a été montrée par R. Doney dans [37]; pour $\alpha = 1$ et $\mathbf{E}[\tau_1] = \infty$, nous faisons référence à [47, Th. A.6].

Ici et dans la suite, nous utilisons la notation $A(x) \stackrel{x \to x_0}{\sim} B(x)$ pour signifier que $\lim_{x \to x_0} A(x)/B(x) = 1$.

Bref retour aux motivations

Avant de continuer avec l'analyse mathématique du modèle d'accrochage désordonné (2.2.2), il convient d'expliquer de quelle façon les exemples du Chapitre 1, qui ont motivé notre étude, rentrent dans ce cadre.

- Accrochage de polymères dirigés sur un défaut unidimensionnel (Section 1.1.3). Il est immédiat de vérifier que, si on prend la marginale sur $\tau := \{n \ge 0 : S_n = 0\}$ de la mesure $\mathbf{P}_{N,\omega}(dS)$ définie en (2.1.1), on obtient simplement la mesure $\mathbf{P}_{N,\omega}(d\tau)$ définie en (2.2.2), quitte à choisir $K(\cdot) = K^{\mathrm{RW}}(\cdot) := \mathbf{P}^{\mathrm{RW}}(\inf\{k > 0 : S_k = 0\} = \cdot)$. Le modèle d'accrochage du polymère dirigé est donc un cas particulier du modèle d'accrochage désordonné (2.2.2). Si on compare (2.1.3) et (2.2.1), on voit que $\alpha = 1/2$ pour d = 1 et $\alpha = d/2 - 1$ pour $d \ge 2$, et que $L(\cdot)$ est asymptotiquement constante, sauf pour d = 2. Si pour le modèle (2.1.1) les valeurs de α sont restreintes à cette suite discrète, pour le modèle (2.2.2) α est un paramètre sans restrictions à part celle d'être non-négatif. Pour une valeur $\alpha > 0$ donnée, il est possible de construire une marche aléatoire S sur \mathbb{N} telle que l'ensemble des instants de retour de S au point 0 est un renouvellement dont la loi inter-arrivée satisfait (2.2.1) pour une certaine fonction $L(\cdot)$ asymptotiquement constante [4]. Toutefois, cette observation ne jouera aucun rôle dans la suite.
- Transition de mouillage dans le modèle d'Ising bidimensionnel (Section 1.1.1). L'interface entre les phases + et - du modèle avec conditions au bord "+, -, -, -, -" est plutôt bien décrite à basse température par une marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} , conditionnée à être non négative (voir la Figure 1.1). À cause du conditionnement à être non négative, la marche aléatoire est transiente; l'ensemble des temps de retour à zéro forme un processus de renouvellement qui satisfait (2.2.1) (avec $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$) et $\alpha = 1/2$ [47, App. A.6]. La valeur $-h_i$ de (-1 fois) le champ magnétique aléatoire au point *i* du bord "sud" du système joue le même rôle que $\beta \omega_i + h$ dans le modèle d'accrochage. En particulier, l'interface a tendance à toucher le bord là où $-h_i > 0$.
- Transition de dénaturation de l'ADN (Section 1.1.2). Dans le modèle de Poland-Scheraga τ est l'ensemble des paires de bases non ouvertes. Si on se rappelle de (1.1.2), on voit que (2.2.1) est vérifiée avec $\alpha = c-1 \simeq 1.15$ et $L(\cdot)$ asymptotiquement constante. Rappelons que la valeur $\alpha \simeq 1.15$ est phénoménologique et tient compte

des contraintes d'auto-évitement des deux brins de l'ADN et des boucles qui se forment à cause des excitations thermiques (cf. [65] et [47, Sec. 1.4]).

Le lecteur intéressé au modèle de Poland-Scheraga doit toutefois considérer que la littérature physique sur le sujet utilise un langage très différent du notre et en particulier ne fait aucune référence à la structure de renouvellement de τ (la même observation s'applique d'ailleurs à la littérature physique sur la transition de mouillage et d'accrochage de polymères dirigés).

2.2.1 Hypothèses sur la loi du désordre

Jusqu'à maintenant, nous avons fait des hypothèses minimales sur la loi \mathbf{P} du désordre : on a supposé que les variables ω_n sont i.i.d. et de variance finie. Sans perdre de généralité, on a donc choisi $\mathbb{E} \omega_1 = 0$ et $\mathbb{E} \omega_1^2 = 1$. Tout le long de ce travail, on va faire une hypothèses plus restrictive :

(H1) les moments exponentiels des variables ω_n sont finis :

$$M(\lambda) := \mathbb{E}(\exp(\lambda\omega_1)) < \infty$$
 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Certains résultats généraux (e.g., l'existence de l'énergie libre de volume infini et le fait qu'elle est presque sûrement (p.s.) constante par rapport à ω) sont valables même sans l'hypothèse **(H1)**, mais par contre le modèle "annealed" qui sera introduit dans la Section 2.3.1 et qui jouera un rôle essentiel dans la suite serait mal défini si on avait $M(\lambda) = \infty$. Je supposerai donc implicitement à partir de ce moment que **(H1)** est satisfaite.

Pour certains résultats que je présenterai, et pour des raisons principalement techniques, on devra faire des hypothèses plus fortes. Je vais faire ici une liste des conditions qui seront demandées dans certains théorèmes (toutes les conditions *ne seront pas demandées au même temps* : par exemple, (H4) et (H5) sont clairement incompatibles!).

Pour certains résultats du Chapitre 4, on devra faire une hypothèse de concentration :

(H2) la loi \mathbb{P} satisfait une inégalité de concentration de type Gaussien : il existe une constante positive C telle que pour tout N, tout t > 0 et toute fonction Lipschitzienne $g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ telle que $g(\omega) := g(\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{P})$, on a

$$\mathbb{P}\left(|g(\omega) - \mathbb{E}g(\omega)| \ge t\right) \le C \exp\left(-\frac{t^2}{C||g||_{\text{Lip}}^2}\right).$$
(2.2.5)

Par exemple, on sait que (2.2.5) est vérifiée dans le cas Gaussien (**(H5)** ci-dessous), dans le cas borné (**(H4)** ci-dessous) et dans le cas où la loi de ω_1 satisfait l'inégalité de Sobolev logarithmique [68].

Par contre, dans la Section 3.2 on aura besoin plutôt de

(H3) La loi de ω_1 a une densité $P(\cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , et il existe $0 < R < \infty$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} P(x+y) \log\left(\frac{P(y+x)}{P(y)}\right) \, \mathrm{d}y \le Rx^2 \tag{2.2.6}$$

dans un voisinage de x = 0. Cette condition est vérifiée de manière assez générale quand $P(\cdot)$ est positive, par exemple dans le cas Gaussien et plus généralement quand $P(\cdot) = \exp(-V(\cdot))$, avec $V(\cdot)$ un polynôme borné inférieurement.

Deux autres cas auxquels on fera souvent référence sont les suivants :

(H4) Désordre borné : on a $|\omega_1| \leq C$

$$\operatorname{et}$$

(H5) Désordre Gaussien : on a $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Je veux souligner dès maintenant que le cas qui se présente comme le plus simple techniquement est (H5), le cas Gaussien.

2.3 Énergie libre, point critique et transition de localisation

L'énergie libre (dite quenched, pour la distinguer de celle dite annealed qui sera définie plus tard) est définie à partir de la fonction de partition $Z_{N,\omega}$ comme

$$\mathbf{F}(\beta,h) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N,\omega} \stackrel{p.s.}{=} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega} :$$
(2.3.1)

le fait que l'on a convergence à la fois pour presque toute réalisation de ω et en moyenne est assez standard [47, Ch. 4] et peut être montré par un argument de superadditivité, basé sur l'observation que pour toute triple d'entiers N, N_1, N_2 telle que $N_1 + N_2 = N$ on a

$$\mathbb{E}\log Z_{N_1+N_2,\omega} \ge \mathbb{E}\log \mathbf{E}\left[e^{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega_n+h)\delta_n}\delta_{N_1}\delta_N\right] = \mathbb{E}\log Z_{N_1,\omega} + \mathbb{E}\log Z_{N_2,\omega}.$$
 (2.3.2)

Un autre fait bien connu est que $F(\beta, h) \ge 0$. Cette borne inférieure est obtenue en ne considérant, dans la somme définissant la fonction de partition $Z_{N,\omega}$, que les configurations τ telles que $\tau_1 = N$ (le premier contact se trouve au bout du système) :

$$Z_{N,\omega} \ge e^{\beta\omega_N + h} \mathbf{P}(\tau_1 = N) = e^{\beta\omega_N + h} K(N)$$
(2.3.3)

et en se rappelant (cf. (2.2.1)) que K(N) décroît seulement comme une puissance de N pour $N \to \infty$. La non-négativité de l'énergie libre nous amène de façon naturelle à distinguer entre la phase localisée

$$\mathcal{L} := \{ (\beta, h) : F(\beta, h) > 0 \}$$

$$(2.3.4)$$

et la phase délocalisée

$$\mathcal{D} := \{ (\beta, h) : F(\beta, h) = 0 \},$$
(2.3.5)

séparées par la ligne critique

$$\beta \mapsto h_c(\beta) := \sup\{h : F(\beta, h) = 0\} = \inf\{h : F(\beta, h) > 0\}.$$
 (2.3.6)

Pour une valeur de β donnée, on appellera $h_c(\beta)$ le point critique (quenched).

Puisque $F(\cdot, \cdot)$ est une fonction convexe et non-décroissante en h, on a bien que $F(\beta, \cdot)$ s'annule de façon continue quand $h \searrow h_c(\beta)$. Il serait donc assez naturel de définir l'exposant critique

$$\nu := \lim_{h \searrow h_c(\beta)} \frac{\log F(\beta, h)}{\log(h - h_c(\beta))}.$$
(2.3.7)

Malheureusement, sauf dans des conditions particulières (e.g. quand $\beta = 0$, cf. Section 2.4 ou quand $\alpha < 1/2$ et β est petit, cf. Section 3.4) on n'est pas capable de montrer que cette limite existe. Il est quand même pratique de garder en tête cette définition pour certaines discussions informelles qui suivront. Il faut remarquer aussi qu'en général ν dépendra de l'exposant α et de la valeur de β (cf. en particulier le Théorème 3.2.1, qui montre que si $\alpha > 1/2$ on a $\liminf_{\beta \searrow 0} \nu(\beta) > \nu(0)$).

Dans les deux phases, \mathcal{D} et \mathcal{L} , les configurations typiques du systèmes sont très différentes : par exemple, on trouve que si $h > h_c(\beta)$ alors

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbf{E}_{N,\omega}(|\tau\cap\{1,\ldots,N\}|)=\partial_h\mathbf{F}(\beta,h)>0$$

(pour presque tout ω)¹, tandis que si $h < h_c(\beta)$ la même limite vaut 0 presque sûrement. La transition en termes d'énergie libre se reflète donc en une transition en termes de propriétés trajectorielles (et c'est bien en termes de propriétés trajectorielles que l'on a introduit informellement la transition de localisation dans le Chapitre 1). Ces résultats s'obtiennent assez simplement grâce à la propriété de convexité (par rapport à h) et de concentration (par rapport à ω) de la fonction $h \mapsto (1/N) \log Z_{N,\omega}$. La quantité $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbf{E}_{N,\omega}(|\tau \cap \{1,\ldots,N\}|)$, qui prend le nom de "fraction de contacts" (contact fraction) peut être vue comme le paramètre d'ordre du système : selon qu'elle est nulle ou positive, on se trouve dans \mathcal{D} ou dans \mathcal{L} . De façon analogue, l'aimantation spontanée est le paramètre d'ordre du modèle d'Ising, et elle est nulle ou positive selon que l'on se trouve dans la phase paramagnétique ou ferromagnétique.

Comme on le verra dans le Chapitre 4, on peut obtenir des estimations trajectorielles (dans les deux phases et aussi près de la ligne critique) qui vont bien au delà de ces résultats sur le comportement limite de la moyenne de la densité $|\tau \cap \{1, \ldots, N\}|/N$.

2.3.1 Modèle d'accrochage "annealed"

Une borne à l'air assez simpliste (mais, comme on le verra par la suite, parfois efficace) pour le point critique est donnée par l'inégalité de Jensen : puisque la fonction $\log(\cdot)$ est concave, on a

$$F(\beta, h) \le \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}Z_{N,\omega} = F(0, h + \log M(\beta))$$
(2.3.8)

(il suffit d'observer que

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[\left(\beta\omega_n+h\right)\mathbf{1}_{n\in\tau}\right]\right\}=\exp\left[\left(h+\log M(\beta)\right)\mathbf{1}_{n\in\tau}\right]$$

et de se rappeler que les variables ω_n sont indépendantes) et par conséquent

$$h_c(\beta) \ge h_c(0) - \log M(\beta) =: h_c^{\operatorname{ann}}(\beta).$$
(2.3.9)

On appellera $F(0, h + \log M(\beta))$ l'énergie libre annealed (il s'agit bien sûr simplement de l'énergie libre du modèle homogène avec h remplacé par $h + \log M(\beta)$) et $h_c^{ann}(\beta)$ le point critique annealed (le mot anglais "annealed" est parfois traduit en français par "recuit").

^{1.} cela est vrai si la fonction $F(\beta, \cdot)$ est différentiable au point h. Comme on le verra dans le Théorème 4.1.2, on a différentiabilité (et même différentiabilité infinie) pour $h > h_c(\beta)$.

Intuitivement, l'inégalité de Jensen (2.3.8) donne une bonne approximation pour l'énergie libre (et permet d'identifier exactement le point critique) dans les situations où la fonction de partition $Z_{N,\omega}$ fluctue "peu" (si $Z_{N,\omega}$ était déterministe, on pourrait évidemment échanger le log et la moyenne). Dans ce cas, on dira que le désordre est "non pertinent"; ce discours sera repris plus en profondeur dans le Chapitre 3. Je tiens quand même à souligner qu'il faudra préciser ce que l'on entend quand on dit que $Z_{N,\omega}$ fluctue "peu", puisqu'on verra dans la Section 3.4.1 qu'en réalité la variance de $Z_{N,\omega}$ diverge exponentiellement en N, dès que l'on est dans la phase localisée.

2.4 Étude du modèle d'accrochage homogène

Au vu de la borne (2.3.8), il est naturel d'analyser d'abord le modèle homogène ($\beta = 0$). Cela revient à une application assez directe de résultats standards de la théorie du renouvellement. On peut trouver les résultats qui suivent par exemple dans le Chapitre 2 du livre [47].

L'observation centrale est que

Proposition 2.4.1. S'il existe une solution $b = b(h) (\geq 0)$ pour l'équation

$$\mathbf{E}(e^{-b\tau_1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} K(n)e^{-nb} = e^{-h}$$
(2.4.1)

alors F(0,h) = b(h). Si l'équation (2.4.1) n'a pas de solution, alors F(0,h) = 0.

La première conséquence de ce résultat est l'identification du point critique du modèle homogène : $h_c(0) = 0$ (si l'on n'avait pas supposé que τ est persistant, on aurait plutôt $h_c(0) = -\log \mathbf{P}(\tau_1 < \infty)$). Entre autre, cela nous dit que le point critique "annealed" défini dans la section précédente (cf. (2.3.9)) vaut

$$h_c^{\mathrm{ann}}(\beta) = -\log M(\beta).$$

Le comportement critique du modèle homogène peut être lui aussi facilement déduit à partir de (2.4.1). Pour cela, il faut étudier le comportement de la transformée de Laplace de τ_1 pour *b* petit, ce qui revient essentiellement à développer le côté droit et le côté gauche de (2.4.1) pour *b* et *h* petits. Plus précisément, on écrit que

$$1 - \mathbf{E}(e^{-b\tau_1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}} \left(1 - e^{-bn} \right) = 1 - e^{-h} = h + o(h).$$

Pour b qui tend vers zéro, le côté gauche peut être écrit comme une intégrale qui peut être évaluée facilement. À partir de cela, on obtient :

Théorème 2.4.2. [47, Th. 2.1] Si $K(\cdot)$ est de la forme (2.2.1), il existe une fonction à variation lente $\hat{L}(\cdot)$ telle que pour tout h > 0

$$F(0,h) = h^{1/\min(1,\alpha)} \widehat{L}(1/h).$$
(2.4.2)

En particulier :

1. si $\mathbf{E}[\tau_1] = \sum_{n \in \mathbb{N}} nK(n) < \infty$ (par exemple, si $\alpha > 1$) alors

$$\mathbf{F}(0,h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} \frac{h}{\mathbf{E}[\tau_1]}; \tag{2.4.3}$$

2. si $0 < \alpha < 1$ alors

$$\mathbf{F}(0,h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} \left(\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha} R_{\alpha}(h), \qquad (2.4.4)$$

où $R_{\alpha}(\cdot)$ est asymptotiquement équivalente à l'inverse de la fonction $x \mapsto x^{\alpha}L(1/x)$; 3. si $\alpha = 1$ et $\mathbf{E}[\tau_1] = \infty$, alors $\widehat{L}(\cdot)$ s'annule à l'infini.

Observons en particulier que si $0 < \alpha < 1$ et $\lim_{N \to \infty} L(N) = c > 0$, alors

$$\mathbf{F}(0,h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} \left(\frac{\alpha}{c\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha} h^{1/\alpha}.$$
(2.4.5)

Remarquons aussi que (2.4.2) implique que l'exposant critique ν défini dans la Section 2.3 vaut (pour $\beta = 0$)

$$\nu(0) = \frac{1}{\min(1,\alpha)}.$$
(2.4.6)

La transition est donc du premier ordre quand $\mathbf{E}[\tau_1] < \infty$ (i.e., la dérivée de l'énergie libre par rapport à h a une discontinuité au point critique) et du deuxième ordre si $\mathbf{E}[\tau_1] = \infty$ et, plus α est proche de zéro, plus $F(\beta, \cdot)$ est lisse autour de h = 0.

Il est important de savoir que non seulement l'énergie libre mais même la mesure de Gibbs $\mathbf{P}_{N,\omega}$ (que nous dénoterons ici plutôt $\mathbf{P}_N^{(h)}$, pour souligner la dépendance dans le paramètre h et le fait que le désordre ne joue aucun rôle, puisque $\beta = 0$) peut être décrite explicitement dans la limite $N \to \infty$. Pour cela, soit $\widetilde{\mathbf{P}}^{(h)}$ la loi d'un renouvellement τ tel que

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{(h)}(\tau_i - \tau_{i-1} = n) = K(n)e^{-nF(0,h)}e^h.$$
(2.4.7)

On remarque tout de suite que si h > 0 il s'agit d'un renouvellement récurrent avec une loi inter-arrivée dont la queue décroît exponentiellement (pour la récurrence, cf. (2.4.1), qui peut être récrite comme $\sum_{n\geq 1} K(n) \exp(-nF(0,h) + h) = 1$), tandis que si h < 0 il s'agit d'un renouvellement transient (il faut se rappeler que F(0,h) = 0 dans ce cas). Avec cette définition, on a

Théorème 2.4.3. [47, Th. 2.3] Pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a la convergence faible

$$\mathbf{P}_{N}^{(h)} \stackrel{N \to \infty}{\Longrightarrow} \widetilde{\mathbf{P}}^{(h)}.$$
(2.4.8)

Plus explicitement, pour toute suite d'entiers $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}_N^{(h)}(\tau_1 = t_1, \dots, \tau_n = t_n) = \widetilde{\mathbf{P}}^{(h)}(\tau_1 = t_1, \dots, \tau_n = t_n).$$
(2.4.9)

On a donc que le processus limite contient un nombre fini et aléatoire de points (en fait, ce nombre est une variable géométrique) si h < 0, tandis que si h > 0 la cardinalité de τ est infinie et l'espacement entre deux points successifs est exponentiellement tendu.

Pour terminer cette discussion du modèle homogène, citons un résultat qui donne l'asymptotique précise de la fonction de partition (que nous noterons simplement Z_N^h) du modèle homogène dans les différentes phases :

Théorème 2.4.4. [47, Th. 2.2] On a pour $N \to \infty$

- si h > 0,

$$Z_N^h \sim \frac{e^{\mathbf{F}(0,h)N}}{\sum_{n\geq 1} n\widetilde{\mathbf{P}}^{(h)}(\tau_1 = n)};$$
 (2.4.10)

- si h < 0,

$$Z_N^h \sim \frac{e^h}{(1-e^h)^2} K(N);$$
 (2.4.11)

- si h = 0, on a $Z_N^h = \mathbf{P}(N \in \tau)$ et nous renvoyons à (2.2.4).

Le premier résultat nous dit que, dans la phase localisée, non seulement le comportement dominant de Z_N^h est donné par l'exponentiel de N fois l'énergie libre, mais aussi que le préfacteur sous-exponentiel est asymptotiquement constant.

2.5 Modèle hiérarchique d'accrochage

Un outil qui nous a énormément aidé dans la compréhension du modèle d'accrochage (2.2.2) est une version hiérarchique du modèle lui-même, introduite par Derrida, Hakim et Vannimenus [36]. Ici, "hiérarchique" signifie que (pour revenir à l'image de la Section 2.1), le polymère dirigé ne vit pas dans l'espace $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ mais sur un réseau hiérarchique en diamants (diamond lattice). Pour la définition récursive du réseau hiérarchique et une discussion de la relation entre le modèle hiérarchique et non hiérarchique, nous renvoyons à l'article original [36] (voir aussi la Figure 2.3).

Les modèles hiérarchiques sur des réseaux en diamants, qu'ils soient désordonnés ou pas [16, 14, 29, 30, 34], jouent un rôle essentiel dans l'étude des propriétés critiques des modèles de mécanique statistique, en particulier parce que les transformations du groupe de renormalisation dans l'espace réel, à la Migdal-Kadanoff, sont exactes dans ce contexte. En mots simples, pour ces modèles il est vrai par construction que la fonction de partition du système de taille N peut être écrite (de façon très simple) en fonction de celle du système de taille N/2, et cela sans aucune approximation du type de coarse-graining. Dans la plupart des cas, les modèles hiérarchiques sont introduits à côté de modèles plus réalistes, non hiérarchiques (on aura donc le modèle de Potts ou d'Ising hiérarchique, le modèle de verre de spin sur réseau hiérarchique, etc.). Il est toutefois important de souligner que les modèles hiérarchiques sur des réseaux en diamants ne sont pas des simplifications grossières de leurs analogues non hiérarchiques. Au fait, ils ont été introduits historiquement avec l'idée qu'il maintiendraient les caractéristiques essentielles associées aux modèles non hiérarchiques (en particulier : les exposants critiques !). Il serait donc très trompeur de penser aux modèles hiérarchiques comme à des approximations de champ moyen des modèles "vrais".

Le modèle que nous allons introduire dépend d'un paramètre B > 1, lié à la géométrie du réseau. La simplification principale du modèle hiérarchique est que la *loi de distribution* de la fonction de partition R_{n+1} du système de taille 2^{n+1} est en relation très simple avec la loi de la fonction de partition R_n du système de taille 2^n :

$$R_{n+1} \stackrel{\text{Loi}}{=} \frac{R_n R'_n + (B-1)}{B}$$
(2.5.1)

où l'égalité est en loi, et R'_n est une copie indépendante de R_n . Pour apprécier cette simplification, il est utile de remarquer dès maintenant que, pour le modèle d'accrochage (2.2.2) défini à partir du processus de renouvellement τ , on a que $Z_{N,\omega}$ peut être écrit en termes de tous les $Z_{i,\omega}$ pour i < N, mais non pas en fonction seulement de $Z_{N-1,\omega}$ ou de $Z_{N/2,\omega}$, cf. (3.4.16). Pour faire plus facilement le lien avec le modèle non hiérarchique, on choisit la condition initiale de la récursion (2.5.1) comme

$$R_0 = \exp(\beta\omega_0 + h), \qquad (2.5.2)$$

où ω_0 est une variable aléatoire centrée, avec variance 1 et à moments exponentiels finis : $M(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(\lambda\omega_0)) < \infty$. Comme il est discuté dans [48, Remark 2.1], on peut toujours se restreindre au cas 1 < B < 2, puisque le cas $2 < B < \infty$ peut se ramener au précédent avec une transformation linéaire de R_n : si R_n satisfait à la récursion (2.5.1) avec B > 2, alors $\widehat{R}_n := R_n/(B-1)$ satisfait à la même récursion, avec B remplacée par $\widehat{B} := B/(B-1) \in$ (1,2). Il se trouve aussi que le cas B = 2 est un peu pathologique (voir (2.5.7)-(2.5.8) ci-dessous) et finalement pas très intéressant ; nous ne le traiterons donc pas. Le cas B = 1est par contre trivial : dans ce cas, on a log $R_{n+1} \stackrel{\text{Loi}}{=} \log R_n + \log R'_n$ et donc la loi des grands nombres est suffisante pour calculer l'énergie libre.

En analogie avec (2.3.1) (nous utilisons les même notations, puisqu'il n'y a aucun danger de confusion), l'énergie libre du modèle est définie comme

$$\mathbf{F}(\beta, h) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{E} \log R_n \ge 0 \tag{2.5.3}$$

(la normalisation en 2^{-n} est due au fait que la "taille" du système au niveau n est 2^n , voir Figure 2.3). La ligne critique $h_c(\cdot)$ est encore donnée par la condition (2.3.6), les bornes "annealed" (2.3.8)-(2.3.9) sont encore valables et on peut encore définir l'exposant ν par (2.3.7). Bien sûr, l'énergie libre annealed est la limite de $2^{-n} \log \mathbb{E}R_n$, et $\mathbb{E}R_n$ est la solution de la récursion

$$\mathbb{E}R_{n+1} = \frac{(\mathbb{E}R_n)^2 + (B-1)}{B}$$
(2.5.4)

$$\mathbb{E}R_0 = \exp(h + \log M(\beta)). \tag{2.5.5}$$

Le solution du modèle homogène, ou annealed, demande donc d'étudier la récursion quadratique

$$x \mapsto \frac{x^2 + (B-1)}{B},$$
 (2.5.6)

qui entre parenthèses est un cas particulier de la célèbre Suite Logistique (Logistic Map), très connue dans la théorie des systèmes chaotiques. Il est intéressant de remarquer que, tandis que la récursion (2.5.6) qui définit le modèle hiérarchique homogène (ou annealed) est un système dynamique unidimensionnel, la récursion désordonnée (2.5.1) peut être vue comme un système dynamique en dimension infinie, si on regarde (2.5.1) comme une application dans l'espace des lois de probabilité sur \mathbb{R}^+ .

Comme pour le modèle non hiérarchique (Section 2.4) il est facile d'étudier le comportement critique du modèle annealed ou homogène. Une analyse de la stabilité des point fixes de l'application (2.5.6) permet de montrer assez facilement :

Théorème 2.5.1. ([36] ou [48, Th. 1.2]) Pour tout 1 < B < 2 on a $h_c(0) = 0$. De plus, il existe une constante positive c(B) telle que

$$c(B) h^{1/\alpha} \le F(0,h) \le c(B)^{-1} h^{1/\alpha}$$
(2.5.7)

pour 0 < h < 1, où

$$\alpha = \alpha(B) = \frac{\log(2/B)}{\log 2} \in (0, 1).$$
(2.5.8)

Les deux modèles désordonnés (hiérarchique et non hiérarchique) ont un comportement très similaire, si B est choisi de telle façon que $\alpha(B)$ coïncide avec le α qui apparaît dans (2.2.1) (remarquons toutefois que le modèle (2.2.2) avec $\alpha \ge 1$ n'a pas de correspondant hiérarchique, puisque $\alpha(B) < 1$; cela n'est pas très grave puisque, comme nous le verrons dans le Chapitre 3, le cas le plus intéressant est de toute façon $0 < \alpha < 1$).

L'analogie entre les modèles hiérarchique et non hiérarchique n'est pas complète, entre autres parce que la fonction $L(\cdot)$ de (2.2.1) n'a pas d'analogue dans la récursion (2.5.1). Une façon d'introduire quelque chose de similaire à $L(\cdot)$ dans le contexte hiérarchique serait de remplacer B par $B_n = B a_n$ dans (2.5.1), avec $a_n \to 1$. Il est vraisemblable que, pour une $L(\cdot)$ à variation lente donnée, il existe une suite a_n telle que les modèles homogènes hiérarchique et non hiérarchique ont le même comportement critique. Nous n'avons pas poussé notre étude dans cette direction.

Le rôle que le modèle hiérarchique a joué dans notre processus de compréhension du modèle d'accrochage "vrai" peut être difficilement surestimé : c'est dans ce contexte que nous avons eu l'idée de la méthode des moments fractionnaires/changement de la mesure (voir Section 3.4.4) qui nous a permis de montrer la pertinence du désordre pour $\alpha > 1/2$, et c'est encore dans ce contexte que nous avons compris la nécessité d'introduire des corrélations entre les charges ω_n pour pouvoir traiter le cas marginal $\alpha = 1/2$ (Section 3.4.4).

Nous terminons cette section en remarquant que, comme nous l'avons montré dans [49], il existe un joli lien entre le modèle d'accrochage hiérarchique et les arbres de Galton-Watson (GW) [60]. Considérons un arbre de GW où chaque individu a soit zéro enfants, et cela avec probabilité (B-1)/B, soit deux enfants, avec probabilité 1/B, cf. Figure 2.4. Remarquons que, puisque $B \in (1, 2)$, le nombre moyen d'enfants par individu, 2/B, est plus grand que 1 : le processus est sur-critique et sa taille croît exponentiellement avec l'index de la génération. Soit \mathbf{E}_n la loi d'un tel arbre de GW à n générations. Les individus qui peuvent être présents à la génération n sont labelisés par un index i compris entre 1 et



FIGURE 2.3. Pour une valeur donnée $B = 2, 3, \ldots$ (B = 3 dans le dessin) on construit un réseau hiérarchique de façon itérative : à chaque pas on remplace chaque arête par Bbranches de 2 arêtes chacune. Une trajectoire sur le réseau au *niveau* n est un chemin qui lie d_0 à d_{2^n} : deux trajectoires, a et b, sont indiquées par une ligne épaisse. Au niveau n, chaque trajectoire est formée par 2^n arêtes et il y a N_n trajectoires, $N_0 = 1$ et $N_{n+1} = BN_n^2$. On choisit une trajectoire particulière (dont les vertex sont appelés $d_0, d_1, \ldots, d_{2^n}$) : elle est marquée par une triple ligne dans le dessin et elle joue le rôle du défaut. On associe des charges $u_j := \beta \omega_j + h$ (négatives ou positives) aux arêtes du défaut : par exemple, la trajectoire a a une énergie nulle, tandis que la trajectoire b a énergie $u_1 + u_2$. Si on appelle R_n la fonction de partition de ce modèle, divisée par le nombre de trajectoires N_n , il est immédiat de dériver la récursion (2.5.1). La récursion elle-même est bien définie pour tout $B \in \mathbb{R}$ non nul : on peut donc oublier le réseau hiérarchique et retenir simplement la récursion.

 2^n (le nombre d'individus effectivement présents est une variable aléatoire qui prend des valeurs entiers pairs compris entre 0 et 2^n). Alors, on peut voir facilement que la variable aléatoire R_n définie par l'itération (2.5.1) peut être écrite comme

$$R_n = \mathbf{E}_n \left[e^{\sum_{i=1}^{2^n} (\beta \omega_i + h) \delta_i} \right]$$

où δ_i vaut 1 si l'individu *i* est présent à la génération *n*, et 0 sinon. L'avantage d'une telle écriture pour R_n est qu'elle rend le lien avec la fonction de partition du modèle d'accrochage non hiérarchique beaucoup plus évident, cf. (2.2.3).

2.6 Les questions que l'on se pose

Nous avons déjà donné dans le chapitre introductif un aperçu des principaux défis et questions que pose le modèle d'accrochage désordonné. Grâce aux définitions que nous



FIGURE 2.4. L'arbre de GW avec n = 4 générations. Chaque individu a soit 0 soit 2 enfants, et cela indépendamment des autres individus. À la génération n, seulement les individus 3, 4, 5, 6, 13, 14 sont présents dans l'exemple du dessin. On a donc $\delta_i = 1$ si et seulement si i est une de ces valeurs.

avons donnés dans le présent chapitre, nous pouvons maintenant formuler ces questions plus précisément. Cette petite liste servira aussi comme guide pour la lecture des chapitres qui suivent.

- 1. Comment se comporte la différence $h_c(\beta) h_c^{\text{ann}}(\beta)$ pour β petit ? En particulier, y a-t-il des situations où $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$? (Sections 3.3 et 3.4)
- 2. Comment se comporte $F(\beta, \cdot)$ près de $h = h_c(\beta)$? L'exposant critique $\nu(\beta)$ coïncidet-il avec $\nu(0) = 1/\min(1, \alpha)$? (Section 3.2)
- 3. Quel est le rapport entre l'exposant critique ν (voir (2.3.7)) et les autres exposants critiques de la transition (e.g., celui qui donne la divergence de la longueur de corrélation près du point critique)? (Section 4.3)
- 4. Peut-on décrire précisément les propriétés trajectorielles (globales et locales) de la mesure de Gibbs dans la limite $N \to \infty$, dans les deux phases \mathcal{L} et \mathcal{D} ? (Chapitre 4)
- 5. La transition de localisation a-t-elle un correspondant dynamique? (Chapitre 5)

Cette liste n'est certainement pas exhaustive, mais elle reflète les aspects qui nous ont motivé le plus pendant notre étude, et sur lesquels nous avons concentré notre attention.

PERTINENCE DU DÉSORDRE ET "CRITÈRE DE HARRIS"

3

Dans ce chapitre nous allons discuter la question de la pertinence du désordre, c'est à dire la question de savoir si un désordre faible ($\beta \ll 1$) change le propriétés critiques du modèle homogène ($\beta = 0$) et si le point critique quenched est décalé ou pas par rapport au point critique annealed. Nous verrons que le critère est très simple : on a pertinence du désordre si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}^2(n \in \tau) = \infty.$$
(3.0.1)

Pour être précis, la preuve de l'affirmation "si" est pour l'instant soumise à une hypothèse technique sur la fonction à variation lente $L(\cdot)$, comme on le verra dans le Théorème 3.4.7, tandis que la partie "seulement si" est complètement sous contrôle.

Avant de passer à la présentation des résultats mathématiques sur ces questions, remarquons que, grâce au comportement asymptotique (2.2.4) de la fonction de Green $\mathbf{P}(n \in \tau)$, le désordre sera non pertinent pour $\alpha < 1/2$ et pertinent pour $\alpha > 1/2$. Dans le cas marginal $\alpha = 1/2$, on aura pertinence si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nL^2(n)} = \infty.$$
(3.0.2)

Remarquons aussi que la condition (3.0.1) peut être récrite comme

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}(|\tau \cap \tau'|) = \infty, \tag{3.0.3}$$

où τ' est une copie indépendante de τ , et $|\tau \cap \tau'|$ dénote la cardinalité de l'intersection des deux processus de renouvellement. Il est immédiat de voir que $\tau \cap \tau'$ est lui aussi un processus de renouvellement. On a donc pertinence du désordre si et seulement si le renouvellement $\tau \cap \tau'$ est récurrent.

3.1 L'argument heuristique de Harris

Essayons d'abord de justifier heuristiquement le critère de pertinence (3.0.1) et de prédire quel sera le décalage du point critique dans le cas où la condition (3.0.1) est satisfaite. L'heuristique que nous allons présenter prend le nom de *critère de Harris*, puisque

elle est inspirée par un argument développé par A. B. Harris dans l'étude de la pertinence du désordre pour la transition paramagnétique/ferromagnétique du modèle d'Ising [59].

Pour simplicité d'exposition, nous allons faire deux simplifications dans la discussion qui suit :

- nous allons nous restreindre au cas de désordre Gaussien (le cas général est presque identique, mais les formules sont moins explicites);
- nous allons oublier la condition au bord $\mathbf{1}_{\{N\in\tau\}}$ dans la définition (2.2.3) de la fonction de partition, i.e., nous considérons un système qui n'est pas contraint à toucher le défaut à son bord droit.

Pour simplicité de notation, nous appellerons $\Delta = h - h_c^{\text{ann}}(\beta)$, et la région qui nous intéresse est $\Delta > 0$. Avec cette convention, on aura donc que l'énergie libre annealed n'est rien d'autre que $F(0, h + \log M(\beta)) = F(0, \Delta)$.

L'idée de départ est simplement d'essayer à développer l'énergie libre pour β petit, prenant comme point de départ l'énergie libre annealed. Ensuite, on essaie de comprendre si, près du point critique annealed, le premier terme correctif dans le développement est effectivement petit par rapport au terme d'ordre zéro (l'énergie libre annealed), auquel cas on peut argumenter que le propriétés critiques quenched et annealed seront les mêmes, ou au contraire il est beaucoup plus grand, auquel cas le développement n'est pas justifié et l'énergie libre annealed est clairement une mauvaise approximation.

On écrit donc

$$\mathbb{E} \log Z_{N,\omega} = \mathbb{E} \log[\mathbb{E} Z_{N,\omega} + (Z_{N,\omega} - \mathbb{E} Z_{N,\omega})]$$

$$\simeq \log \mathbb{E} Z_{N,\omega} - 1/2 \frac{\operatorname{Var}(Z_{N,\omega})}{(\mathbb{E} Z_{N,\omega})^2} + \dots$$
(3.1.1)

où nous avons développé le logarithme au deuxième ordre. En réalité, on verra dans la Section 3.4.1 que la variance de $Z_{N,\omega}$ diverge exponentiellement en N (dès que $h > h_c^{ann}(\beta)$, i.e. si $\Delta > 0$) et donc le développement ne serait jamais justifié si on laissait tendre Nvers l'infini. Par contre, ce que l'on va faire est de choisir $N = N(\beta, h)$ de l'ordre de la longueur de corrélation du modèle annealed. Comme on le discutera dans la Section 4.3, cette longueur de corrélation est de l'ordre de l'inverse de l'énergie libre annealed, $1/F(0, \Delta)$. On peut montrer par exemple que, pour N de l'ordre de $1/F(0, \Delta)$, la moyenne de la fonction de partition est d'ordre 1, et que elle est beaucoup plus grande que 1 si $N \gg 1/F(0, \Delta)$. Le critère qui décide si le développement (3.1.1) est justifié devient donc

$$\frac{\operatorname{Var}(Z_{1/F(0,\Delta),\omega})}{(\mathbb{E}Z_{1/F(0,\Delta),\omega})^2} \ll 1.$$
(3.1.2)

Or, un calcul Gaussien élémentaire montre que

$$\frac{\operatorname{Var}(Z_{N,\omega})}{(\mathbb{E}Z_{N,\omega})^2} = \frac{\mathbf{E}^{\otimes 2} \left(e^{(\beta^2/2) \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{n \in \tau \cap \tau'\}} + \Delta \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{1}_{\{n \in \tau\}} + \mathbf{1}_{\{n \in \tau'\}})}{(\mathbb{E}Z_{N,\omega})^2} - 1, \quad (3.1.3)$$

où τ' est une copie indépendante de τ . À l'aide de cette expression, il n'est pas difficile de se convaincre (voir la discussion à la fin de cette section) que, pour β petit, le côté gauche

de (3.1.2) est $\gg 1$ (respectivement, $\ll 1$) si $\Delta \ll \Delta(\beta)$ (respectivement, $\Delta \gg \Delta(\beta)$), où $\Delta(\beta)$ est la solution (si elle existe) de l'équation

$$\beta^2 \sum_{n=1}^{1/F(0,\Delta)} \mathbf{P}^2(n \in \tau) = 1.$$
(3.1.4)

Si cette équation n'admet pas de solution, on posera $\Delta(\beta) := 0$.

Discutons les conséquences de ce fait :

- Tout d'abord, il est clair que n'y a pas de solution de (3.1.4) pour β petit si la condition (3.0.1) n'est pas satisfaite : on a donc $\Delta(\beta) = 0$ et $\Delta \gg \Delta(\beta)$ toujours. On s'attend donc, dans ce cas, que pour désordre suffisamment faible le développement (3.1.1) autour du modèle annealed soit justifié, et donc que le point critique et exposant critique quenched coïncident avec les quantités annealed.
- Supposons au contraire que (3.0.1) soit satisfaite. Il est évident, grâce à la monotonie de $\Delta \mapsto F(0, \Delta)$, que (3.1.4) admet une unique solution $\Delta(\beta) > 0$ pour tout $\beta > 0$. Si on reprend le Théorème 2.4.2 et la formule (2.2.4), on voit que, pour β petit, on a

$$\Delta(\beta) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} \begin{cases} \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \check{L}(1/\beta) & \text{si } 1/2 < \alpha \le 1\\ \beta^2 / \mathbf{E}[\tau_1] & \text{si } \mathbf{E}[\tau_1] < \infty, \end{cases}$$
(3.1.5)

avec $\dot{L}(\cdot)$ une fonction à variation lente (qui dépend de $L(\cdot)$). En particulier, si $1/2 < \alpha < 1$ et $L(\cdot)$ est asymptotiquement constante alors $\check{L}(\cdot)$ l'est aussi. Dans le cas $\alpha = 1/2$ et sous l'hypothèse (3.0.1), on voit facilement que $\Delta(\beta)$ s'annule plus vite que toute puissance de β pour $\beta \searrow 0$. Par exemple, si $\lim_{n\to\infty} L(n) = C$ on trouve (cf. (2.2.4) et le Théorème 2.4.2) que

$$\log(\Delta(\beta)) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} -\frac{2\pi^2 C^2}{\beta^2}.$$
(3.1.6)

Reprenant la discussion ci-dessus, on s'attend donc que pour $0 < \Delta \ll \Delta(\beta)$ le désordre change qualitativement l'énergie libre (et cela même si β est très petit). En fait, comme on le verra dans les Sections 3.2 et 3.4.2, pour $\alpha > 1/2$ on pourra montrer que le décalage du point critique par rapport à la valeur annealed est justement de l'ordre $\Delta(\beta)$ et que $\nu(\beta) \neq \nu(0)$, où ν est l'exposant critique de l'énergie libre, défini en (2.3.7).

Nous devons encore justifier l'affirmation que (pour β petit) la condition (3.1.2) correspond à $\Delta \gg \Delta(\beta)$. Nous allons plutôt montrer l'implication inverse, i.e. que si $\Delta \ll \Delta(\beta)$ alors le côté gauche de (3.1.2) est très grand. On a en effet, puisque $\mathbb{E}Z_{1/F(0,\Delta),\omega}$ est d'ordre 1, et utilisant (3.1.3) et $\Delta > 0$,

$$\frac{\operatorname{Var}(Z_{1/\mathrm{F}(0,\Delta),\omega})}{(\mathbb{E}Z_{1/\mathrm{F}(0,\Delta),\omega})^{2}} \geq \operatorname{const} \times \mathbf{E}^{\otimes 2} \left(e^{(\beta^{2}/2) \sum_{n=1}^{1/\mathrm{F}(0,\Delta)} \mathbf{1}_{\{n\in\tau\cap\tau'\}}} \right) \quad (3.1.7)$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\geq} \operatorname{const} \times \exp \left[(\beta^{2}/2) \mathbf{E}^{\otimes 2} \left(\sum_{n=1}^{1/\mathrm{F}(0,\Delta)} \mathbf{1}_{\{n\in\tau\cap\tau'\}} \right) \right]$$

$$\overset{\text{independance de } \tau,\tau'}{=} \operatorname{const} \times \exp \left[(\beta^{2}/2) \sum_{n=1}^{1/\mathrm{F}(0,\Delta)} \mathbf{P}^{2}(n\in\tau) \right].$$

À ce point, si on se rappelle que $\Delta(\beta)$ est la solution de (3.1.4) et qu'on a supposé la validité de la condition (3.0.1), on voit immédiatement que si $\Delta/\Delta(\beta)$ tend vers zéro l'exposant dans (3.1.7) diverge.

3.1.1 Un autre argument heuristique, et une longue controverse

Nous allons maintenant présenter un autre argument heuristique concernant la pertinence du désordre : même si à première vue il est assez similaire à celui de la section précédente, on verra qu'il fournit un critère de pertinence qui ne coïncide pas exactement avec (3.0.1)! Comme nous allons le discuter, cette ambiguïté a donné vie à une longue controverse dans la littérature physique, qui a pu être décidée rigoureusement seulement récemment (voir le Théorème 3.4.6).

Encore une fois, on va développer l'énergie libre autour de sa valeur annealed, pour β petit. On part de l'identité (ici on va encore supposer pour simplicité que le désordre est Gaussien)

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_{N,\omega} = \frac{1}{N}\log\mathbb{E}Z_{N,\omega} + \frac{1}{N}\mathbb{E}\log\frac{Z_{N,\omega}}{\mathbb{E}Z_{N,\omega}}$$

$$= \frac{1}{N}\log\mathbb{E}Z_{N,\omega} + \frac{1}{N}\mathbb{E}\log\left\langle e^{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega_n - \beta^2/2)\delta_n} \right\rangle_{\Delta},$$
(3.1.8)

où $\langle \ldots \rangle_{\Delta}$ dénote la mesure de Gibbs du modèle annealed :

$$\langle f(\tau) \rangle_{\Delta} := \frac{\mathbf{E} \left[f(\tau) \exp \left(\Delta \sum_{n=1}^{N} \delta_n \right) \right]}{\mathbf{E} \left[\exp \left(\Delta \sum_{n=1}^{N} \delta_n \right) \right]}.$$
(3.1.9)

À ce point, on fait un développement limité de (3.1.8) au deuxième ordre en β et on prend la limite $N \to \infty$. Le premier terme donne évidemment l'énergie libre annealed, tandis que le terme d'ordre β s'annule comme conséquence de $\mathbb{E} \omega_n = 0$. On trouve enfin, après quelques lignes de calcul élémentaire,

$$F(\beta, h) = F(0, \Delta) - \frac{\beta^2}{2} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \langle \delta_n \rangle_{\Delta}^2 + O(\beta^3)$$

$$= F(0, \Delta) - \frac{\beta^2}{2} (\partial_{\Delta} F(0, \Delta))^2 + O(\beta^3).$$
(3.1.10)

Dans la dernière égalité nous avons utilisé le Théorème 2.4.3 et le Théorème du Renouvellement [8]. Tout comme pour le développement (3.1.1) de la section précédente, on va donc examiner le premier terme correctif pour voir s'il est effectivement négligeable par rapport au terme d'ordre zéro. Pour cela, on reprend le Théorème 2.4.2 qui décrit le comportement de l'énergie libre annealed près de son point critique $\Delta = 0$. On voit donc que

1. si $\alpha < 1/2$ et β, Δ sont petits on a

$$F(0,\Delta) \simeq \Delta^{1/\alpha} \widehat{L}(1/\Delta) \gg \beta^2 \left(\partial_{\Delta} F(0,\Delta)\right)^2 \simeq \beta^2 \Delta^{2/\alpha-2} \widehat{L}(1/\Delta)^2 \qquad (3.1.11)$$

et le désordre sera donc non pertinent;
2. si $1/2 < \alpha \le 1$ on a

$$F(0,\Delta) \ll \beta^2 \left(\partial_\Delta F(0,\Delta)\right)^2 \tag{3.1.12}$$

dès que

$$\Delta \widehat{L}(1/\Delta)^{\alpha/(1-2\alpha)} \ll \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \tag{3.1.13}$$

et si $\alpha > 1$ on a (3.1.12) dès que $\Delta \ll \beta^2$. Le désordre sera donc pertinent pour $\alpha > 1/2$.

Jusqu'à là, les prédictions coïncident avec celles déduites à l'aide du développement (3.1.1). La différence émerge quand on considère le cas $\alpha = 1/2$: on a en fait (3.1.12) pour Δ suffisamment proche de zéro, qui suggère pertinence du désordre, si et seulement si la fonction à variation lente $\hat{L}(\cdot)$ diverge à l'infini, i.e. si la fonction $L(\cdot)$ tend vers zéro (cf. le Théorème 2.4.2). Ce critère est donc très différent de celui qu'on a déduit dans la section précédente, et qui prévoyait pertinence du désordre (pour $\alpha = 1/2$) si et seulement si (3.0.2) est satisfaite. En particulier, dans le cas où la fonction $L(\cdot)$ est asymptotiquement constant, la condition (3.0.2) indique pertinence du désordre, tandis que l'argument basé sur le développement (3.1.10) semble indiquer plutôt la non pertinence.

Évidemment, la validité des deux développements (3.1.1) et (3.1.10), ainsi que le choix de les arrêter au deuxième ordre, sont très douteux. Toutefois, le point que nous tenons à souligner est que dans la littérature physique il y a eu une longue controverse concernant le cas marginal $\alpha = 1/2$: dans le cas de $L(\cdot)$ asymptotiquement constant, Derrida *et al.* [36] (et plus tard [10, 75]) se sont prononcés en faveur de la pertinence du désordre (en particulier $h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta) \sim \Delta(\beta)$, avec $\Delta(\beta) > 0$ donné par (3.1.6)), tandis que Forgacs *et al.* [42] (et plus tard [56, 43]) se sont prononcés pour sa non pertinence et, en particulier, pour $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$. Rappelons aussi que le cas où $L(\cdot)$ est asymptotiquement constante correspond à des situations très naturelles comme le modèle de mouillage ou d'accrochage de polymères dirigés en dimension (1 + 1).

3.2 Discontinuité de l'exposant critique pour $\alpha > 1/2$

Il est connu que, dans diverses situations, la présence de désordre (même très faible, mais spatialement ergodique) peut éliminer ou au moins "lisser" une transition de phase. C'est le cas par exemple du modèle d'Ising : la transition de phase du premier ordre (discontinuité de l'aimantation en fonction du champ magnétique h, au point h = 0), que l'on observe à basse température pour le modèle homogène, disparaît en dimension d = 2 si on introduit un champ magnétique aléatoire arbitrairement faible [63, 2] (pour des modèles ferromagnétiques avec spins continus, la discontinuité de l'aimantation par rapport à h disparaît dès que $d \leq 4$ [63, 2].) Dans un article écrit en collaboration avec G. Giacomin et paru sur la revue Communications in Mathematical Physics, nous avons montré que pour le modèle d'accrochage désordonné l'énergie libre s'annule près du point critique $h_c(\beta)$ au moins aussi vite que le carré de $(h - h_c(\beta))$ (une transition du premier ordre est donc exclue pour $\beta > 0$). Le résultat semble donc à première vue dans l'esprit de celui de Aizenman et Wehr cité ci-dessus [2] (élimination de transitions du premier ordre), mais comme nous le discuterons brièvement juste après la formulation du Théorème 3.2.1, il est basé sur des idées très différentes. **Théorème 3.2.1.** [53, Th. 2.1] Si la loi \mathbb{P} satisfait l'hypothèse (H3) ou (H4), pour tout $0 < \beta < \infty$ il existe une constante $0 < c(\beta) < \infty$ telle que pour toute $K(\cdot)$ de la forme (2.2.1) on a

$$\mathbf{F}(\beta,h) \le (1+\alpha)c(\beta)(h-h_c(\beta))^2 \tag{3.2.1}$$

si $h > h_c(\beta)$. Dans le cas Gaussien ($\omega_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$) on peut choisir $c(\beta) = 1/(2\beta^2)$.

Avec H. Lacoin [67], j'ai montré un résultat analogue pour le modèle d'accrochage hiérarchique (voir Section 2.5) : dans le cas de désordre Gaussien, et pour tout 1 < B < 2, il existe une constante positive c(B) telle qu'on a $F(\beta, h) \leq c(B)(h-h_c(\beta))^2/\beta^2$ si $h > h_c(\beta)$.

Les idées que conduisent à la preuve du Théorème 3.2.1 sont esquissées dans la Section 3.2.1. Ici, nous allons faire quelques commentaires de caractère plus général.

1. Nous nous concentrons dans ce chapitre sur la question de la "pertinence du désordre", et dans ce sens l'inégalité (3.2.1) est bien sûr particulièrement significative quand $\alpha > 1/2$ (cf. Théorème 2.4.2) : avec la notation de (2.3.7), on peut en effet déduire que

$$\nu(\beta) \ge 2 > \frac{1}{\min(1,\alpha)} = \nu(0). \tag{3.2.2}$$

Le désordre ω donc non seulement élimine la transition du premier ordre quand $\alpha > 1$, mais plus généralement change l'ordre de la transition pour $\alpha > 1/2$ ($\nu(\beta)$ est discontinu pour $\beta \searrow 0$). Pour $\alpha = 1/2$, l'inégalité (3.2.1) est compatible avec $\nu(\beta) = \nu(0) = 2$ mais, en vue du Théorème 3.4.7 ci-dessous, il n'y a pas de raison de s'attendre à ce que cette égalité soit vraie.

2. Rappelons que pour le modèle de Poland-Scheraga de dénaturation de l'ADN (Section 1.1.2) on prend $\alpha \sim 1.15 > 1$. La transition est donc du premier ordre dans le cas homogène, et la question de savoir si elle deviendrait du deuxième ordre en présence de désordre était débattue dans la littérature [45, 31], avant notre preuve du Théorème 3.2.1.

Mentionnons aussi que, expérimentalement, la nature et l'ordre de la transition de dénaturation ne sont pas très clairs. En particulier, on n'observe pas une transition de phase nette (et lisse, comme prévu par le Théorème 3.2.1). Cela est probablement dû au fait que les molécules d'ADN réelles sont bien loin d'être de taille infinie (ce qui induit une dépendance de la température de dénaturation par rapport à l'échantillon) et deuxièmement que le modèle lui-même est plutôt grossier (en particulier, l'hypothèse que le type d'une base donnée est une variable aléatoire décorrelée des autres est assez discutable).

3. Le Théorème 3.2.1 évoque à première vue un résultat célèbre de Chayes *et al.* [27]. Les auteurs de [27], eux aussi motivés par le but de donner des bases rigoureuses au critère de Harris, ont montré que si ξ est la longueur de corrélation du modèle d'Ising en dimension d avec couplages ferromagnétiques aléatoires, i.e. le taux de décroissance exponentielle de la fonction à deux points moyennée sur la réalisation des couplages aléatoires, $\mathbb{E}\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$, alors, quand la température approche la température critique, ξ diverge au moins comme $|T - T_c|^{-2/d}$. La similarité avec notre résultat est, comme on le verra dans la Section 4.3, que notre exposant ν est lui aussi l'exposant de la

divergence d'une longueur de corrélation pour $h \to h_c(\beta)$. Il s'agit toutefois d'une similarité plutôt trompeuse, parce qu'il s'agit dans un cas de la fonction à deux points moyennée et dans l'autre de la fonction à deux points à désordre fixé. Les preuves des deux théorèmes sont elles aussi complètement orthogonales.

4. La preuve par Aizenman et Wehr de l'absence de transition de phase du premier ordre pour le modèle d'Ising bidimensionnel en champ aléatoire est basée sur un argument d'Imry et Ma, qui revient à comparer l'effet des conditions au bord (qui tendent à sélectionner une phase pure, disons la phase +, et donc à créer une aimantation spontanée) avec celui des fluctuations du champ aléatoire (qui tendent à détruire l'aimantation spontanée). L'effet du champ magnétique domine en dimension $d \leq 2$, tandis que ce sont les conditions au bord qui gagnent pour $d \geq 3$ (si le désordre est faible). Dans la preuve du Théorème 3.2.1, par contre, les conditions au bord ne semblent jouer aucun rôle important.

3.2.1 Un argument de grandes déviations

Le Théorème 3.2.1 est démontré en tout détail dans [53]. Ici, nous allons présenter un argument simplifié qui clarifie le noyau de la méthode. Supposons, par souci de simplicité, que le désordre soit Gaussien : $\omega_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Nous allons fixer une échelle de longueur ℓ qui satisfait $1 \ll \ell \ll N$, et nous allons subdiviser le système en $k = N/\ell$ blocs B_0, \ldots, B_{k-1} de longueur $\ell : B_j = \{j\ell + 1, \ldots, (j+1)\ell\}$. Pour une réalisation donnée ω du désordre, on va sélectionner les blocs, que l'on appellera *blocs favorables*, où la somme des charges est environ $\delta \ell/\beta$, i.e., on va définir

$$\mathcal{I}(\omega) = \left\{ 0 \le j \le k - 1 : \sum_{n=\ell j+1}^{\ell(j+1)} \omega_n \sim \ell \delta / \beta \right\}.$$

Des considération élémentaires de grandes déviations montrent qu'il y aura typiquement $M_{typ} = (N/\ell)e^{-\ell\delta^2/(2\beta^2)}$ blocs favorables, séparés l'un de l'autre par une distance typique $d_{typ} = \ell e^{+\ell\delta^2/(2\beta^2)}$. Ensuite, on va sélectionner toute les configurations de τ qui contiennent un point à chacun des deux bouts de chaque bloc favorable B_j , avec $j \in \mathcal{I}(\omega)$, et qui ne contiennent aucun point dans les blocs qui ne sont pas favorables (i.e., $\tau \cap B_j = \emptyset$ pour tout $j \notin \mathcal{I}(\omega)$), voir la Figure 3.1. Nous appelons \mathcal{I}_{ω} la collection de toutes ces configurations de τ . Manifestement, on obtient une borne inférieure pour l'énergie libre si on restreint la fonction de partition $Z_{N,\omega}$ aux configurations sélectionnées :

$$\frac{1}{N}\log Z_{N,\omega} \ge \frac{1}{N}\log \mathbf{E}\left(e^{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega_n+h)\delta_n}\mathbf{1}_{\{\tau\in\mathcal{T}_{\omega}\}}\delta_N\right).$$
(3.2.3)

Grâce à la propriété de renouvellement de τ , la moyenne par rapport à **P** au côté droit de (3.2.3) se factorise en un produit de moyennes, une pour chaque "bloc favorable", et une pour chaque excursion qui correspond à un groupe de blocs "non favorables" adjacents (cf. Fig. 3.1). Remarquons que conditionner la moyenne empirique de ℓ variables Gaussiennes standards indépendantes à être proche de $\delta \ell / \beta$ est équivalent, pour ℓ grand, à décaler la moyenne de chaque variable de 0 à δ / β , en gardant au même temps leur indépendance et leur variance à 1. Par conséquent, dans chaque "bloc favorable" le modèle a en effet les



FIGURE 3.1. Une configuration typique de \mathcal{T}_{ω} , qui contribue à la borne inférieure (3.2.3). Ici $k = 10, \ell = 8$ et $\mathcal{I}(\omega) = \{3, 9\}$, i.e., les blocs favorables sont B_3 et B_9 . À remarquer que $n \notin \tau$ pour n qui appartient à B_j avec $j \notin \mathcal{I}(\omega)$ (blocs non favorables), avec l'exception de n sur le bord d'un bloc favorable B_j (avec bien sûr $j \in \mathcal{I}(\omega)$). Dans la figure on a dénoté par x, y les deux bords de B_3 , et par z, N les bords de B_9 . À l'intérieur de $B_j, j \in \mathcal{I}(\omega)$ (blocs favorables), τ n'est soumise à aucune contrainte. Les excursions L_0, L_1, \ldots sont typiquement de longueur $\ell \exp(\ell \delta^2/(2\beta^2))$. Puisque la configuration τ doit satisfaire à la contrainte $\tau \supset \{0, x, y, z, N\}$, on voit que $Z_{N,\omega}$ se factorise en 4 termes.

paramètres thermodynamiques $(\beta', h') = (\beta, h + \delta)$. Observons aussi que chaque longue excursion entre deux blocs favorables produit une "perte entropique"

$$\log K(d_{typ}) \sim -\frac{(\alpha+1)\ell\delta^2}{2\beta^2} + O(\log \ell), \qquad (3.2.4)$$

cf. (2.2.1).

Maintenant, prenons le système *au point critique*, $h = h_c(\beta)$, et considérons la limite $N \to \infty$ dans (3.2.3). Grâce à la loi des grands nombres, la contribution à l'énergie libre des blocs favorables converge à leur densité, $\rho = \ell^{-1} e^{-\ell\delta^2/(2\beta^2)}$, fois la contribution moyenne de chaque bloc favorable, qui vaut

$$\mathbb{E}\log Z_{\ell,\omega}(\beta, h+\delta) = \ell \left[\mathbb{F}(\beta, h_c(\beta) + \delta) + o(1) \right]$$

pour ℓ grand (ici et dans la suite, le terme d'erreur o(1) dénote une quantité non aléatoire qui s'annule dans la limite $\ell \to \infty$). De façon similaire, la contribution due aux excursions converge à ρ fois $\ell(-(\alpha+1)\delta^2/(2\beta^2)+o(1))$ (voir la formule (3.2.4)). En conclusion, (3.2.3) implique que

$$0 = \mathsf{F}(\beta, h_c(\beta)) \ge e^{-\frac{\ell \delta^2}{2\beta^2}} \left(\mathsf{F}(\beta, h_c(\beta) + \delta) - \frac{(\alpha + 1)\delta^2}{2\beta^2} + o(1) \right).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{F}(\beta, h_c(\beta) + \delta) \le \frac{\alpha + 1}{2\beta^2} \delta^2 + o(1)$$

pour tout ℓ fini. Puisque ℓ peut être arbitrairement grand (cela est vrai parce qu'on a déjà pris la limite $N \to \infty$!), on obtient (3.2.1).

La preuve du Théorème dans le cas non Gaussien est techniquement assez plus compliquée et nous renvoyons à [53].

3.3 La région de désordre fort : comment faire mieux de Jensen sans trop se fatiguer

Avec cette section, nous commençons à entrer dans le cœur de la question de la relation entre le point critique "quenched" et celui "annealed". Même si la borne annealed (2.3.8), qui revient à interchanger la moyenne sur le désordre et le logarithme, peut paraître très simpliste, il n'est pas évident comment faire mieux. Une idée assez naturelle est celle de la méthode de Morita [71], que l'on peut appeler aussi "constrained annealing". L'idée est simplement que, pour toute fonction $f(\omega)$ telle que $\mathbb{E}f(\omega) = 0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\log \mathbf{E}[\exp(H_{N,\omega}(\tau))] = \mathbb{E}\log \mathbf{E}[\exp(H_{N,\omega}(\tau) + \lambda f(\omega))] \\\leq \log \mathbb{E}\mathbf{E}[\exp(H_{N,\omega}(\tau) + \lambda f(\omega))], \quad (3.3.1)$$

où $H_{N,\omega}(\tau)$ est le Hamiltonien du système (dans le cas du modèle d'accrochage $H_{N,\omega}(\tau) = \sum_n (\beta \omega_n + h) \delta_n$, mais la méthode de Morita est applicable en grande généralité). En général, cette borne est meilleure que la borne annealed toute simple (2.3.8), i.e., le côté droit de (3.3.1) ne prend pas nécessairement sa valeur minimale pour $\lambda = 0$. D'autre part, ce qui nous intéresse n'est pas tellement d'améliorer la borne $F(\beta, h) \leq F^{ann}(\beta, h)$, mais plutôt l'inégalité $h_c(\beta) \geq h_c^{ann}(\beta)$. De ce point de vue, la méthode de Morita ne peut pas nous aider beaucoup : en fait, F. Caravenna et G. Giacomin ont montré [24] que, si on se restreint à des fonctions $f(\omega)$ de la forme $f(\omega) = \sum_{n=0}^N g(\theta^n \omega)$, avec g une fonction locale et $(\theta^n \omega)_m = \omega_{n+m}$, la borne (3.3.1) ne donne rien de mieux que $h_c(\beta) \geq h_c^{ann}(\beta)$. On pourrait bien sûr considérer des fonctions f plus compliquées, mais le problème est que dans ce cas il n'est plus du tout évident de calculer le côté droit de (3.3.1).

Dans un papier [77] que j'ai publié dans la revue Annals of Applied Probability, j'ai trouvé une façon de sortir de cette impasse et de montrer que, au moins pour désordre fort (i.e., β suffisamment grand) les deux points critiques ne coïncident pas, et cela indépendamment de la valeur de α (pourvu que $\alpha > 0$; pour le cas $\alpha = 0$, cf. le Théorème 3.4.3 ci-dessous). L'observation de base est que la moyenne de $Z_{N,\beta}$ peut bien diverger exponentiellement en N (ce qui donne une énergie libre annealed positive), mais au même temps il se peut que $\mathbb{E}(Z_{N,\beta}^{\gamma})$ soit borné uniformément en N, pour un certain $0 < \gamma < 1$. Si cela est le cas, on voit immédiatement que

$$\mathbf{F}(\beta,h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\gamma N} \mathbb{E} \log Z_{N,\beta}^{\gamma} \le \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\gamma N} \log \mathbb{E}(Z_{N,\beta}^{\gamma}) = 0,$$
(3.3.2)

i.e., $h_c(\beta) > h_c^{\text{ann}}(\beta)$.

Pour évaluer les moments fractionnaires de la fonction de partition, commençons par décomposer $Z_{N,\beta}$ selon le nombre ℓ et la position i_1, \ldots, i_ℓ des points contenus dans τ :

$$Z_{N,\omega} = \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{i_0=0 < i_1 < \dots < i_\ell = N} \left(\prod_{j=1}^{\ell} K(i_{j-1} - i_j) \right) \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{\ell} \omega_{i_j} + \ell h\right), \quad (3.3.3)$$

où ℓ vaut au moins 1 à cause de la contrainte $N \in \tau$. Pour estimer la moyenne du moment d'ordre γ de la fonction de partition, utilisons l'inégalité élémentaire

$$(a_1 + \dots + a_k)^{\gamma} \le a_1^{\gamma} + \dots + a_k^{\gamma},$$
 (3.3.4)

qui est valable si $k \in \mathbb{N}$, $a_i \ge 0$ et $0 < \gamma < 1$. De (3.3.3) on tire donc

$$\mathbb{E}(Z_{N,\omega}^{\gamma}) \leq \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{i_0=0 < i_1 < \dots < i_\ell = N} \left(\prod_{j=1}^{\ell} K(i_{j-1} - i_j)^{\gamma} \right) \exp\left(\ell(\gamma h + \log M(\beta\gamma)) \right)$$
(3.3.5)

où nous rappelons que $M(\beta) = \mathbb{E}(\exp(\beta\omega_1))$. Si $\widehat{\mathbf{P}}$ dénote la loi d'un renouvellement récurrent dont la loi inter-arrivées est donnée par

$$\widehat{\mathbf{P}}(\tau_1 = n) = \frac{K(n)^{\gamma}}{C(\gamma)} := \frac{K(n)^{\gamma}}{\sum_{i \in \mathbb{N}} K(i)^{\gamma}},$$
(3.3.6)

on voit donc que (3.3.5) peut être récrite comme

$$\mathbb{E}(Z_{N,\omega}^{\gamma}) \le \widehat{\mathbf{E}} \left[\exp\left[\left(\gamma h + \log M(\gamma \beta) + \log C(\gamma) \right) \sum_{n \le N} \delta_n \right] \delta_N \right].$$
(3.3.7)

Le côté droit de (3.3.7) n'est rien d'autre que la fonction de partition d'un modèle d'accrochage homogène avec paramètre d'accrochage

$$\widehat{h} := \gamma h + \log M(\gamma \beta) + \log C(\gamma).$$

Grâce au Théorème 2.4.2 on a donc que

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}(Z_{N,\omega}^{\gamma}) = 0, \qquad (3.3.8)$$

et donc $\mathtt{F}(\beta,h)=0,$ dès que $\widehat{h}<0.$ On a donc obtenu

Théorème 3.3.1. [77, *Th.* 3.1] Pour tout $\beta > 0$, on a

$$h_c(\beta) \ge \sup_{1/(1+\alpha) \le \gamma \le 1} -\frac{1}{\gamma} \log[M(\gamma\beta)C(\gamma)].$$
(3.3.9)

La contrainte $\gamma \ge 1/(1 + \alpha)$ est due au fait que $C(\gamma) = +\infty$ pour $\gamma < 1/(1 + \alpha)$.

Parmi le différentes conséquences que l'on peut tirer de (3.3.9), nous nous limitons à mentionner la plus simple :

Corollaire 3.3.2. [77] S'il existe a > 0 et $\rho > 1$ tels que $\log M(\beta) \stackrel{\beta \to +\infty}{\sim} a\beta^{\rho}$, alors il existe $\beta_0 < \infty$ tel que

$$h_c(\beta) > h_c^{\text{ann}}(\beta) \tag{3.3.10}$$

pour tout $\beta > \beta_0$. Par exemple, dans le cas Gaussien a = 1/2 et $\rho = 2$.

Le Corollaire (3.3.10) est immédiat si on observe que pour β grand et $\gamma<1$ tel que $C(\gamma)<\infty$ on a

$$-\frac{1}{\gamma}\log[M(\gamma\beta)C(\gamma)] \sim -a\gamma^{\rho-1}\beta^{\rho} \gg h_c^{\mathrm{ann}}(\beta) = -\log M(\beta) \sim -a\beta^{\rho}.$$

On peut aussi déduire du Théorème 3.3.1 le comportement asymptotique du point critique pour désordre fort (pour simplicité, nous donnons ici seulement l'expression pour le cas Gaussien) :

Corollaire 3.3.3. Si $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a pour tout $\alpha > 0$

$$h_c(\beta) \stackrel{\beta \to \infty}{\sim} -\frac{\beta^2}{2(1+\alpha)}.$$
 (3.3.11)

La borne inférieure suit immédiatement du Théorème 3.3.1; pour la borne supérieure nous renvoyons à [77, Section 3.1.1].

La méthode des moments fractionnaires permet aussi de calculer exactement le point critique d'un modèle d'accrochage simplifié, le Reduced wetting model, introduit par Bodineau et Giacomin en [17]. Celui-ci est une version particulière du modèle d'accrochage, où la loi de ω dépend explicitement du paramètre β . Plus précisément, le modèle "réduit" est défini comme le modèle d'accrochage (2.2.2), avec les modifications suivantes :

- on pose h = 0
-
− on suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$ (le renouvellement τ est transient)
− la distribution de ω est donnée par $\mathbb{P}(\omega_1 = 1) = p = 1 \mathbb{P}(\omega_1 = 0)$ pour un certain $p \in (0, 1).$

(Il est immédiat de voir que si τ était récurrent il n'y aurait pas de transition de phase).

Pour tout $\beta > 0$ donné, il existe $p_c(\beta) \in (0,1)$ tel que l'énergie libre $F(\beta,p)$ vaut zéro pour $p \leq p_c(\beta)$ et est positive pour $p > p_c(\beta)$, et il n'est pas difficile de se rendre compte que pour β grand la valeur de $p_c(\beta)$ s'annule exponentiellement en β (plus le paramètre d'accrochage est fort, moins il faut de charges attractives pour accrocher le système). La question posée par Bodineau et Giacomin est de calculer la limite

$$m_c := -\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta), \qquad (3.3.12)$$

et dans [17] ils ont pu montrer que

$$\frac{1}{1+\alpha} \le -\limsup_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta) \le -\liminf_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta) \le 1.$$
(3.3.13)

Dans le papier [77], en travaillant un peu à partir du Théorème 3.3.1 ci-dessus, j'ai pu montrer assez simplement le

Théorème 3.3.4. [77, Th. 3.4] Pour tout $K(\cdot)$ qui satisfait (2.2.1) et telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$, on a $m_c = 1/(1+\alpha)$.

Je tiens à mentionner que le Théorème 3.3.4 a été obtenu aussi par E. Bolthausen, F. Caravenna et B. de Tilière [20], en utilisant une méthode assez différente, basée sur des idées de groupe de renormalisation.

Pour résumer, l'estimation toute simple des moments fractionnaires de la fonction de partition, basée sur (3.3.4), donne de très bons résultats pour désordre fort ($\beta \gg 1$), mais se révèle inefficace pour $\beta \ll 1$: par exemple, il est facile de voir que pour β suffisamment petit le sup dans la formule (3.3.9) est réalisé pour $\gamma = 1$: on revient donc à la borne "annealed" $h_c(\beta) \ge h_c^{\text{ann}}(\beta)$. Dans la suite de ce chapitre on verra que pour traiter le régime de désordre faible il faut un ingrédient en plus.

Déjà avant le papier [77], la méthode des moments fractionnaires avait été appliquée avec succès à l'étude d'autres modèles désordonnés : nous mentionnons en particulier (a) le papier [1] de Aizenman et Molchanov, où des bornes sur les moments d'ordre plus petit que 1 de la fonction de Green des opérateurs de Schrödinger aléatoires sont utilisées pour montrer la localisation exponentielle des fonctions propres (localisation d'Anderson) pour désordre fort ou énergies extrêmes; (b) le papier [22] par Buffet, Patrick et Pulé, qui calculent exactement l'énergie libre du polymère dirigé en milieu aléatoire sur un arbre régulier, en estimant $\mathbb{E}Z^{\gamma}$ avec $1 < \gamma < 2$; (c) le papier [39], où Derrida et Evans, toujours via une estimation de $\mathbb{E}Z^{\gamma}$ avec $1 < \gamma < 2$, améliorent la borne sur la température de transition de désordre fort à désordre faible pour le polymère dirigé en milieu aléatoire en dimension 1 + d avec $d \ge 3$; et enfin (d) le papier [32] de Comets et Vargas, où la méthode des moments fractionnaires est utilisée pour montrer que pour le polymère dirigé en milieu aléatoire en dimension (1 + 1) le désordre est "toujours fort".

3.4 Décalage ou non du point critique par un désordre arbitrairement faible ?

On va maintenant se pencher plus précisément sur la question de l'égalité ou pas entre les points critiques annealed et quenched, pour *désordre faible*.

Pour éviter des répétitions, nous donnerons les résultats seulement pour le modèle non hiérarchique. Les théorèmes analogues pour le modèle hiérarchique peuvent être consultés dans les papiers [48] et [49]. En particulier, l'analogue des Théorèmes 3.4.1 et 3.4.5 sont les Théorèmes 1.4 et 1.5 de [48]; l'analogue du Théorème 3.4.7 est le Théorème 2.3 de [49]. Nous conseillons aux lecteurs intéressés aux détails des démonstrations de consulter d'abord le cas hiérarchique, où le cœur des idées n'est pas caché par certaines complications techniques dues à la structure de renouvellement.

3.4.1 Le cas du désordre "non pertinent"

Nous commençons par le cas le plus simple à résoudre, et notamment le cas de désordre "non pertinent".

Théorème 3.4.1. Supposons que $0 < \alpha < 1/2$ ou bien que

$$\alpha = 1/2 \ et \ \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} L(n)^{-2} < \infty.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\beta_0(\varepsilon) > 0$ et $\Delta_0(\varepsilon) > 0$ tels que, pour tout $\beta \leq \beta_0(\varepsilon)$ et $0 < \Delta < \Delta_0(\varepsilon)$ on a

$$(1 - \varepsilon)F(0, \Delta) \le F(\beta, h_c^{\mathrm{ann}}(\beta) + \Delta) \le F(0, \Delta).$$
(3.4.1)

En particulier, $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$.

Il est intéressant de remarquer que le Théorème 3.4.1, en combinaison avec le Corollaire 3.3.2, implique (disons dans le cas de désordre Gaussien) qu'il y a une transition entre un régime de faible désordre pour β petit, où $h_c(\beta) = h_c^{ann}(\beta)$, et un régime de fort désordre où $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$. Grâce à la Proposition 6.1 de [50] on sait que le point de transition est unique. Pour résumer, on a donc :

Corollaire 3.4.2. Sous les hypothèses du Théorème 3.4.1 et si (par simplicité) $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, il existe un unique $0 < \beta_0 < \infty$ tel que $h_c(\beta) = h_c^{\mathrm{ann}}(\beta)$ pour $\beta \leq \beta_0$, et $h_c(\beta) > h_c^{\mathrm{ann}}(\beta)$ pour $\beta \leq \beta_0$.

Le Théorème 3.4.1 a été montré en premier lieu par K. Alexander [5], par une méthode assez sophistiquée de "deuxième moment". Ensuite, dans le papier [76] paru sur *Communications in Mathematical Physics*, j'ai donné une preuve alternative et plus simple, basée sur une méthode, dite de *couplage des répliques*, que j'avais développé précédemment avec F. Guerra [58] pour l'étude de la région de haute température du modèle de verre de spin de Sherrington-Kirkpatrick. À la fin de cette section, on va discuter brièvement quelles sont les difficultés mathématiques que l'on rencontre au cours de la démonstration de ce résultat.

Dans le cas où l'exposant α vaut zéro, l'argument heuristique de la Section 3.1 suggère que le désordre est non pertinent, mais les méthodes qui permettent de montrer le Théorème 3.4.1 ne marchent pas pour $\alpha = 0$. Ce cas a été quand même résolu par K. Alexander et N. Zygouras :

Théorème 3.4.3. [7] Si $\alpha = 0$, alors $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$ pour tout $\beta \ge 0$.

Avec G. Giacomin nous avons analysé plus en détail le comportement de l'énergie libre près du point critique. Dans un papier paru dans la revue Annals of Probability, nous avons montré par exemple que, toujours sous les hypothèses du Théorème 3.4.1, on a [55, Th. 2.3]

$$\lim_{\beta \searrow 0} \limsup_{\Delta \searrow 0} \left| \frac{\mathrm{F}(0,\Delta) - \mathrm{F}(\beta, h_c^{\mathrm{ann}}(\beta))}{(\beta^2/2)(\partial_\Delta \mathrm{F}(0,\Delta))^2} - 1 \right| = 0.$$
(3.4.2)

Le développement (3.1.10), que nous avions dérivé de façon heuristique, est donc justifié dans ce cas. Le démonstration de (3.4.2) nécessite l'étude très détaillée du processus de renouvellement $\tau_{12} := \tau \cap \tau'$, où τ et τ' sont deux renouvellements indépendants et avec même loi, déterminée par la loi inter-arrivées

$$\mathbf{P}(\inf\{k > 0 : k \in \tau\} = n) = K(n)e^{-F(0,h)n+h}.$$

Bien que τ, τ' soient deux renouvellements indépendants de loi explicite, il n'est pas immédiat de décrire leur intersection τ_{12} . En particulier, l'étude de la loi inter-arrivées

$$K_{12}(n) := \mathbf{P}(\inf\{k > 0 : k \in \tau \cap \tau'\} = n)$$

(et surtout de son comportement asymptotique pour h petit et n grand) nous a demandé un effort technique considérable.

Les difficultés intrinsèques de la méthode du deuxième moment

Au lieu de présenter les méthodes qui permettent de démontrer le Théorème 3.4.1 (celle de [5] ou de [76]) nous préférons expliquer ici pourquoi une méthode pourtant très naturelle, celle du deuxième moment, *ne marche pas*. Quand on veut essayer de montrer que les systèmes quenched et annealed se comportent de façon similaire, une idée qui

marche souvent est celle du deuxième moment. Cela revient à calculer les deux premiers moments de la fonction de partition (ce qui pour beaucoup de modèles intéressants n'est pas une tâche très difficile); si jamais on trouve que

$$\frac{\mathbb{E}\left(Z_{N,\omega}^2\right)}{\left(\mathbb{E}Z_{N,\omega}\right)^2} \le c < \infty \text{ uniformément en } N,$$
(3.4.3)

alors on peut conclure que les énergies libres quenched et annealed coïncident. En effet, grâce à l'inégalité de Paley-Zygmund 1 on trouve

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{N}\log Z_{N,\omega} \ge \frac{1}{N}\log \mathbb{E}Z_{N,\omega} - \frac{\log 2}{N}\right] = \mathbb{P}\left[Z_{N,\omega} \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}Z_{N,\omega}\right] \qquad (3.4.4)$$

$$\ge \frac{1}{4}\frac{\left(\mathbb{E}Z_{N,\omega}\right)^2}{\mathbb{E}\left(Z_{N,\omega}^2\right)} \ge \frac{1}{4c}.$$

Puisqu'on sait déjà que $(1/N) \log Z_{N,\omega}$ converge presque sûrement vers $F(\beta, h)$ et que $F(\beta, h) \leq \lim_{N} (1/N) \log \mathbb{E}Z_{N,\omega}$, on conclut immédiatement l'égalité des deux énergies libres. Cette méthode permet, par exemple, de montrer que la température critique du modèle de Sherrington-Kirkpatrick en absence de champ magnétique vaut $\beta = 1$. En réalité, en utilisant les propriétés de concentration de la variable $(1/N) \log Z_{N,\omega}$ (cf. Section 4.2), on peut rendre cette méthode encore plus puissante : pour conclure $F(\beta, h) = F(0, \Delta)$ il suffirait de montrer que le rapport (3.4.3) ne diverge pas exponentiellement en N.

Pour utiliser cette idée dans la preuve du Théorème 3.4.1, il faudrait montrer que pour tout $\Delta > 0, \beta > 0$ petits on a (3.4.3) : cela impliquerait $F(\beta, h_c^{ann}(\beta) + \Delta) = F(0, \Delta)$ et donc $h_c(\beta) = h_c^{ann}(\beta)$. Malheureusement, on rencontre tout de suite un problème : en faisant le calcul, on trouve immédiatement

$$\mathbb{E}\left(Z_{N,\omega}^{2}\right) = \mathbf{E}^{\otimes 2}\left[\exp\left(\left(\log M(2\beta) - 2\log M(\beta)\right)\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{n\in\tau\cap\tau'\}} + \Delta\sum_{n=1}^{N} (\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}} + \mathbf{1}_{\{n\in\tau'\}})\right) \mathbf{1}_{\{N\in\tau\cap\tau'\}}\right],$$
(3.4.5)

où τ et τ' sont deux renouvellements indépendants de loi **P**. Le rapport dans (3.4.3) vaut donc

$$\frac{\mathbb{E}\left(Z_{N,\omega}^{2}\right)}{\left(\mathbb{E}Z_{N,\omega}\right)^{2}} = \left\langle \exp\left(\left(\log M(2\beta) - 2\log M(\beta)\right)\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{n\in\tau\cap\tau'\}}\right)\right\rangle_{\Delta}^{\otimes 2}, \quad (3.4.6)$$

où la mesure $\langle \cdot \rangle_{\Delta}$ a été définie dans (3.1.9) et n'est rien d'autre que la mesure de Gibbs du modèle annealed. Puisque τ, τ' sont des renouvellements récurrents positifs² sous

$$\mathbb{P}(X \ge (1/2)\mathbb{E}X) \ge (1/4)(\mathbb{E}X)^2/\mathbb{E}(X^2).$$

^{1.} L'inégalité de Paley-Zygmund affirme que si X est une variable aléatoire non-négative, alors

^{2.} rappelons qu'un renouvellement est dit récurrent positif si $\mathbf{E}[\tau_1] < \infty$, et récurrent nul si $\mathbf{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ et $\mathbf{E}[\tau_1] = \infty$.

la loi $\langle \cdot \rangle_{\Delta}$, il est immédiat de se rendre compte que la cardinalité de leur intersection $\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{n \in \tau \cap \tau'\}}$ croit linéairement avec N, et donc le rapport (3.4.3) diverge exponentiellement avec N, ce qui rend la méthode du deuxième moment inapplicable.

Il serait d'ailleurs très naïf de s'attendre à un résultat différent : comme nous l'avons indiqué, si (3.4.3) ne divergeait pas exponentiellement, on aurait $F(\beta, h_c^{ann}(\beta) + \Delta) = F(0, \Delta)$, ce qui serait en contradiction avec le développement (3.1.10). Il est même possible de montrer rigoureusement que l'on a $F(\beta, h_c^{ann}(\beta) + \Delta) < F(0, \Delta)$ strictement, dès que $\Delta > 0$:

Théorème 3.4.4. [76, Th. 2.6] Pour tout $\beta > 0$, $\alpha \ge 0$ et $\Delta > 0$, on a

$$\mathbf{F}(\beta, h_c^{\mathrm{ann}}(\beta) + \Delta) \le \inf_{0 \le q \le \Delta/\beta^2} \left(\frac{\beta^2 q^2}{2} + \mathbf{F}(0, \Delta - \beta^2 q) \right) < \mathbf{F}(0, \Delta).$$
(3.4.7)

La première inégalité dans (3.4.7) ressemble beaucoup, au moins formellement, à la borne supérieure dite "réplica-symétrique" [57] pour l'énergie libre du modèle de verre de spin de Sherrington et Kirkpatrick. La deuxième inégalité (stricte) découle du fait que la quantité qu'on doit minimiser a une dérivée strictement négative pour q = 0. Si $\alpha < 1/2$, on peut voir facilement que l'inf sur q est obtenu (à l'ordre le plus bas en β) en choisissant $q = \partial_{\Delta} F(0, \Delta)$, auquel cas (3.4.7) donne (comme borne supérieure seulement, évidemment !) le développement (3.1.10).

Pour revenir à la méthode du deuxième moment, la contribution principale du papier [5] a été de comprendre qu'il suffit de montrer que le rapport (3.4.3) reste borné pour N de l'ordre de longueur de corrélation du modèle annealed. Déduire de cela que $h_c(\beta) = h_c^{\text{ann}}(\beta)$ est une tâche hautement non triviale, et nous renvoyons le lecteur intéressés au papier original [5].

3.4.2 Le cas du désordre "pertinent"

Le cas $\alpha > 1/2$ est, lui aussi, désormais complètement sous contrôle :

Théorème 3.4.5. Supposons que $\alpha > 1/2$. Il existe une constante a > 0 telle que, pour tout $0 \le \beta \le 1$,

$$a\Delta(\beta) \le h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta) \le \frac{1}{a}\Delta(\beta)$$
(3.4.8)

et $h_c(\beta) > h_c^{\text{ann}}(\beta)$ pour tout $\beta > 0$ ($\Delta(\beta)$ a été défini dans la Section 3.1). De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des constantes positives $b(\varepsilon)$ et $\Delta_0(\varepsilon)$ telles que, si

$$b(\varepsilon)\Delta(\beta) \le \Delta \le \Delta_0(\varepsilon),$$
 (3.4.9)

alors on a les inégalités (3.4.1).

En d'autres mots, le point critique subit un décalage de l'ordre de $\Delta(\beta)$ par rapport au point critique annealed, tandis que si on décale *h* d'un (gros) multiple de $\Delta(\beta)$ (il faut penser que $b(\varepsilon)$ sera assez grand), les modèles quenched et annealed sont très proches, cf. la Figure 3.2.

La borne supérieure sur la différence $h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta)$ a été montrée dans [5, 76], et la borne inférieure dans [35, 6].



FIGURE 3.2. Le comportement qualitatif, pour $\alpha > 1/2$, de l'énergie libre annealed (courbe supérieure) et quenched (courbe inférieure). La différence entre les deux points critiques est de l'ordre de $\Delta(\beta)$, cf. (3.1.5). Pour $\Delta(\beta) \ll \Delta \leq \Delta_0(\varepsilon)$ les deux énergies libres sont très proches (leur rapport vaut $1 + O(\varepsilon)$). Par contre, pour $\Delta \gg \Delta_0(\varepsilon)$, i.e. très loin du point critique annealed, les deux courbes se séparent. Pour $\beta \ll 1$, on a $b(\varepsilon)\Delta(\beta) \ll \Delta_0(\varepsilon)$ (les proportions ne sont pas respectées dans la figure).

3.4.3 Le cas du désordre "marginal"

Dans le cas marginal $\alpha = 1/2$, la formulation des résultats est légèrement plus compliquée, d'une part parce que le résultat qu'on obtient n'est pas complètement optimal et est soumis à des restrictions techniques, d'autre part parce que le résultat lui-même dépend fortement du comportement de la fonction à variation lente $L(\cdot)$.

Par souci de clarté, nous allons donc tout d'abord donner le résultat dans le cas où la fonction à variation lente $L(\cdot)$ est asymptotiquement constante :

Théorème 3.4.6. Supposons que $\alpha = 1/2$ et que $L(\cdot)$ est asymptotiquement constante. Il existe une constante c > 0 et, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $c(\varepsilon) > 0$, telles que pour tout $0 \le \beta \le 1$ on a

$$\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)}{\beta^{2+\varepsilon}}\right) \le h_c(\beta) - h_c^{\mathrm{ann}}(\beta) \le \exp\left(-\frac{c}{\beta^2}\right)$$
(3.4.10)

et $h_c(\beta) > h_c^{\text{ann}}(\beta)$ pour tout $\beta > 0$.

La borne supérieure a été montrée dans [5, 76], et la borne inférieure dans [49] (pour $\varepsilon = 2$) et ensuite dans [50] (pour tout $\varepsilon > 0$).

Malgré la limitation (technique) de devoir garder $\varepsilon > 0$ dans la borne inférieure (3.4.10), et malgré le fait que la borne supérieure n'est probablement pas non plus optimale (cf. la Remarque 3.4.8 ci-dessous), nous soulignons qu'un tel résultat est suffisant pour résoudre la controverse, mentionnée dans la Section 3.1.1 sur la pertinence du désordre dans le cas marginal.

Un résultat plus complet, qui traite aussi le cas de $L(\cdot)$ non triviale, est le suivant :

Théorème 3.4.7. [49, 50] Supposons que $\alpha = 1/2$ et que

$$\ell(N) := \sum_{n \le N} \frac{1}{nL(n)^2} \xrightarrow{N \to \infty} +\infty.$$
(3.4.11)

1. (Borne supérieure) [5, 76] Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des constantes $a(\varepsilon) > 0$ et $\Delta_0(\varepsilon) > 0$ telles que, si $0 < \Delta \leq \Delta_0(\varepsilon)$ et si la condition

$$\frac{1}{\beta^2} \ge a(\varepsilon)\ell\left(\frac{a(\varepsilon)|\log F(0,\Delta)|}{F(0,\Delta)}\right)$$
(3.4.12)

est vérifiée, alors on a (3.4.1). En particulier, si $L(\cdot)$ est asymptotiquement constante, on déduit la borne supérieure de (3.4.10).

2. (Borne inférieure) [50, Corollary 1.8] Supposents en plus que $L(n) \stackrel{n \to \infty}{\sim} a(\log n)^{b}$ avec a > 0 et b < 1/2 (ce qui garantit que la condition (3.4.11) est satisfaite). Pour tout g > 2/(1-2b) il existe c > 0 tel que, pour β suffisamment petit,

$$exp\left(-\frac{c}{\beta^g}\right) \le h_c(\beta) - h_c^{\mathrm{ann}}(\beta).$$
 (3.4.13)

On a aussi que $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$ pour tout $\beta > 0$. Par contre, à partir du point (1) du présent Théorème on déduit qu'il existe des constantes $c_1 > 0, c_2 > 0$ telles que

$$h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta) \le c_1 \beta^{-2b/(1-2b)} \exp\left(-\frac{c_2}{\beta^{2/(1-2b)}}\right).$$
 (3.4.14)

Remarque 3.4.8. Tandis que pour $\alpha > 1/2$ le Théorème 3.4.7 montre que le décalage du point critique est bien de l'ordre $\Delta(\beta)$ (borne supérieure et inférieure), dans le cas marginal nous n'arrivons pas à obtenir un résultat si précis. Cela est évident pour la borne inférieure, puisque nous avons besoin de garder $\varepsilon > 0$, mais c'est le cas aussi pour la borne supérieure. Par exemple, puisque la constante c dans (3.4.10) ne coïncide pas nécessairement avec $2\pi^2 C^2$ (où $C = \lim_{n\to\infty} L(n)$), la quantité $\exp(-c/\beta^2)$ n'est pas un multiple, mais plutôt une puissance, de $\Delta(\beta)$ (cf. (3.1.6)). La même observation est valable bien sûr dans le cas plus général de l'inégalité (3.4.14).

3.4.4 $\alpha \ge 1/2$: un argument de changement de mesure

Dans cette section, nous allons donner un aperçu de la méthode qui est derrière la preuve des bornes inférieures sur $h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta)$ des Théorèmes 3.4.5 et 3.4.7. Nous essayerons de faire émerger les idées principales, tandis que pour les détails nous renvoyons à [49, 50].

Considérons par simplicité le cas de $L(\cdot)$ asymptotiquement constante et de désordre Gaussien (mais nous soulignons que les Théorèmes 3.4.5, 3.4.6 et 3.4.7 demandent seulement l'existence des moments exponentiels de ω_n). Le but est de montrer que $\mathbb{E}(Z_{N,\omega}^{\gamma})$ est borné uniformément en N, pour un certain $0 < \gamma < 1$, - si $\Delta = a \Delta(\beta)$ (la constante *a* sera choisie suffisamment petite), dans le cas $\alpha > 1/2$ (cf. Section 3.1 pour la définition de $\Delta(\beta)$);

- si $\log(1/\Delta) = 1/(a(\varepsilon)\beta^{2+\varepsilon})$ (avec $a(\varepsilon)$ suffisamment petit) dans le cas $\alpha = 1/2$. En fait, cela implique $F(\beta, h) = 0$, cf. (3.3.2), et donc la borne inférieure voulue pour $h_c(\beta) - h_c^{\text{ann}}(\beta)$ (cf. (3.4.8) et (3.4.10)).

Pas 1 : un critère de volume fini pour la délocalisation

On va fixer $1/(1 + \alpha) < \gamma < 1$ et on va adopter la notation $A_N := \mathbb{E}(Z_{N,\omega}^{\gamma})$. La raison de la contrainte $\gamma > 1/(1 + \alpha)$ devrait être déjà claire grâce à l'observation qui se trouve juste après le Théorème 3.3.1.

Le premier pas est une décomposition judicieuse de la fonction de partition. Le but est d'arriver à une inégalité récursive qui garantit que, si A_i est petit jusqu'à un certain i, alors $\limsup_{N\to\infty} A_N < \infty$. Pour cela on a besoin de quelques définitions supplémentaires. Pour a < b donnés, on appelle $Z_{a,b,\omega}$ la fonction de partition du système défini sur l'intervalle $\{a, \ldots, b\}$:

$$Z_{a,b,\omega} := Z_{b-a,\theta^a\omega},\tag{3.4.15}$$

où $(\theta^n \omega)_m = \omega_{n+m}$ (i.e., $(\theta^n \omega)$ est la réalisation du désordre, décalée de *m* unités vers la gauche). On dénote aussi

$$z_n := e^{\beta \omega_n + h}$$

et on choisit un entier k (pour l'instant arbitraire, mais dont le choix sera crucial plus tard) tel que 0 < k < N. Avec ces conventions, on peut écrire l'identité (cf_NFigure 3.3)



FIGURE 3.3. La décomposition de la fonction de partition est obtenue simplement en fixant un entier k et en sommant sur les valeurs du dernier point de τ avant N-k, et du premier après N-k. Dans le dessin, ces deux points sont appelés respectivement N-n et N-j. Les arcs dénotent les intervalles entre deux points successifs de τ .

$$Z_{N,\omega} = \sum_{n=k}^{N} Z_{N-n,\omega} \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j) z_{N-j} Z_{N-j,N,\omega}$$
(3.4.16)

qui, à l'aide de l'inégalité (3.3.4) et du fait que les variables aléatoires $Z_{N-n,\omega}$, z_{N-j} et $Z_{N-j,N,\omega}$ sont indépendantes, nous donne

$$A_N \le \mathbb{E}(z_1^{\gamma}) \sum_{n=k}^N A_{N-n} \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j)^{\gamma} A_j.$$
(3.4.17)

De cette inégalité récursive on peut déduire

Proposition 3.4.9. [35, Prop. 2.5] Soient β et h donnés. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\gamma < 1$ tels que

$$\rho := \mathbb{E}(z_1^{\gamma}) \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j)^{\gamma} A_j < 1, \qquad (3.4.18)$$

alors il existe C > 0 tel que $A_N \leq CK(N)^{\gamma}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et donc $F(\beta, h) = 0$.

Par exemple, il est immédiat de vérifier itérativement que pour tout N on a $A_N \leq \max\{A_0, \ldots, A_{k-1}\}$ si $\rho \leq 1$, ce qui est un résultat plus faible que $A_N \leq CK(N)^{\gamma}$, mais quand même suffisant pour déduire que l'énergie libre est nulle, cf. (3.3.2).

La puissance de la Proposition 3.4.9 est dans le fait qu'elle réduit le problème de montrer que l'énergie libre est nulle (ce qui naturellement est une question de volume infini) à celui de contrôler une propriété de volume fini, $N \leq k$. Bien sûr, il reste le problème non trivial de bien choisir k et d'estimer A_N jusqu'à une telle taille.

Tout d'abord, il se trouve que le bon choix est de prendre k de l'ordre de la longueur de corrélation du système annealed. Nous poserons donc

$$k := \left\lfloor \frac{1}{\mathbf{F}(0,\Delta)} \right\rfloor,\tag{3.4.19}$$

où $\lfloor x \rfloor$ dénote la partie entière de x. Nous avons déjà affirmé à plusieurs reprises que l'inverse de l'énergie libre est bien une mesure de la longueur de corrélation. Ce sujet sera repris (d'un point de vue un peu différent) dans la Section 4.3 ci-dessous, mais ici nous donnons un résultat qui justifie ce fait :

Lemme 3.4.10. Soit $\alpha > 0$. Il existe une constante c telle que, pour tout $0 < \Delta < 1$ et $j \leq 1/F(0, \Delta)$, on a

$$1 \le \frac{\mathbb{E}Z_{j,\omega}(\beta, h_c^{\mathrm{ann}}(\beta) + \Delta)}{\mathbf{P}(j \in \tau)} \le c$$
(3.4.20)

(cf. [35, Lemme 4.1] pour le cas $\alpha < 1$. Pour $\alpha > 1$ la preuve est immédiate, puisque à la fois le numérateur et le dénominateur sont d'ordre 1). Puisque $\mathbb{E}Z_{j,\omega} = \mathbf{P}(j \in \tau)$ si $\Delta = 0$, ce que lemme dit est que, tant que j est plus petit que la longueur de corrélation, la fonction de partition annealed est comparable à la fonction de partition annealed à son point critique $\Delta = 0$.

Le cœur de la preuve de (3.4.18) consiste à montrer que

$$A_k \le \eta \mathbf{P}(k \in \tau)^\gamma \tag{3.4.21}$$

pour un certain η très petit. Il est important de remarquer que, grâce au Lemme 3.4.10, cette inégalité peut être vue comme une amélioration de l'inégalité de Jensen : $A_k = \mathbb{E}(Z_{k,\omega}^{\gamma}) \ll (\mathbb{E}Z_{k,\omega})^{\gamma} \approx \mathbf{P}(k \in \tau)^{\gamma}$. Une fois l'estimation (3.4.21) obtenue, arriver à montrer la condition (3.4.18) est une question principalement technique, qui demande entre autres une procédure de "coarse graining" que nous ne détaillerons pas ici.

Pas 2 : changement de mesure : l'idée générale

Pour estimer $\mathbb{E}[Z_{k,\omega}^{\gamma}],$ on va utiliser l'inégalité de Hölder, avec $p=1/\gamma$ et $q=1/(1-\gamma)$: on a

$$\mathbb{E}(Z_{k,\omega}^{\gamma}) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[Z_{k,\omega}^{\gamma} \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}(\omega)\right] \leq \left[\widetilde{\mathbb{E}}Z_{k,\omega}\right]^{\gamma} \left[\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}(\omega)\right)^{1/(1-\gamma)}\right]^{1-\gamma}, \quad (3.4.22)$$

où $\widetilde{\mathbb{P}}$ est une nouvelle loi du désordre, absolument continue par rapport à \mathbb{P} , et que l'on va choisir dans un instant.

Le choix de \mathbb{P} va dépendre d'une façon cruciale de α (jusqu'à ici, on n'a pas utilisé l'hypothèse que $\alpha > 1/2$). Toutefois, il y a certaines propriétés de caractère général qu'on va imposer à la nouvelle mesure :

– on va choisir $\widetilde{\mathbb{P}}$ de telle façon que le terme de Radon-Nikodým (le dernier facteur au côté droit de (3.4.22)) soit d'ordre 1 :

$$\left[\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}(\omega)\right)^{1/(1-\gamma)}\right]^{1-\gamma} \le c < \infty, \text{ uniformément en } \Delta$$
(3.4.23)

(rappelons que k est lié à Δ par (3.4.19));

- d'autre part, on veut

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Z_{k,\omega}) \ll \mathbb{E}(Z_{k,\omega}):$$
 (3.4.24)

sous la nouvelle mesure, les charges doivent être globalement moins attractives;

– sous \mathbb{P} , les variables aléatoires $\{\omega_i\}_{i>k}$ seront i.i.d., indépendantes de $\{\omega_j\}_{j\leq k}$ et distribuées comme sous \mathbb{P} . Cela parce que les variables $\{\omega_i\}_{i>k}$ n'interviennent pas dans la moyenne $\mathbb{E}(Z_{k,\omega})$: modifier leur loi aurait donc le seul effet d'accroître inutilement le terme de Radon-Nikodým.

Pas 3 : bien choisir le changement de mesure (cas $\alpha > 1/2$)

On considère d'abord le cas de $\alpha > 1/2$, où il se trouve qu'un changement de mesure très simple suffit. La façon la plus simple de rendre les charges moins attractives est, bien sur, de les décaler d'une quantité -x négative et déterministe. On établit donc que, sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, les variables ω_i sont i.i.d. et de loi $\mathcal{N}(-x,1)$ (on est en train de considérer le cas Gaussien). Le bon choix de x est dicté par la condition (3.4.23) que le terme de Radon-Nikodým ne diverge pas. Après un calcul élémentaire, on voit donc qu'il faut choisir $x = 1/\sqrt{k}$. C'est d'ailleurs clair que avec ce choix le terme de Radon-Nikodým ne sera pas très large : sous $\widetilde{\mathbb{P}}$ la moyenne empirique $S_k := \sum_{i \leq k} \omega_i/k$ est d'ordre $1/\sqrt{k}$, qui est aussi de l'ordre des fluctuations normales de S_k sous \mathbb{P} .

Il ne reste qu'à vérifier la condition (3.4.24). Puisque les ω_i sont toujours i.i.d. et Gaussiennes, le calcul de la moyenne de la fonction de partition est immédiat, et donne

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Z_{k,\omega}) = \mathbf{E} \left[e^{(\Delta - \beta/\sqrt{k}) \sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}} \mathbf{1}_{\{k \in \tau\}} \right]$$

$$= \mathbf{E} \left[e^{(\Delta - \beta/\sqrt{k}) \sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}} \middle| k \in \tau \right] \mathbf{P}(k \in \tau)$$

$$\leq \mathbf{E} \left[e^{(\Delta - \beta/\sqrt{k}) \sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}} \middle| k \in \tau \right] \mathbb{E}(Z_{k,\omega})$$
(3.4.25)

(cf. le Lemme 3.4.10 pour le dernier passage). Si maintenant on se rappelle du choix $\Delta = a\Delta(\beta)$, de la relation (3.4.19) entre k et Δ , du comportement de $F(0, \Delta)$ pour Δ petit (cf. Théorème 2.4.2) et de l'estimation (2.2.4) pour la fonction de Green $\mathbf{P}(n \in \tau)$, on voit que pour β petit on a $\Delta \ll \beta/\sqrt{k}$ et que

$$\widetilde{\mathbb{E}}(Z_{k,\omega}) \le c' \mathbf{E} \left[\exp\left(-c'' a^{-\min\{\frac{1}{2}, \frac{2\alpha-1}{2\alpha}\}} \frac{\sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}}{\sum_{n=1}^{k} \mathbf{P}(n \in \tau)} \right) \middle| k \in \tau \right] \mathbb{E}(Z_{k,\omega}) \quad (3.4.26)$$

pour certaines constantes positives c', c''. Cette expression est fort sympathique, en vue de l'inégalité (3.4.24) que nous voulons obtenir. En fait, dans la première moyenne on trouve l'exponentiel la variable aléatoire

$$X := \frac{\sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}}{\sum_{n=1}^{k} \mathbf{P}(n \in \tau)}$$
(3.4.27)

qui est positive et d'ordre 1 (du moins, sa moyenne vaut exactement 1), multipliée par la constante $-a^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{2\alpha-1}{2\alpha}\}}$, qui est négative et très grande en valeur absolue, puisque $\alpha > 1/2$ et a est petit. Il n'est donc pas difficile de montrer que (3.4.26) implique (3.4.24). La preuve demande quelques estimations précises de renouvellement, essentiellement pour montrer que la variable aléatoire X tend en loi (pour $k \to \infty$) vers une variable aléatoire strictement positive; les détails peuvent être trouvés dans [35].

Pas 3 bis : bien choisir le changement de mesure (cas $\alpha = 1/2$)

Pour $\alpha = 1/2$, il est clair que le changement de mesure "homogène" que l'on vient d'utiliser pour $\alpha > 1/2$ ne marche pas, et cela parce que l'exposant de a dans (3.4.26) s'annule. Pour surmonter ce problème, il est nécessaire que sous la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ les charges deviennent corrélées. Ici on va exposer brièvement le changement de mesure qui nous a permis dans [49] de montrer (3.4.10) avec $\varepsilon = 2$; la preuve pour tout $\varepsilon > 0$ est considérablement plus compliquée [50].

Rappelons que, sous \mathbb{P} , le vecteur $\omega^{(k)} := \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ est un vecteur Gaussien avec moyenne nulle et matrice de covariance donnée par la matrice identité. On va établir que, sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\omega^{(k)}$ est un vecteur Gaussien, toujours de moyenne nulle, mais de covariance I - C, pour une certaine matrice C symétrique $k \times k$ qu'on va déterminer. Les propriétés que l'on va imposer à C sont les suivantes :

- $C_{ij} ≥ 0$, et $C_{ii} = 0$. Avoir des éléments diagonaux nuls rend certains calculs plus simples, mais n'est pas très important. Par contre, on verra que le fait que sous $\tilde{\mathbb{P}}$ les variables ω_i sont corrélées négativement est essentiel;
- la norme de Hilbert-Schmidt de C est suffisamment petite :

$$||C||_{HS} := \sqrt{\sum_{i,j \le k} C_{ij}^2} \le \frac{1 - \gamma}{2}.$$
(3.4.28)

Cela garantit, entre autres, que la matrice I-C est bien définie non négative ; en plus, il n'est pas difficile de voir que (3.4.28) implique que le terme de Radon-Nikodým (3.4.23) reste borné pour $k \to \infty$.

Il reste à montrer (3.4.24). Un simple calcul Gaussien³ montre que

$$\widetilde{\mathbb{E}}Z_{k,\omega} = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\sum_{i,j\le k}\mathbf{1}_{\{i\in\tau\}}C_{ij}\mathbf{1}_{\{j\in\tau\}} + \Delta\sum_{i\le k}\mathbf{1}_{\{i\in\tau\}}\right); k\in\tau\right].$$
(3.4.30)

On voit ici très bien que le fait que les éléments de matrice de C soient positifs a une importance cruciale, si on veut majorer la moyenne ci-dessus. De façon un peu plus philosophique, on peut dire que corréler négativement les charges rend le potentiel moins attractif, puisque les anti-corrélations suppriment la présence de "stretchs" très longs de charges positives, qui peuvent faire accrocher le polymère.

Il ne reste qu'à choisir la matrice C, et on va poser pour j > i

$$C_{ji} = C_{ij} := \frac{1-\gamma}{2} \frac{\mathbf{P}(j-i\in\tau)}{\sqrt{\sum_{a\neq b=1}^{k} \mathbf{P}(|b-a|\in\tau)^2}} \overset{k\to\infty}{\sim} \frac{const}{\sqrt{k\log k \, (j-i)}}$$
(3.4.31)

où on a utilisé (2.2.4). La normalisation choisie dans (3.4.31) garantit évidemment que (3.4.28) est satisfaite. Si on utilise le fait que $k = 1/F(0, \Delta) \sim const/\Delta^2$ (cf. Théorème 2.4.2), que $\log \Delta = -1/(a\beta^4)$ (voir le début de cette section) et le comportement asymptotique (2.2.4), on voit que la variable aléatoire

$$Y_k := \beta^2 \sum_{i,j \le k} \mathbf{1}_{\{i \in \tau\}} C_{ij} \mathbf{1}_{\{j \in \tau\}}$$

$$(3.4.32)$$

a une moyenne d'ordre $a^{-1/2}$. Il ne reste donc, pour montrer (3.4.24), qu'à choisir a suffisamment petit, et à montrer que Y_k converge, pour $k \to \infty$, vers une variable aléatoire positive Y_{∞} . En fait, on peut montrer facilement que le terme $\Delta \sum_{i \leq k} \mathbf{1}_{\{i \in \tau\}}$ ne joue aucun rôle essentiel.

La convergence $Y_k \Longrightarrow Y_\infty$ est montrée dans [49, Lemme 5.4], et la preuve est une application d'un résultat classique de Chung et Erdős [28]; on trouve que Y_∞ a la même loi que c|Z|, avec c une constante explicite et $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On pourrait se demander si on n'aurait pas pu faire un meilleur choix de la matrice C que (3.4.31), mais cela ne semble pas être possible. Par exemple, il n'est pas difficile de se rendre compte que le choix (3.4.31) est celui qui maximise la moyenne $\mathbf{E}Y_k$, sous la contrainte (3.4.28) de norme de Hilbert-Schmidt finie, et nous voulons bien sûr que Y_k soit le plus grand possible. Remarquons aussi que avec notre choix de C, les variables aléatoires ω_n sont corrélées à très longue distance.

Remarque 3.4.11. Dans l'argument que nous venons d'esquisser pour $\alpha = 1/2$, l'hypothèse que le désordre soit Gaussien est très importante, puisque dans ce cas la matrice de covariance fixe de façon unique $\widetilde{\mathbb{P}}$; en plus, on a des identités simples comme (3.4.29). Si la mesure \mathbb{P} de départ n'est pas Gaussienne, la preuve du Théorème 3.4.7 est nettement plus compliquée techniquement [50], même si l'idée de base (celle d'introduire des corrélations négatives parmi les ω_i) reste la même.

$$\mathbb{E}e^{a\cdot\omega} = e^{m\cdot a + (1/2)a\cdot(Ca)}.$$
(3.4.29)

^{3.} Il faut utiliser le fait que, si ω est un vecteur Gaussien (à *n* composantes), de moyenne $m \in \mathbb{R}^n$ et matrice de covariance C, et si $a \in \mathbb{R}^n$, on a

PROPRIÉTÉS TRAJECTORIELLES

4

On a vu dans la Section 2.4 que, en absence de désordre, les configurations du modèle d'accrochage sont très différentes selon que l'on se trouve dans la phase localisée \mathcal{L} ou délocalisée \mathcal{D} . Dans les deux cas, quand $N \to \infty$, la mesure de Gibbs $\mathbf{P}_N^{(h)}$ tend vers la loi d'un processus de renouvellement homogène : dans \mathcal{D} il s'agit d'un renouvellement transient avec loi inter-arrivée à queue lourde, tandis que dans \mathcal{L} c'est un processus récurrent avec loi inter-arrivée à queue exponentielle. Il est naturel de se demander si certaines de ces propriétés survivent en présence du désordre. Comme on le verra, les réponses sont assez satisfaisantes dans la région \mathcal{L} , tandis que la région \mathcal{D} se révèle nettement plus subtile.

4.1 Phase localisée : perte de mémoire et tension exponentielle

Cette section est basée sur un papier que j'ai écrit avec G. Giacomin et qui est paru sur la revue ALEA [52]. Les travaux [15] de Biskup et den Hollander, et [3] de Albeverio et Zhou, ont été une source importante d'inspiration pour notre papier.

Ici, nous ferons l'hypothèse que la loi du désordre satisfait la propriété de concentration **(H2)** de la Section 2.2.1.

Comme nous l'avons discuté dans la Section 2.4, en absence de désordre et pour h > 0, quand la taille N du système tend à l'infini τ devient un processus de renouvellement avec loi inter-arrivée a queue exponentielle : en particulier, on a perte exponentielle de mémoire, i.e., décroissance exponentielle des fonctions de corrélation. Comme nous allons le voir, quelque chose de similaire se passe pour $\beta > 0$ et $h > h_c(\beta)$: on n'a plus la convergence de $\mathbf{P}_{N,\omega}$ vers la loi d'un processus de renouvellement (puisque le désordre ω nous fait inévitablement perdre l'invariance par translations), mais le phénomène de perte exponentielle de mémoire persiste.

Le résultat central est donc que, dans la phase localisée \mathcal{L} , la mesure de Gibbs $\mathbf{P}_{N,\omega}$ admet une limite pour $N \to \infty$, et que les fonctions de corrélation décroissent exponentiellement vite avec la distance :

Théorème 4.1.1. [52, Th. 2.2] Si $h > h_c(\beta)$, alors :

1. Pour toute fonction bornée et locale¹ $A(\tau)$, la limite

$$\mathbf{E}_{\infty,\omega}(A) := \lim_{N \to \infty} \mathbf{E}_{N,\omega}(A) \tag{4.1.1}$$

existe, pour presque tout ω ;

2. Il existe une constante $c(\beta, h) > 0$ telle que, pour toute paire d'observables locales et bornées A et B, on a

$$\mathbb{E}[|\mathbf{E}_{N,\omega}(AB) - \mathbf{E}_{N,\omega}(A)\mathbf{E}_{N,\omega}(B)|] \le c||A||_{\infty}||B||_{\infty}\exp(-d(A,B)/c)$$
(4.1.2)

pour tout N, si d(A, B) dénote la distance entre le supports de A et de B.

Une conséquence assez immédiate du Théorème 4.1.1 est que, sauf éventuellement sur la ligne critique, l'énergie libre est une fonction régulière :

Théorème 4.1.2. [52, Th. 2.1] La fonction $F(\cdot, \cdot)$ est infiniment différentiable pour $(\beta, h) \in \mathcal{L}$, i.e. dans la région où F > 0.

Le lien entre la décroissance exponentielle des corrélations, Eq. (4.1.2), et la différentiabilité de l'énergie libre est due au fait que les dérivées (d'ordre quelconque) de $(1/N)\mathbb{E}\log Z_{N,\omega}$ par rapport à h ou β s'écrivent comme la somme de fonctions de corrélations tronquées; le fait que ces corrélations décroissent suffisamment vite implique que les dérivées sont bornées uniformément en N.

Il vaut la peine de remarquer que dans le cas $\beta = 0$ on a un résultat encore plus fort : $F(0, \cdot)$ est une fonction réelle analytique pour h > 0 (cela peut être facilement déduit de la formule (2.4.1)). Remarquons que, en présence de désordre, on ne s'attend pas à ce que l'énergie libre soit analytique dans la phase localisée, puisque raisonnablement il y aura plutôt des singularités "de Griffiths".

Enfin, on peut se demander de quelle taille est la plus longue excursion Δ_N , définie comme

$$\Delta_N := \max\{(\tau_i - \tau_{i-1}) : \tau_i \le N\},\tag{4.1.3}$$

dans une configuration typique τ : nous verrons que cette question nous réserve une petite surprise. Tout d'abord, considérons le cas du modèle homogène : puisque, pour N grand, τ est décrit par le processus de renouvellement du Théorème 2.4.3 dont la loi inter-arrivée est donnée par (2.4.7), on aura que Δ_N est de l'ordre de log N/F(0, h). En fait, on a

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}_N^{(h)} \left(\frac{1 - \varepsilon}{F(0, h)} \le \frac{\Delta_N}{\log N} \le \frac{1 + \varepsilon}{F(0, h)} \right) = 1$$
(4.1.4)

pour tout $\varepsilon > 0$. Or, dans le cas désordonné on a un résultat similaire, sauf que F(0, h)n'est pas simplement remplacé par $F(\beta, h)$! En fait, on a

^{1.} On dira qu'une fonction A est locale si elle dépend seulement de $\tau\cap I$ pour un certain intervalle fini $I\subset\mathbb{N}$

Théorème 4.1.3. [52, Th. 2.5] Si $h > h_c(\beta)$ on a

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}_{N,\omega} \left(\frac{1 - \varepsilon}{\mu(\beta, h)} \le \frac{\Delta_N}{\log N} \le \frac{1 + \varepsilon}{\mu(\beta, h)} \right) = 1 \quad en \ probabilité, \tag{4.1.5}$$

оù

$$\mu(\beta, h) := -\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_{N,\omega}}\right].$$
(4.1.6)

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire que \mathbb{P} satisfait la condition (H3) ou (H4), on a les inégalités strictes $0 < \mu(\beta, h) < F(\beta, h)$.

On verra dans la Section 4.3 que la fonction $\mu(\beta, h)$, que l'on voit apparaître ici de façon assez inattendue, a une interprétation naturelle en termes de l'inverse d'une longueur de corrélation "moyennée", tandis que $F(\beta, h)$ est plutôt l'inverse de la longueur de corrélation "typique".

4.2 Phase délocalisée : estimer la taille de τ via des inégalités de concentration

(Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus en collaboration avec G. Giacomin et publiés sur Probability Theory and Related Fields [51].)

Considérons le modèle d'accrochage (non hiérarchique) de la Section 2.2. Comme on l'a mentionné dans la Section 2.3, simplement par des arguments de convexité on voit facilement que si $h < h_c(\beta)$ alors $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}_{N,\omega}(|\tau \cap \{1,\ldots,N\}|)/N = 0$, presque sûrement par rapport à ω . Il s'agit d'un résultat plutôt faible et on aimerait savoir à quelle vitesse la moyenne de la densité de points tend vers zéro. Rappelons aussi que, si $\beta = 0$ et $h < h_c(0)$, dans la limite $N \to \infty$ la cardinalité de l'ensemble τ est une variable géométrique d'ordre 1, voir Section 2.4.

Le résultat suivant nous dit que, dans la phase délocalisée, τ contient au plus de l'ordre de (log N) points, et que la queue de la distribution de $|\tau|$ est dominée par une distribution géométrique, pour des valeurs $|\tau| \ge O(\log N)$:

Théorème 4.2.1. [51] Supposons que la loi \mathbb{P} de ω satisfait l'hypothèse de concentration **(H2)** de la Section 2.2.1. Si $h < h_c(\beta)$, il existe deux constantes positives, c et q, telles que

$$\mathbb{E}\mathbf{P}_{N,\omega}(|\tau \cap \{1,\dots,N\}| \ge m) \le e^{-cm}$$

$$(4.2.1)$$

pour tout N et tout $m \ge q \log N$.

Une difficulté (non seulement d'ordre technique) que l'on rencontre dans la phase délocalisée du modèle d'accrochage désordonné est qu'on ne sait pas montrer que la loi $\mathbf{P}_{N,\omega}$ admet une limite quand $N \to \infty$, contrairement à ce qui se passe pour $\beta = 0$, ou pour $\beta > 0$ mais $h > h_c(\beta)$ (voir les Théorèmes 2.4.3 et 4.1.1).

Il est intéressant de remarquer que si on se place dans la phase délocalisée du modèle annealed, on a des estimations bien plus fortes sur la taille de $\tau \cap \{1, \ldots, N\}$:

Proposition 4.2.2. [51] Si $h < -\log M(\beta)$, il existe une constante positive c telle que

$$\mathbb{E}\mathbf{P}_{N,\omega}(|\tau \cap \{1,\dots,N\}| \ge m) \le e^{-cm}$$
(4.2.2)

pour tout N et tout $m \in \mathbb{N}$.

(Remarquons aussi que ce résultat ne demande pas de supposer (H2)).

Quelques idées de la preuve

Je fais référence à [51] ou [47, Ch. 8] pour une preuve détaillée du Théorème 4.2.1; ici, je veux simplement donner une idée de la méthode et surtout faire émerger le rôle central joué par l'hypothèse de concentration **(H2)**.

On commence par écrire

$$\mathbf{P}_{N,\omega}(|\tau \cap \{1,\ldots,N\}| \ge m) = \frac{\sum_{r \ge m} Z_{N,\omega}(r)}{Z_{N,\omega}} \le \frac{e^{-\beta\omega_N - h}}{K(N)} \sum_{r \ge m} Z_{N,\omega}(r), \qquad (4.2.3)$$

où $Z_{N,\omega}(r)$ est la fonction de partition restreinte aux configurations avec $|\tau \cap \{1, \ldots, N\}| = r$, et l'inégalité vient de (2.3.3). Il faut donc montrer que tous les $Z_{N,\omega}(r)$ sont petits pour $r \geq m$. Puisque nous avons supposé que $h < h_c(\beta)$ strictement, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $h + \varepsilon < h_c(\beta)$ et donc, au point $(\beta, h + \varepsilon)$, on a $\mathbb{E} \log Z_{N,\omega}(r) \leq \mathbb{E} \log Z_{N,\omega} \leq F(\beta, h + \varepsilon) = 0$, où la dernière inégalité est une conséquence de la superadditivité (2.3.2). Remarquons ensuite que $Z_{N,\omega}(r)$ a une dépendance très simple par rapport à h : en effet, $\partial_h \log Z_{N,\omega}(r) = r$. On a donc, au point (β, h) , $\mathbb{E} \log Z_{N,\omega}(r) \leq -r\varepsilon$. La deuxième remarque importante est que, grâce à l'inégalité de concentration, on a (cf. [51, Lemma 2.1])

$$\mathbb{P}(\log Z_{N,\omega}(r) - \mathbb{E}[\log Z_{N,\omega}(r)] \ge u) \le C \exp\left(-\frac{u^2}{C\lambda^2 r}\right):$$
(4.2.4)

la variable $\log Z_{N,\omega}(r)$ est très concentrée pour des petites valeurs de r, puisque chaque configuration qui entre dans la somme de partition $Z_{N,\omega}(r)$ dépend seulement de r parmi les variables ω_n (en formules, on voit que la constante de Lipshitz de $\log Z_{N,\omega}(r)$ est de l'ordre de r). Grâce à (4.2.4) et $\mathbb{E} \log Z_{N,\omega}(r) \leq -r\varepsilon$ on a donc que

$$\mathbb{P}(Z_{N,\omega}(r) \ge e^{-r\varepsilon/2}) \le C \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 r}{4C\lambda^2}\right).$$
(4.2.5)

Si on reprend (4.2.3) on voit que, avec probabilité au moins $1 - C' \exp(-m/C')$ pour un certain $C'(\lambda, \varepsilon) > 0$, on a

$$\mathbf{P}_{N,\omega}(|\tau \cap \{1,\ldots,N\}| \ge m) \le \frac{C''}{K(N)} \exp\left(-m/C''\right)$$
(4.2.6)

pour un certain C'' > 0. Le Théorème suit facilement si on choisit q suffisamment grand dans la condition $m \ge q \log N$.

4.3 Comportement des longueurs de corrélation près du point critique

Les résultats présentés dans cette section sont extraits de deux travaux [79, 80] que j'ai publié sur Journal of Statistical Physics et Electronic Communications in Probability, respectivement. Principalement pour des raisons de simplicité, on va travailler sous l'hypothèse (H4) de désordre borné.

Nous avons vu dans le point 2 du Théorème 4.1.1 que dans la phase localisée les corrélations décroissent exponentiellement avec la distance : on a donc une "longueur de corrélation" finie. Par analogie à d'autres transitions de phase, on s'attend à ce que cette longueur de corrélation diverge à proximité de la ligne critique, i.e. pour $h \searrow h_c(\beta)$, et dans ce cas on aimerait relier l'exposant de cette divergence à l'exposant ν de (2.3.7), qui décrit la façon comme F tend vers zéro au point critique.

Tout d'abord, pour donner une définition précise de longueur de corrélation, définissons la fonction à deux points. Pour cela, il est plus pratique partir du système défini dans l'intervalle $\{-N, \ldots, N\}$ plutôt que dans $\{0, \ldots, N\}$, i.e., de partir d'un renouvellement τ tel que $\tau_0 = -N$ (les incréments $(\tau_i - \tau_{i-1})$ sont toujours i.i.d. comme dans (2.2.1)), et de définir la mesure de Gibbs comme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,\omega}} \exp\left(\sum_{n=-N+1}^{N} \left(\beta\omega_n + h\right)\delta_n\right) \delta_N \tag{4.3.1}$$

(pour simplicité, nous gardons les mêmes notations que avant). Comme dans le point 1 du Théorème 4.1.1, on a que la limite de taille infinie $\mathbf{P}_{\infty,\omega}$ existe pour presque toute réalisation ω du désordre. L'avantage est que, avec cette définition, on s'est débarrassé de l'influence du bord gauche du système et on est bien placé pour étudier le comportement des fonctions de corrélation dans le *bulk* du système.

Un choix naturel est de définir la fonction à deux points comme (pour y > x)

$$G_{\omega}(x,y) := \mathbf{P}_{\infty,\omega}(y \in \tau | x \in \tau) - \mathbf{P}_{\infty,\omega}(y \in \tau)$$
(4.3.2)

(et $G_{\omega}(y,x) = G_{\omega}(x,y)$) et de définir la longueur de corrélation comme le taux de décroissance exponentielle de cette fonction pour $y - x \to \infty$. Un choix s'impose toutefois : on peut soit regarder le taux de décroissance de la moyenne $\mathbb{E} |G_{\omega}(x,y)|$, ou bien de la fonction à deux points à ω fixé. Informellement, on obtiendra dans les deux cas soit la longueur de corrélation typique ξ_{typ} :

$$\frac{1}{\xi_{typ}} = -\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log |G_{\omega}(0,k)|$$
(4.3.3)

soit la longueur de corrélation "moyenne" ξ_{av} donnée par

$$\frac{1}{\xi_{av}} = -\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E} \left| G_{\omega}(0,k) \right|$$
(4.3.4)

(bien sûr, l'existence même de ces limites n'est pas garantie à priori). Cette même double possibilité se présente bien sûr pour d'autres systèmes désordonnés aussi, voir par exemple [27] pour une discussion dans le cas du modèle d'Ising ferromagnétique avec couplages aléatoires. Une question intéressante, à laquelle on reviendra ci-dessous, est de savoir si les deux longueurs de corrélation ont le même type de divergence au point critique.

Regardons d'abord le modèle homogène (dans ce cas, nous écrirons simplement G(x, y) pour la fonction à deux points). En absence de désordre, évidemment il n'y a qu'une seule longueur de corrélation, et on peut voir qu'elle n'est rien d'autre que l'inverse de l'énergie libre, au moins suffisamment près du point critique :

Théorème 4.3.1. Il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < h < h_0$, on a

$$-\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log G(0,k) = F(0,h).$$
(4.3.5)

Ceci est un des résultats démontrés par G. Giacomin dans le Théorème 1.1 de [46]. Remarquons que (4.3.5) implique entre autre que G(0, x) est positif pour x grand, ce qui n'est pas évident à priori.

Dans le cas du modèle désordonné, la question se révèle décidément plus difficile. Il existe pourtant un cas où on a des réponses complètes, et c'est le cas du modèle d'accrochage en dimension (1 + 1) défini en (2.1.1). En d'autres mots, supposons que la loi $K(\cdot)$ de (2.2.1) soit la loi $K^{\text{SRW}}(\cdot)$ du premier retour à l'origine de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} . Ce que j'ai pu montrer dans ce cas est le

Théorème 4.3.2. [79, Th. 3.5] Si $K(\cdot) = K^{SRW}(\cdot)$, on a pour tout $(\beta, h) \in \mathcal{L}$ 1.

$$\frac{1}{\xi_{av}} = -\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E} G_{\omega}(k,0) = \mu(\beta,h) > 0$$

$$(4.3.6)$$

2. Pour presque tout ω ,

$$\frac{1}{\xi_{typ}} = -\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log \, G_{\omega}(k,0) = \mathbf{F}(\beta,h) > 0 \tag{4.3.7}$$

En particulier, ξ_{typ} ne dépend pas de ω .

Il est sous-entendu que $k \in 2\mathbb{N}$, pour respecter la périodicité de la marche aléatoire simple.

On voit donc réapparaître la fonction $\mu(\beta, h)$ du Théorème 4.1.3.

Le propriété de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} qui joue un rôle essentiel dans la preuve est que deux trajectoires qui se croisent doivent nécessairement se rencontrer à un instant donné. Cette observation, rajoutée à un argument de couplage, permet d'écrire $G_{\omega}(x, y)$ comme (en gros) la $\mathbf{P}_{\infty,\omega}$ -probabilité que deux copies de la marche aléatoire S ne se rencontrent pas dans l'intervalle temporel $\{x, \dots, y\}$. Entre parenthèses, cette réécriture montre immédiatement que $G_{\omega}(x, y)$ est positif pour tout ω, x, y .

Si on a quelque peu de foi dans l'universalité des phénomènes critiques, on doit s'attendre à ce que ces résultats restent valables pour n'importe quelle loi $K(\cdot)$ du type (2.2.1), quitte éventuellement à affaiblir un peu l'affirmation en se limitant au comportement près de $h_c(\beta)$. En d'autres mots, il est naturel de conjecturer que, en général,

$$\lim_{h \searrow h_c(\beta)} \frac{\log \xi_{typ}}{|\log F(\beta, h)|} = 1$$
(4.3.8)

$$\lim_{h \searrow h_c(\beta)} \frac{\log \xi_{av}}{|\log \mu(\beta, h)|} = 1.$$
(4.3.9)

Cette question reste ouverte, mais dans l'article [80] j'ai obtenu une borne supérieure qui colle bien avec la conjecture, et cela pour tout $K(\cdot)$:

Théorème 4.3.3. [80, Th. 2.1 et 2.3, voir aussi le Remark 2.5] Soit $(\beta, h) \in \mathcal{L}$. Alors, 1. il existe $C_1 = C_1(\beta, h) > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E} |G_{\omega}(k,0)| \le \frac{1}{C_1 \mu(\beta,h)^{1/C_1}} \exp\left(-C_1 k \frac{\mu(\beta,h)}{|\log \mu(\beta,h)|}\right).$$
(4.3.10)

La constante $C_1(\beta, h)$ ne s'annule pas sur la ligne critique : pour tout ensemble borné $B \subset \mathcal{L}$, on a $\inf_{(\beta,h)\in B} C_1(\beta,h) > 0$.

2. on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|G_{\omega}(k,0)| \le C_2(\omega) \exp\left(-C_1 k \frac{\mathrm{F}(\beta,h)}{|\log \mathrm{F}(\beta,h)|}\right), \qquad (4.3.11)$$

où $C_2(\omega) = C_2(\omega, \beta, h)$ est une variable aléatoire finie presque sûrement, et C_1 est le même que dans le point 1.

Pour terminer, revenons à la question de la relation entre F et μ . Grâce à la définition (4.1.6) et à l'inégalité de Jensen, on voit immédiatement que

$$0 \le \mu(\beta, h) \le F(\beta, h); \tag{4.3.12}$$

comme on l'a déjà affirmé dans le Théorème 4.1.3, les deux bornes sont strictes dans la phase localisée. Dans [79], j'ai amélioré qualitativement la borne inférieure pour μ :

Théorème 4.3.4. [79, Th. 3.3] Pour tout $\beta > 0$ il existe $0 < c(\beta) < \infty$ telle que

$$0 < c(\beta) \frac{F(\beta, h)^2}{\partial_h F(\beta, h)} < \mu(\beta, h)$$
(4.3.13)

 $si \ 0 < h - h_c(\beta) \le 1.$

Pour donner une forme plus parlante à ces bornes, supposons que, pour $\beta > 0$ et $h > h_c(\beta)$,

$$\mathbf{F}(\beta,h) \stackrel{h\searrow h_c(\beta)}{\sim} c_{\mathbf{F}}(h-h_c(\beta))^{\nu} \quad \text{et} \quad \mu(\beta,h) \stackrel{h\searrow h_c(\beta)}{\sim} c_{\mu}(h-h_c(\beta))^{\nu_{\mu}} \tag{4.3.14}$$

(plus généralement, on pourrait remplacer les constantes $c_{\rm F}$, c_{μ} par des fonctions à variation lente de $1/(h - h_c(\beta))$). Bien sur, on a $\nu \ge 2$ et $\nu_{\mu} \ge 2$, comme conséquence du Théorème 3.2.1 et de la borne supérieure en (4.3.12). Alors, on s'aperçoit que (4.3.12) implique

$$(2 \le)\nu \le \nu_{\mu},\tag{4.3.15}$$

tandis que de (4.3.13) il suit que

$$\nu_{\mu} \le \nu + 1.$$
 (4.3.16)

Nous nous attendons à ce qu'on ait égalité $\nu = \nu_{\mu}$ dans les situations où le désordre est non pertinent (au sens du Chapitre 3), et $\nu < \nu_{\mu}$ pour désordre pertinent. En effet, en collaboration avec G. Giacomin nous avons montré l'égalité $\nu = \nu_{\mu}$ pour $\alpha < 1/2$ et désordre petit [55, Th. 2.4].

CONSÉQUENCES DYNAMIQUES DE LA TRANSITION DE LOCALISATION

Dans ce chapitre, on va considérer un cas très particulier du modèle d'accrochage, notamment le modèle d'accrochage homogène en dimension (1 + 1); grâce aux résultats de la Section 2.4, on connaît bien ses propriétés d'équilibre, mais ici on veut étudier plutôt le problème de la relaxation à l'équilibre d'une dynamique de type de Glauber. Il s'agit d'une dynamique stochastique Markovienne, qui a comme mesure invariante et réversible la mesure de Gibbs (2.1.1) (pour $\beta = 0$), et qui évolue avec des mouvements ("updates") locaux.

Il est bien connu que la présence d'une transition de phase thermodynamique entraîne souvent l'existence d'une transition de phase dynamique : le temps que le système met pour s'approcher de l'équilibre change brusquement en traversant le point critique. C'est par exemple le cas pour le modèle d'Ising en dimension $d \ge 2$: ce temps est d'ordre log Npour $T > T_c$, polynomial en N pour $T = T_c$ et exponentiel en N^{d-1} pour $T < T_c$ [69, Chap. 16] (ici, N est la taille linéaire du système, et nous avons en tête le cas de conditions au bord libres). Ceci est dû au fait que, à basse température, la mesure de Gibbs a une forme "à double puits" avec deux phases pures séparées par une barrière de potentiel de l'ordre de N^{d-1} fois la tension superficielle.

Des phénomènes dynamiques bien plus spectaculaires (e.g., le *vieillissement*) se produisent dans les cas des *verres de spin*, comme conséquence du fait qu'à basse température l'espace des configurations se décompose en un grand nombre de "vallées" d'énergie; le temps moyen dont le système a besoin pour sortir d'une vallée est une variable aléatoire à queue lourde.

Comme on le verra, on a aussi une transition dynamique associée à notre transition de localisation, même si le changement de l'ordre de grandeur du temps de relaxation est moins brutal que pour le modèle d'Ising, et basé sur un phénomène plus subtil.

Ce chapitre se situe un peu à part par rapport au reste de ce mémoire, pour ce qui concerne à la fois les questions analysées et les techniques utilisées. En particulier, ici il n'y aura pas de désordre ω : non pas parce qu'il ne serait pas intéressant d'étudier la dynamique près de la transition de localisation pour le modèle d'accrochage désordonné – bien au contraire! – mais plutôt parce que déjà le cas homogène se révèle assez riche (et techniquement ardu). De plus, nous n'adopterons pas le point de vue de regarder seulement les points de contact polymère/défaut (comme nous l'avons fait pour les propriétés d'équilibre, cf. la Remarque 2.1.1) : la dynamique est définie sur l'espace des trajectoires

S et non pas des configurations de τ . Cette approche est beaucoup plus naturelle si on veut mimer l'évolution d'un polymère sous l'effet des fluctuations thermiques.

Pour les propriétés générales des processus de Markov (en particulier, réversibles et sur un espace des états fini) nous renvoyons le lecteur à la monographie [69].

5.1 Transition de phase dynamique pour un modèle d'accrochage homogène

Le modèle qu'on va considérer est simplement le modèle d'accrochage homogène en dimension (1+1) décrit dans la Section 2.1 (avec $\beta = 0$). Les configurations $S = \{S_n\}_{0 \le n \le N}$ sont donc telles que $S_0 = S_N = 0$ et $S_i - S_{i-1} = \pm 1$ (N doit donc être un entier pair) et la mesure de Gibbs est donnée par

$$\mathbf{P}_{N}^{(h)}(S) = \frac{e^{h\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{S_{n}=0\}}}}{Z_{N}^{h}} \mathbf{1}_{\{S_{N}=0\}}.$$
(5.1.1)

On va appeler Ω_N l'ensemble des configurations admissibles pour S. On sait (cf. Section 2.4) que le point critique de la transition de localisation vaut $h_c = 0$ puisque la marche aléatoire simple et symétrique est récurrente en dimension 1.

La dynamique que nous étudions (appelée d'habitude dynamique de bain thermique, ou bien dynamique de Glauber) est très facile à décrire. À chaque site 0 < x < N, on attache une cloche qui sonne à des instants de temps aléatoires s_x^i , $i \ge 1$, tels que les intervalles $(s_x^i - s_x^{i-1})$ sont des variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre 1; les cloches associées à des sites différents sont indépendantes. Si la cloche du site x sonne à l'instant t, on met à l'équilibre S_x , conditionnellement à la valeur instantanée de $S_{x\pm 1}(t)$. Il est facile de voir que le processus S(t) ainsi obtenu est Markovien (et cela grâce à la propriété d'absence de mémoire des variables exponentielles) et que la mesure de Gibbs est réversible (la dynamique satisfait le "bilan détaillé"). Cela signifie que, si $P_{S\to S'}^t$ est la probabilité que le processus de Markov qui démarre en S se trouve en S' après un temps t, on a

$$\mathbf{P}_{N}^{(h)}(S)P_{S\to S'}^{t} = \mathbf{P}_{N}^{(h)}(S')P_{S'\to S}^{t}.$$
(5.1.2)

Puisque l'espace des états Ω_N est fini et le processus est ergodique (vérification immédiate), on sait que la loi du processus au temps t, que l'on dénotera par μ_t^S , où S est la condition initiale, converge exponentiellement vite vers $\mathbf{P}_N^{(h)}$ (pour tout S). Toutefois, cela ne veut pas dire grand chose, si on ne sait pas estimer la dépendance par rapport à N de ce taux de convergence exponentielle.

Il y a plusieurs façons de quantifier la vitesse de convergence à l'équilibre (trou spectral, temps de mélange, constante de log-Sobolev...), et nous nous limitons ici aux deux premières. Le trou spectral, que l'on va dénoter par gap (et qui dépend de h et de N) est la plus petite valeur propre non nulle de (-1) fois le générateur du processus de Markov. Plus intuitivement, le trou spectral est le taux de relaxation des fluctuations à l'équilibre, ou le taux de décroissance exponentielle des corrélations temporelles. En effet, on peut montrer que le gap coïncide avec la meilleure constante C telle qu'on a

$$0 \le \langle f(S(0))f(S(t)) \rangle - \left(\mathbf{P}_{N}^{(h)}(f)\right)^{2} \le Var_{\mathbf{P}_{N}^{(h)}}(f)e^{-Ct}$$
(5.1.3)

pour toute fonction f qui appartient à $L^2(\mathrm{d}\mathbf{P}_N^{(h)})$. La positivité de l'autocorrelation (5.1.3) est une conséquence simple de la réversibilité. Ici, $Var_{\mathbf{P}_N^{(h)}}$ dénote la variance par rapport

à la mesure $\mathbf{P}_N^{(h)}$, et la moyenne $\langle \cdot \rangle$ dénote à la fois la moyenne sur la condition initiale S et sur l'évolution Markovienne :

$$\langle f(S(0))f(S(t))\rangle = \sum_{S,S'} \mathbf{P}_N^{(h)}(S)f(S)P_{S\to S'}^t f(S').$$
 (5.1.4)

Une autre façon de mesurer la vitesse de convergence à l'équilibre est via le *temps de mélange* ("mixing time" en anglais) :

$$T_{\text{mix}} := \inf\left\{t > 0 : \sup_{S} \|\mu_t^S - \mathbf{P}_N^{(h)}\|_{TV} \le \frac{1}{2e}\right\},\tag{5.1.5}$$

où la distance en variation totale entre deux mesures ν et μ sur un espace fini Ω est définie comme

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\nu(x) - \mu(x)|.$$
(5.1.6)

La valeur "de seuil" est fixée à 1/(2e) par convention : toute autre valeur plus petite que 1/2 serait également bonne. Le temps de mélange est lui aussi un taux de relaxation : on peut en effet voir que

$$\sup_{S \in \Omega_N} \|\mu_t^S - \mathbf{P}_N^{(h)}\| \le e^{-\lfloor t/T_{\text{mix}} \rfloor}.$$
(5.1.7)

La différence essentielle entre ces deux quantités est que l'inverse du trou spectral mesure la vitesse de convergence à l'équilibre partant d'une configuration typique (la condition initiale S est moyennée par rapport à $\mathbf{P}_N^{(h)}$), tandis que le temps de mélange considère le pire des cas (d'où le sup sur S dans la définition). Il n'est donc pas surprenant que l'on ait (en toute généralité)

$$\frac{1}{\text{gap}} \le T_{\text{mix}}.$$

Dans le cas du polymère sans interaction, h = 0, on peut prouver [82] que le trou spectral vaut gap = $1 - \cos(\pi/N)$ et que T_{mix} vaut asymptotiquement $(6/\pi^2) N^2 \log N$. Dans un papier paru sur la revue *Electronic Journal of Probability*, avec P. Caputo et F. Martinelli j'ai étudié le cas avec paramètre d'accrochage $h \neq 0$. Voilà un extrait des résultats obtenus :

Théorème 5.1.1. [23] Si h > 0, il existe une constante positive $c_1 = c_1(h)$ telle qu'on a

$$\frac{\pi^2}{2N^2} \sim 1 - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \le \operatorname{gap} \le \frac{c_1}{N} \tag{5.1.8}$$

et

$$\frac{N^2}{c_1} \le T_{\text{mix}} \le \left(\frac{6}{\pi^2} + o(1)\right) N^2 \log N.$$
(5.1.9)

Si h < 0, il existe une constante positive $c_2 = c_2(h)$ telle que

$$T_{\rm mix} \ge \frac{1}{{\rm gap}} \ge c_2 \frac{N^{5/2}}{(\log N)^8}.$$
 (5.1.10)

Il est intéressant de remarquer que cela implique que le point de transition de localisation/délocalisation ($h_c = 0$) correspond aussi à un point de transition dynamique, où le temps de relaxation change qualitativement de comportement.

Au niveau de conjectures : Pour ce qui concerne le cas h > 0, nous pensons que la borne supérieure dans (5.1.8) et la borne inférieure dans (5.1.9) donnent le comportement correct du trou spectral et du temps de mélange; on aurait donc $T_{\text{mix}} \sim cN^2$ et gap $\sim c'/N$. Pour ce qui concerne la phase répulsive h < 0, nous avons des raisons de croire que le comportement $N^{5/2}$ de (5.1.10) est correct (voir la section suivante pour un argument non rigoureux mais suggestif), tandis que les corrections logarithmiques seraient purement dues à une limitation de notre méthode.

5.1.1 Une dynamique effective unidimensionnelle

Considérons la dynamique qui démarre de la configuration la plus positive, S(t = 0) = \land , où $\land_x = x$ pour $x \leq N/2$ et $\land_{N/2+y} = \land_{N/2-y}$. Nous savons que la mesure d'équilibre $\mathbf{P}_N^{(h)}$ est symétrique sous la transformation $S \leftrightarrow -S$ et, grâce au Théorème 2.4.3, que $\mathbf{P}_N^{(h)}(S \leq 0) \geq c > 0$ uniformément en N. Cela signifie que, pour équilibrer, le polymère doit dépasser la "barrière de potentiel" représentée par le défaut répulsif et passer dans le demi-plan négatif, $S \leq 0$. L'image devrait être en gros la suivante :

- 1. Dans un premier temps, la répulsion du défaut confine le polymère dans le demiplan positif; le système relaxe donc vers la mesure d'équilibre conditionnée à $S \ge 0$, $\mathbf{P}_N^{h,+}(\cdot) := \mathbf{P}_N^{(h)}(\cdot|S \ge 0)$ (de même, on définit $\mathbf{P}_N^{h,-}(\cdot) := \mathbf{P}_N^{(h)}(\cdot|S \le 0)$). Pour cela il faut un temps d'ordre $O(N^2 \log N)$ (cela peut être montré rigoureusement [23] si on restreint carrément la dynamique aux configurations $S \ge 0$). Remarquons que ce temps est beaucoup plus petit de $N^{5/2}$ qui est, comme on le verra, le temps qu'il faut pour dépasser la barrière.
- 2. sur une échelle de temps $T_N \gg N^2 \log N$ le système passe au demi-plan négatif : $S \leq 0$. Une conjecture ¹ suggestive est que $T_N \approx N^{5/2}$ et que, si on change l'échelle du temps par un facteur $N^{5/2}$, on a pour $s \gg 1$

$$\mu_{sN^{5/2}}^{\wedge} \stackrel{N \to \infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_{\infty}^{q(s),h}, \tag{5.1.11}$$

où q(s) est un processus Markovien à temps continu, à valeurs dans $\{+, -\}$, avec mesure invariante uniforme et avec taux de saut d'ordre 1, et $\mathbf{P}_{\infty}^{\pm,h}$ est la limite faible de $\mathbf{P}_{N}^{\pm,h}$ pour $N \to \infty$. En mots, le polymère passe de la mesure $\mathbf{P}_{N}^{h,+}$ à la mesure $\mathbf{P}_{N}^{h,-}$ sur une échelle de temps $N^{5/2}$, et les intervalles entre deux transitions sont i.i.d. et exponentiels.

Il reste donc à estimer le premier temps T_N tel que $S_x^{\wedge}(T_N) \leq 0$ pour tout x. Il est plausible que la stratégie la moins coûteuse qui permet au système de passer d'une configuration initiale entièrement positive à une entièrement négative est le suivante :

^{1.} Prise littéralement, cette conjecture est certainement fausse : puisque le défaut n'est pas infiniment répulsif, $\mu_{sN^{5/2}}^{\wedge}$ aura inévitablement (et même pour $N \to \infty$) un (petit) nombre de changements de signe près des bords du système. Néanmoins, (5.1.11) devrait être vraie si on regarde seulement la marginale de $\mu_{sN^{5/2}}^{\wedge}$ sur un sous-système $\{a_N, \ldots, b_N\}$ dont la distance des bords diverge avec $N : 1 \ll a_N, N - b_N \gg 1$.

- 1. en premier lieu, une "bulle négative" est créée près d'un des bords du système (disons, le bord gauche). Par cela, nous entendons qu'il existe $0 < x \leq N/2$ tel que $S_y \leq 0$ pour $y \leq 2x$ et $S_y \geq 0$ pour $y \geq 2x$. Le point 2x sera appelé le bord droit de la bulle.
- 2. la bulle croît jusqu'à ce que son bord droit arrive en N.

Des processus qui entraînent la formation de plusieurs bulles loin des bords du système seront ignorés, puisqu'ils demandent que $S^{\wedge}(t)$ développe plusieurs zéros, ce qui parait plus improbable en vue du Théorème 2.4.3, qui affirme que le nombre de zéros de S est pour $N \to \infty$ une variable géométrique. Suite à ces considérations, nous introduisons un processus simplifié qui devrait mimer le processus de formation et croissance de la bulle. On va supposer implicitement qu'à tout instant t le système est à l'équilibre conditionnellement à la position, 2x, du bord droit de la bulle (rappelons que cela est raisonnable si $T_N \gg$ $N^2 \log N$).



FIGURE 5.1. Une configuration typique avec une bulle négative près du bord gauche. À part le point 2x (le bord droit de la bulle) le polymère a très peu de zéros, puisque la ligne est répulsive.

Considérons une marche aléatoire sur $\{0, ..., N\}$ avec incréments indépendants à valeurs ± 1 et avec mesure invariante

$$\nu(x) := \mathcal{Z}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{3/2} (N-x+1)^{3/2}},$$
(5.1.12)

où $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(N)$ normalise $\nu(\cdot)$ à 1. Il est clair que $\mathcal{Z} \approx N^{-3/2}$ et que

$$\nu(x) = \nu(N-x) \approx (x+1)^{-3/2} \text{ si } x \leq N/2,$$
(5.1.13)

où $A \approx B$ signifie qu'il existe une constante universelle c telle que $(1/c) \leq A/B \leq c$. On considère une dynamique de Metropolis à temps continu, où le taux de saut b(x) de x à x + 1 est donné pour x < N par min $[1, \nu(x+1)/\nu(x)]$, tandis que le taux c(x) de saut de x à x - 1 est déterminé uniquement par la contrainte que $\nu(\cdot)$ soit réversible :

$$\nu(x)b(x) = \nu(x+1)c(x+1)$$

La connexion entre cette dynamique unidimensionnelle et la "dynamique de bulle" décrite ci-dessus est évidente si on interprète 2x comme le bord droit d'une bulle dans un système de taille 2N, et cela parce que d'une part

$$\mathbf{P}_{2N}^{h}(S_{y} \leq 0 \text{ for } y < 2x; S_{y} \geq 0 \text{ for } y > 2x) = \frac{Z_{2x}^{h-\log 2} Z_{2(N-x)}^{h-\log 2}}{Z_{2N}^{h}}$$
(5.1.14)

et d'autre part $Z_N^h \sim c(h)N^{-3/2}$ pour h < 0, comme il découle du Théorème 2.4.4. L'identité (5.1.14) peut être déduite facilement de la Section 2.1.1 (le terme – log 2 dans le potentiel d'accrochage est simplement l'effet de la contrainte de négativité dans l'intervalle $\{0, \ldots, 2x\}$ et de positivité dans l'intervalle $\{2x, \ldots, 2N\}$).

Regardons de plus près la dynamique. Si la particule se trouve en x < N/2, on voit que le taux de saut vers la gauche vaut c(x) = 1 et le taux de saut vers la droite vaut

$$b(x) = \frac{\nu(x+1)}{\nu(x)} \sim 1 - \frac{3}{2x},$$
(5.1.15)

où l'expression approximée est valable pour x grand. La particule ressent donc une dérive ("drift" en anglais) d'intensité $c(x) - b(x) \sim 3/(2x)$ vers la gauche. Par symétrie, quand la particule se trouve en x > N/2 elle ressent plutôt une dérive 3/(2(N-x)) vers la droite. Pour passer de x = 0 à x = N, donc, la particule doit surmonter une barrière de potentiel (la dérive la repousse vers 0 tant qu'elle n'a pas dépassé la moitié du système), mais il s'agit d'une barrière très douce, puisque l'intensité de la dérive diminue en s'éloignant des bords du système (cf. Figure 5.2). La difficulté du problème consiste justement dans le fait que la dérive est très petite (mais non nulle!). En fait, si la dérive valait -v pour x < N/2 et +v pour x > N/2, avec v > 0 indépendant de N, il serait facile de montrer que gap(N) est de l'ordre de $\exp(-cN)$ pour un certain c > 0. Si par contre la dérive était zéro partout, on aurait une marche symétrique sur $\{0, \ldots, N\}$, dont le trou spectral est bien connu et d'ordre $1/N^2$. On va voir dans un instant que on a gap $(N) \sim cN^{-5/2}$, un comportement qui est donc différent soit de l'un soit de l'autre cas limite que l'on vient de discuter.

On va estimer la dépendance en N de l'inverse du trou spectral de cette marche aléatoire, gap $(N)^{-1}$, à l'aide d'une méthode d'inégalités de Hardy due à L. Miclo [70]. Pour cela, il est nécessaire de définir pour $0 \leq i \leq N$

$$B_{+}(i) := \sup_{x > i} \left(\sum_{y=i+1}^{x} \frac{1}{\nu(y)b(y)} \right) \sum_{y \ge x} \nu(y)$$
(5.1.16)

$$B_{-}(i) := \sup_{x < i} \left(\sum_{y=x}^{i-1} \frac{1}{\nu(y)b(y)} \right) \sum_{y \leq x} \nu(y)$$
(5.1.17)

$$B := \min_{0 \le i \le N} (B_{+}(i) \lor B_{-}(i)), \qquad (5.1.18)$$

avec la convention que $B_+(N) = B_-(0) = 0$. Alors, la Proposition 3.1 de [70] affirme que

$$\frac{B}{2} \leqslant \operatorname{gap}(N)^{-1} \leqslant 4B. \tag{5.1.19}$$

Puisque

$$\sum_{y=x}^{N} \nu(y) \approx 1 \approx \sum_{y=0}^{x} \nu(y) \tag{5.1.20}$$

 et

$$b(x) \approx 1, \qquad (5.1.21)$$



FIGURE 5.2. Dans le dessin (a), une marche aléatoire sur $\{0, \ldots, N\}$ où la dérive vaut -v pour x < N/2 et +v pour x > N/2. La particule bouge donc dans un potentiel qui vaut vx pour x < N/2 et v(N - x) pour x > N/2. La barrière de potentiel qu'il faut surmonter pour passer de 0 à N est vN/2, et en effet on peut montrer que gap $(N) \approx \exp(-Nv/2)$. Dans le dessin (b), la marche aléatoire avec mesure invariante (5.1.12). Ici, le potentiel se comporte comme $(3/2) \log x$ pour x < N/2 et est symétrique autour de N/2. La barrière de potentiel à franchir est donc $(3/2) \log N$, mais il n'est pas vrai que gap $(N) \approx \exp(-(3/2) \log N) = N^{-3/2}$! On trouve plutôt gap $(N) \approx N^{-5/2}$. Le mécanisme d'équilibration est donc plus subtil.

si on s'intéresse seulement à l'ordre de grandeur de gap $(N)^{-1}$ et non pas aux constantes précises, on peut remplacer b(y), $\sum_{y \ge x} \nu(y)$ et $\sum_{y \le x} \nu(y)$ par la valeur 1 dans (5.1.16) et (5.1.17). Si on utilise (5.1.13), on trouve

$$B_{+}(i) \approx B_{-}(N-i) \approx \begin{cases} N^{5/2} & \text{if } i \leq N/2\\ (N-i+1)^{5/2} & \text{if } i \geq N/2 \end{cases},$$
(5.1.22)

ce qui implique immédiatement que $gap(N)^{-1} \approx B \approx N^{5/2}$. Remarquons que, en contraste avec la formule (5.1.10), il n'y a pas de facteurs logarithmiques parasites.

Remarquons pour terminer que, si jamais on remplaçait l'exposant 3/2 dans la définition (5.1.12) de la mesure d'équilibre $\nu(\cdot)$ par une autre valeur positive γ , par la même méthode exposée ci-dessus on trouverait que gap $(N) \approx N^{-\rho}$ pour un certain ρ qui dépend de γ (nous laissons le calcul de $\rho(\gamma)$ comme exercice au lecteur intéressé). Cela est assez surprenant à première vue, si on observe que dans ce cas la dérive ressentie par la particule (disons pour x < N/2) vaut

$$c(x) - b(x) \sim \frac{\gamma}{x}$$
:

modifier le préfacteur de 3/2 à γ dans l'expression de la dérive est donc suffisant pour changer drastiquement l'ordre de grandeur du temps de relaxation du système!

EXTENSIONS ET PERSPECTIVES

6

Ce dernier chapitre veut être une mise en perspective des résultats présentés jusqu'à ici pour le modèle d'accrochage. Le message que je voudrais faire passer est que les méthodes que nous avons développés pour ce modèle particulier se révèlent en réalité très puissants aussi dans l'étude d'autres modèles de polymères en milieu aléatoire.

6.1 Hétéropolymères à l'interface entre deux solvants (copolymères)

Les copolymères (ou hétéropolymères) sont des chaînes de monomères non-identiques. On va considérer le cas où certains monomères ont une affinité pour un solvant A (mettons, l'huile), et d'autres pour un solvant B (disons, l'eau). Les affinités chimiques, que nous appellerons aussi charges, sont fixées le long de la chaîne et on va modéliser la suite des charges comme du désordre gelé. Le milieu dans lequel le (co)polymère fluctue est celui schématisé dans la Figure 6.1 : chacun des deux solvants occupe la moitié de l'espace et ils sont séparés par une interface nette (et plate). Il est assez intuitif que, s'il y a une forte prévalence des monomères avec affinité pour un des deux solvants, le polymère va se placer essentiellement entièrement dans celui-ci, autrement il restera plutôt près de l'interface entre les deux. Encore une fois, on voit donc apparaître un phénomène de localisation/délocalisation.

Il y a une littérature assez développée sur les modèles de copolymère : en particulier, des modèles basés sur les marches aléatoires auto-évitants ont été considérés, cf. l'article [81] et sa bibliographie. Un modèle à l'apparence très simple, mais qui s'est en réalité révélé être un vrai défi théorique, a été proposé en [44]. Il s'agit d'un modèle bidimensionnel, au fait (1+1)-dimensionnel, où la propriété d'auto-évitement est automatiquement satisfaite grâce au caractère dirigé des trajectoires. Pour définir sa mesure de Gibbs $\mathbf{P}_{N,\omega}$, on part de la marche aléatoire simple S sur \mathbb{Z} , de loi \mathbf{P} , et définit

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) := \frac{1}{Z_{N,\omega}} \exp\left(\lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h) \operatorname{sign}(S_n)\right).$$
(6.1.1)

Ici, on adopte la convention que si $S_n = 0$, alors $\operatorname{sign}(S_n) := \operatorname{sign}(S_{n-1})$ qui est défini sans ambiguïté. Cela correspond à dire que le signe de S_n est +1 (resp. -1) si le *n*-ième monomère, (S_{n-1}, S_n) , se trouve dans le demi-plan positif (resp. négatif), cf. Figure 6.1.



FIGURE 6.1. Dans le dessin d'en haut, une trajectoire du modèle de copolymère (6.1.1). Le *n*-ième monomère, i.e. le segment qui a comme extrémités les points $(n-1, S_{n-1})$ et (n, S_n) , porte une charge $\omega_n + h$, où h est constant et ω_n est tirée au hasard, mais fixée une fois pour toutes (désordre gelé), tandis que le polymère fluctue. Les monomères chargés positivement reçoivent une récompense en termes d'énergie s'ils se trouvent dans le demiplan positif, occupé par le solvant A, et ils sont pénalisés s'ils se trouvent dans le demi-plan négatif (solvant B). Pour les monomères avec charge négative, la situation est inversée. Si $h \neq 0$, le modèle n'est pas symétrique sous la transformation $S \leftrightarrow -S$. Les trajectoires les plus favorables du point de vue de l'énergie sont donc celles qui placent la plupart des monomères dans leur solvant favori, mais de telles trajectoires doivent nécessairement rester près de l'interface, et sont donc beaucoup moins nombreuses par rapport à celles qui se promènent librement. Cela conduit à une compétition énergie/entropie entre les trajectoires localisées et délocalisées. Observons aussi que l'énergie ne dépend pas des détails de la trajectoire entre deux visites successives à l'interface, de telle façon que le modèle peut être schématisé comme dans le deuxième dessin, i.e. simplement en termes de $\tau_1 = 4, \tau_2 - \tau_1 = 12, \tau_3 - \tau_2 = 2, \tau_4 - \tau_3 = 12,...$ (les distances entre les retours successifs à l'interface) et du signe des excursions. Cette version schématisée du modèle peut être immédiatement généralisée à des lois de retour arbitraires $K(\cdot)$, avec un exposant de queue donné par $\alpha + 1$. Dans le modèle généralisé aussi, le signe des excursions est une suite de variables i.i.d. symétriques (qui est indépendante de la réalisation de τ).

On voit donc que le monomère numéro n a une affinité pour le solvant A si la "charge" $(\omega_n + h)$ est positive, et inversement pour B si la charge est négative.

Comme pour le modèle d'accrochage, ω est une suite de variables aléatoires i.i.d., centrées, de variance égale à 1 et à moments exponentiels finis. Selon le résultat que l'on veut montrer et la méthode que l'on applique, on fera une ou plusieurs des hypothèses **(H2)-(H5)** de la Section 2.2.1. Sans aucune perte de généralité, on peut supposer que λ et h sont positifs ou nuls (et cela parce que la loi **P** est invariante sous $S \leftrightarrow -S$). Avec la convention h > 0, on a que le solvant B (celui qui se trouve dans le demi-plan négatif) est à priori le moins favorable.

Si on définit $\Delta_n := [1 - \operatorname{sign}(S_n)]/2$ et $\widetilde{Z}_{N,\omega} = Z_{N,\omega} \exp(-\lambda \sum_{n=1}^N (\omega_n + h))$, on peut récrire

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) = \frac{1}{\widetilde{Z}_{N,\omega}} \exp\left(-2\lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h) \,\Delta_n\right)$$
(6.1.2)
avec

$$\widetilde{Z}_{N,\omega} = \mathbf{E}\left[\exp\left(-2\lambda\sum_{n=1}^{N}\left(\omega_n + h\right)\Delta_n\right)\right].$$
(6.1.3)

Remarquons que Δ_n vaut 1 si le *n*-ième monomère se trouve dans le demi-plan négatif, et zéro sinon.

Remarque 6.1.1. Généralisations Comme pour le modèle d'accrochage (cf. les Sections 2.1 et 2.2), il serait possible de suivre la démarche suivante : après avoir défini le modèle particulier (6.1.1), on pourrait le généraliser à un modèle basé sur un processus de renouvellement τ , qui remplacerait l'ensemble des zéros de la marche aléatoire simple. On aurait donc un modèle de copolymère qui dépend d'une certaine loi inter-arrivées $K(\cdot)$, et en particulier de son exposant $\alpha > 0$. Les résultats que nous avons obtenus pour le modèle de copolymère dans les articles [18, 52, 53, 77, 78] sont montrés directement pour ce modèle généralisé. Par souci de simplicité, nous n'allons pas définir le modèle généralisé ici, mais une description informelle est donnée dans la Figure 6.1.

Une autre généralisation possible [52] est celle de considérer un modèle où le Hamiltonien contient à la fois un terme d'accrochage désordonné du type $\sum_n (\beta \omega_n^{(1)} + h) \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}$ et un terme de copolymère $\lambda \sum_n (\omega_n^{(2)} + h') \Delta_n$, avec $\omega^{(1)}$ et $\omega^{(2)}$ deux familles de variables aléatoires indépendantes. Cela mène à des questions intéressantes sur l'interaction entre l'effet d'accrochage et celui de l'asymétrie entre les deux solvants; voir [47, Section 6.3.2] pour une discussion des problèmes ouverts liés à ce point). Ce modèle "hybride" a entre autre comme avantage pratique celui de permettre de montrer au même temps certains résultats pour le modèle d'accrochage et pour le copolymère.

Comme pour le modèle d'accrochage, on définit l'énergie libre $F(\lambda, h)$ comme la limite de taille infinie de $(1/N) \log \tilde{Z}_{N,\omega}$ et, une fois remarqué à nouveau que $F(\lambda, h) \geq 0$, on introduit le point critique comme la valeur de h qui sépare la région où $F(\lambda, h)$ est nulle (phase délocalisée) de celle où elle est positive (phase localisée). Par rapport au modèle d'accrochage, remarquons que l'énergie libre du copolymère est non-croissante (au lieu que non-décroissante) comme fonction de h, de telle façon que on a $h_c(\lambda) = \sup\{h : F(\lambda, h) > 0\}$, à comparer avec (2.3.6) (bien sûr, cette différence est due uniquement aux différentes conventions adoptées dans la définition des deux modèles).

Une différence bien plus substantielle entre les deux modèles consiste dans le fait que le paramètre d'ordre qui distingue les deux phases est de nature différente. Rappelons (cf. Section 2.3) que, pour le modèle d'accrochage, il s'agit de la fraction de contact, $\lim_{N}(1/N)\mathbf{E}_{N,\omega}[|\tau \cap \{1,\ldots,N\}|]$, qui est positive dans la phase localisée et nulle dans la phase délocalisée. Pour le copolymère, il est plus approprié de regarder

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbf{E}_{N,\omega}[\mathcal{N}_N],$$

où

$$\mathcal{N}_N := \sum_{n=1}^N \Delta_n,$$

qui n'est rien d'autre que le nombre de monomères qui se trouvent dans le demi-plan négatif (i.e., le solvant le plus défavorable). Il est immédiat de voir que ce paramètre d'ordre coïncide¹ avec $-1/(2\lambda)\partial_h F(\lambda, h)$, de telle façon qu'il est nul dans la phase délocalisée (la fraction de monomères dans le solvant le moins favorable tend à zéro pour $N \to \infty$) et positif dans la phase localisée.

Il est facile de calculer l'énergie libre annealed et son point critique, qui ont une forme très simple :

$$h_c^{\rm ann}(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} \log \mathbb{E}(\exp(-2\lambda\omega_1)) \stackrel{\lambda \searrow 0}{\sim} \lambda \tag{6.1.4}$$

et

$$\mathbf{F}^{\mathrm{ann}}(\lambda,h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}\widetilde{Z}_{N,\omega} = \begin{cases} 2\lambda(h_c^{\mathrm{ann}}(\lambda) - h) & si \quad h < h_c^{\mathrm{ann}}(\lambda) \\ 0 & si \quad h \ge h_c^{\mathrm{ann}}(\lambda). \end{cases}$$
(6.1.5)

Pour cela, il suffit de remarquer que

$$\mathbb{E}\widetilde{Z}_{N,\omega} = \mathbf{E}\left[e^{\sum_{n \leq N} \Delta_n (2\lambda(h_c^{\mathrm{ann}}(\lambda) - h))}\right]$$

qui d'un côté est plus petit que $\exp[2\lambda N(h_c^{ann}(\lambda) - h)]$ et de l'autre est plus grand que

 $e^{2\lambda N(h_c^{\mathrm{ann}}(\lambda) - h)} \mathbf{P}(S_n < 0 \text{ pour tout } 0 < n \le N).$

Puisque il est bien connu que $\mathbf{P}(S_n < 0 \text{ pour tout } 0 < n \leq N) \sim const \times N^{-1/2}$, on obtient immédiatement (6.1.5). Comme comparaison, rappelons que l'énergie libre du modèle d'accrochage annealed n'a pas d'expression si explicite, et qu'elle s'exprime à travers la transformée de Laplace de la loi du premier point de τ (cf. Proposition 2.4.1).

Grâce à l'inégalité de Jensen, on a bien sûr $h_c(\lambda) \leq h_c^{\text{ann}}(\lambda)$.

Un fait à première vue un peu troublant est que le modèle annealed est *toujours* délocalisé. Pour cela, il suffit de calculer son paramètre d'ordre :

$$-\frac{1}{2\lambda}\partial_{h}\mathbf{F}^{\mathrm{ann}}(\lambda,h) = \begin{cases} 1 & if \quad h < h_{c}^{\mathrm{ann}}(\lambda) \\ 0 & if \quad h > h_{c}^{\mathrm{ann}}(\lambda) \end{cases}$$
(6.1.6)

pour $h < h_c^{\text{ann}}(\lambda)$ le polymère est complètement délocalisé dans le demi-plan négatif et pour $h > h_c^{\text{ann}}(\lambda)$ il est délocalisé dans le demi-plan positif! Le point de transition $h_c^{\text{ann}}(\lambda)$ ne correspond donc pas à une transition de localisation/délocalisation (et cela en contraste avec le modèle d'accrochage annealed, qui présente une vraie transition de localisation/délocalisation).

Pour éviter tout risque de confusion, soulignons que par contre le modèle de copolymère quenched a une vraie transition de localisation : pour cela, il suffit d'observer que, grâce au Théorème 6.1.2 ci-dessous, le paramètre d'ordre $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbf{E}_{N,\omega}[\mathcal{N}_N] = -1/(2\lambda)\partial_h F(\lambda, h)$ s'annule de façon continue pour $h \nearrow h_c(\lambda)$. Plus en général, on peut montrer [52] que le paramètre d'ordre a une valeur strictement comprise entre 0 et 1 dans toute la région où $F(\lambda, h) > 0$. Pour $h < h_c(\lambda)$ on a, donc, à la fois une fraction positive de monomères dans

^{1.} cela est vrai pour tout h tel que la fonction $h \mapsto F(\lambda, h)$ est différentiable. D'ailleurs, il suit de nos résultats [52, Th. 2.1] et [53, Th. 2.1] que $F(\lambda, h)$ est différentiable partout.

le demi-plan négatif et une fraction positive dans le demi-plan positif. On peut montrer aussi que pour $h < h_c(\lambda)$ et pour tout $x \leq N$ et a > 0 on a

$$\mathbb{E}\mathbf{P}_{N,\omega}(|S_x| \ge a) \le c \, e^{-a/c} \tag{6.1.7}$$

pour un certain $c(\lambda, h) > 0$ indépendant de N [52] : le copolymère est donc bien localisé le long de l'interface.

6.1.1 Quel rapport avec le modèle d'accrochage?

Si on compare la définition de la mesure de Gibbs pour le modèle d'accrochage désordonné, formule (2.2.2), et du copolymère, formule (6.1.2), on remarquera sans doute une grande ressemblance formelle, liée aussi au fait que à la fois Δ_n et $\delta_n := \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}$ prennent seulement les valeurs 0 et 1. Cette impression est renforcée par le fait que beaucoup parmi les résultats que nous avons présenté dans ce mémoire pour le modèle d'accrochage ont une généralisation directe (avec des preuves presque identiques) pour le copolymère. En particulier :

- le Théorème 4.2.1, qui donne une borne supérieure sur la cardinalité de τ∩{1,...,N} dans la phase délocalisée, a un analogue pour le modèle de copolymère. Dans ce cas, toutefois, la quantité naturelle à regarder est plutôt N_N := |{n ≤ N : Δ_n > 0}| qui, comme nous l'avons discuté dans la section ci-dessus, est liée au paramètre d'ordre du modèle de copolymère. On peut montrer [51] que le Théorème 4.2.1 reste valable pour le modèle de copolymère, si on remplace |τ∩{1,...,N}| par N_N et la condition h < h_c(β) par h > h_c(λ). En d'autres mots, dans la phase délocalisée il y a au plus de l'ordre de (log N) points où le polymère se trouve dans le solvant le moins favorable ;
 le Théorème 3.2.1 se généralise lui aussi de façon immédiate à ce modèle [53] :
- **Théorème 6.1.2.** [53, Th. 2.1] Si la loi \mathbb{P} satisfait l'hypothèse (H3) ou (H4), pour tout $\lambda > 0$ il existe $0 < c(\lambda) < \infty$ tel que

$$F(\lambda, h) \le c(\lambda)(h_c(\lambda) - h)^2 \tag{6.1.8}$$

pour tout $h < h_c(\lambda)$.

L'idée de la preuve est essentiellement la même que pour le modèle d'accrochage, cf. Section 3.2.1.

 la méthode des moments fractionnaires/changement de mesure permet de montrer que les points critiques annealed et quenched diffèrent pour désordre arbitrairement faible :

Théorème 6.1.3. [77] et [18, Th. 2.10] On a $h_c(\lambda) < h_c^{ann}(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.

Arrivés à ce point, on pourrait avoir l'impression que finalement les modèles d'accrochage désordonné et de copolymère sont très similaires et qu'on peut traduire le comportement de l'un dans celui de l'autre, quitte à faire les bonnes substitutions des paramètres. Cela est bien loin d'être vrai, et les deux modèles manifestent vraiment des phénomènes différents. Une façon de s'en convaincre est la suivante. Comme nous l'avons mentionné dans la Remarque 6.1.1, on peut généraliser le modèle de copolymère en remplaçant la marche aléatoire simple par un processus tel que la loi de l'intervalle temporel qui s'écoule entre deux retours successifs à l'origine se comporte comme $const \times n^{-\alpha-1}$ pour n grand. Or, il est facile de voir que l'expression (6.1.5) de l'énergie libre annealed reste inchangée : la transition annealed est du premier ordre pour tout α ! D'autre part, les Théorèmes 6.1.3 et 6.1.2 restent eux aussi valables pour tout α (quitte à remplacer $c(\lambda)$ dans (6.1.8) par une constante $0 < c(\lambda, \alpha) < \infty$). Cela signifie que le désordre est pertinent pour n'importe quelle valeur de α et il n'existe pas de valeur marginale α_c qui sépare les régimes de désordre pertinent et non-pertinent, comme on a vu être le cas pour le modèle d'accrochage, où $\alpha_c = 1/2$.

6.1.2 Universalité et comportement à faible désordre

L'aspect du copolymère qui a attiré le plus d'attention dans la littérature est le comportement de la courbe critique $\lambda \mapsto h_c(\lambda)$ pour désordre petit, qui est universel. En fait, sa pente à l'origine ne dépend ni des détails de la loi de la marche aléatoire simple, ni de la distribution du désordre (cf. la Remarque 6.1.5 ci-dessous pour un énoncé plus précis). Remarquons tout d'abord que déjà l'existence de la pente à l'origine, i.e. de la limite $\lim_{\lambda\to 0} h_c(\lambda)/\lambda$, est loin d'être évidente. C'est un résultat qui a été montré par E. Bolthausen et F. den Hollander, qui ont aussi identifié cette limite avec la pente à l'origine de la ligne critique d'un modèle de copolymère continu et Brownien. Le modèle continu est formellement très similaire à (6.1.1), mais par contre le polymère n'est plus modélisé à partir d'une marche aléatoire à temps discret, mais à partir d'un Mouvement Brownien. La suite des charges devient donc un bruit blanc, puisque les monomères ont pour ainsi dire une longueur infinitésimale. En formules, la fonction de partition pour le système de taille t est donnée par

$$Z_{t,\beta}^{BM} := \mathbf{E}\left[\exp\left(-2\lambda \int_0^t \Delta(B(u))(\,\mathrm{d}\beta(u) + h\,\mathrm{d}u)\right)\right]$$
(6.1.9)

où $\Delta(x) := \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)$, tandis que $\beta(\cdot)$ (le polymère) et $B(\cdot)$ (le milieu aléatoire) sont deux Mouvements Browniens standard indépendants, de lois \mathbf{P} et \mathbb{P} respectivement. On peut définir à nouveau une énergie libre $F_{BM}(\lambda, h)$ comme la limite de $(1/t) \log Z_{t,\beta}^{BM}$ pour $t \to \infty$. La nouveauté ici est que, grâce aux propriétés d'invariance d'échelle du Mouvement Brownien, on a pour tout a > 0 l'identité $a^2 F_{BM}(\lambda, h) = F_{BM}(a\lambda, ah)$. En particulier, la ligne critique est une ligne droite : $h_c^{BM}(\lambda) = m_{BM}\lambda$. Le lien entre les deux modèles est donné par

Théorème 6.1.4. [21] Pour tout $\lambda, h \ge 0$ on a

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a^2} F(a\lambda, ah) = F_{BM}(\lambda, h), \qquad (6.1.10)$$

et

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{h_c(\lambda)}{\lambda} = m_{BM} \in (0, 1].$$
(6.1.11)

Il reste évidemment à calculer m_{BM} . Numériquement, il semblerait que la valeur de m_{BM} soit autour de 0.83 [26]. Ce qui est connu rigoureusement est par contre que

$$2/3 \le m_{BM} < 1. \tag{6.1.12}$$

La borne inférieure a été montrée par T. Bodineau et G. Giacomin avec une méthode de grandes déviations qui a nous a beaucoup servi d'inspiration dans la preuve du Théorème

3.2.1 (voir aussi la Section 6.1.3 ci-dessous pour plus de discussion sur les bornes inférieures). Pour ce qui concerne la borne supérieure, par contre, remarquons d'abord que déjà la borne "annealed" $h_c(\lambda) \leq h^{\mathrm{ann}}(\lambda)$ implique $m_{BM} \leq 1$. L'inégalité stricte $m_{BM} < 1$ est montrée dans mon article [78], paru sur la revue *Electronic Journal of Probability*, où j'utilise la méthode de moments fractionnaires/changement de mesure, et en plus une procédure de *coarse graining*. Sans donner aucun détail, je voudrais remarquer que la raison pour laquelle dans [18] nous avions étés capables de montrer l'inégalité $h_c(\lambda) < h_c^{\mathrm{ann}}(\lambda)$ mais non pas de montrer $m_{BM} < 1$ est qu'il nous manquait l'ingrédient du coarse-graining.

Remarque 6.1.5. Le titre de cette section contient le mot magique "universalité" en connexion avec le comportement de la ligne critique à faible désordre, et nous allons en dire un peu plus ici. Récemment, G. Giacomin et F. Caravenna [25] ont étendu le Théorème 6.1.4 au cas du modèle de copolymère généralisé, pour tout $0 < \alpha < 1$. Dans ce cas, le Mouvement Brownien $B(\cdot)$ est remplacé par un processus continu construit à partir du processus de Bessel en dimension $2(1 - \alpha)$. Sans vouloir donner aucun détail (pour cela, nous renvoyons le lecteur à [25]), nous soulignons que Caravenna et Giacomin ont montré que, pour le modèle généralisé, la pente de la courbe critique à l'origine ne dépend pas des détails de la loi du renouvellement τ ou de la loi de ω (pourvu que les ω_n ont des moments exponentiels finis), mais seulement de l'exposant α . Si on appelle m_{α} sa valeur, on a bien sûr $m_{BM} = m_{1/2}$. Dans [78], j'ai montré que $m_{\alpha} < 1$ (la valeur annealed) pour tout $\alpha > 0$. Des bornes inférieures pour m_{α} sont données dans [18, Th. 2.8].

6.1.3 Bornes inférieures : à la recherche d'une bonne "stratégie"

Comme nous l'avons mentionné brièvement dans la Section 3.4.1, pour donner des bornes supérieures sur la différence $|h_c(\beta) - h_c^{\operatorname{ann}}(\beta)|$ pour le modèle d'accrochage, i.e. pour montrer que dans certaines situations les énergies libres quenched et annealed sont assez proches, on utilise des méthodes qui peuvent être vues comme des versions (très sophistiquées) de la méthode du deuxième moment [5, 76]. On peut donc essayer à appliquer des idées similaires pour obtenir des bornes supérieures sur $|h_c(\lambda) - h_c^{\operatorname{ann}}(\lambda)|$ pour le copolymère, i.e., des bornes inférieures sur $h_c(\lambda)$. Malheureusement, par cette voie on n'obtient rien d'intéressant. Finalement, cela n'est pas très étonnant : pour le modèle d'accrochage, ces méthodes ont marché dans les situations où les systèmes quenched et annealed se comportent de façon similaire ($\alpha < 1/2$, ou bien $\alpha > 1/2$ et $h - h_c^{\operatorname{ann}}(\beta) \ge c\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}$). Pour le copolymère, par contre, les modèles quenched et annealed sont toujours très différents : par exemple, le modèle annealed est toujours délocalisé, voir la discussion à la fin de la Section 6.1.

L'idée utilisée par Bodineau et Giacomin [17] pour montrer que $m_{BM} \ge 2/3$ consiste plutôt à identifier un ensemble de trajectoires, S_{ω} , suffisamment probables (sous la mesure $\mathbf{P}_{N,\omega}$) et d'utiliser la borne triviale

$$\mathbf{F}(\lambda, h) \ge \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z'_{N,\omega}$$

où $Z'_{N,\omega}$ est la fonction de partition restreinte aux configurations $S \in S_{\omega}$. Bien sûr, cette procédure est utile seulement si d'un côté cette limite est facile à calculer, et de l'autre côté si elle est strictement positive. Il faut donc deviner quelle est la "stratégie" que le copolymère utilise pour se localiser, et essayer de la mimer avec le choix de S_{ω} . Le choix de [17] a été de prendre S_{ω} comme (en gros) l'ensemble des trajectoires qui visitent le demi-plan inférieur (le solvant le moins favorable) seulement dans des régions où la moyenne empirique des ω_n est plus négative qu'une certaine valeur -q fixée (on optimise ensuite sur q). Avec ce choix, on trouve que, pour λ petit, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z'_{N,\omega} > 0$ si et seulement si $h < (2/3)\lambda$, dont découle immédiatement la borne inférieure dans (6.1.12). Le fait que numériquement m_{BM} soit plutôt autour de 0.83, donc assez loin de 2/3 =0.66..., indique que la vraie "stratégie de localisation" du copolymère est assez différente de celle qui consiste simplement à chercher des régions où la moyenne empirique des ω_n est atypiquement négative.

La recherche de la "bonne stratégie" nous a occupé assez longtemps, avec un succès assez partiel. Pour le modèle de copolymère généralisé, la stratégie de Bodineau et Giacomin donne $m_{\alpha} \geq 1/(1+\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$. Dans [18], nous avons montré que $m_{\alpha} > 1/(1+\alpha)$ strictement, dès que α est suffisamment grand ($\alpha > 0.65...$ suffit, mais le cas $\alpha = 1/2$ reste hors portée). En tout cas, tout cela montre que notre compréhension du mécanisme de la transition de (de)localisation pour le copolymère est encore loin d'être complète.

6.2 D'autres modèles de polymères en milieu aléatoire

Dans cette section je vais mentionner brièvement deux modèles très intéressants où certaines idées, que nous avions développé pour le modèle d'accrochage désordonné, ont été appliquées et généralisées avec succès par d'autres auteurs. Mon but ici n'est pas de donner des détails concernant les modèles ou les résultats, mais seulement de montrer que les techniques que nous avons introduites sont applicables bien au delà du modèle particulier (accrochage désordonné) que nous a guidé pendant notre étude.

6.2.1 Polymères dirigés en milieu aléatoire

Soit $S = \{S_n\}_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d (pour un certain $d \in \mathbb{N}$) de loi \mathbf{P} , qui part de l'origine : $S_0 = 0$ et $\mathbf{P}(S_{i+1} = S_i \pm e_j) = 1/(2d)$ pour tout $j = 1, \ldots, d$. Soit $\{\omega_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}^d}$ une collection de variables aléatoires i.i.d.. Dans le cas le plus simple, on supposera qu'elles ont des moments exponentiels finis :

$$M(\beta) := \mathbb{E}(\exp(\beta\omega_{1,0})) < \infty.$$

Pour une réalisation ω donnée du désordre, on va considérer la mesure de polymère

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) = \frac{e^{\sum_{n=1}^{N} (\beta\omega_{n,S_n} - \log M(\beta))}}{Z_{N,\omega}},\tag{6.2.1}$$

où bien sûr

$$Z_{N,\omega} = \frac{\mathbf{E}\left[e^{\beta \sum_{n=1}^{N} \omega_{n,S_n}}\right]}{M(\beta)^N}.$$
(6.2.2)

L'hamiltonien du système est donc simplement la somme des potentiels qui se trouvent le long de la trajectoire S. Ce modèle a été introduit dans la littérature physique [61] dans le cas d = 1, pour décrire le comportement des interfaces dans le modèle d'Ising bidimensionnel, en présence d'impuretés (par exemple, en présence d'un champs magnétique

aléatoire h_i qui agit sur chaque site $i \in \mathbb{Z}^2$). Depuis, il a attiré beaucoup d'intérêt parmi les probabilistes, en vue de ses connexions multiples avec d'autre domaines des probabilités et de la physique mathématique : équation KPZ et équation de Burgers stochastique, "last passage percolation", le modèle d'Anderson parabolique, etc.

Puisque la fonction de partition a été normalisée de telle façon que $\mathbb{E}Z_{N,\omega} = 1$, on aura que l'énergie libre

$$F(\beta) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N,\omega}$$
(6.2.3)

est toujours négative ou nulle. On dira qu'on se trouve dans la région de désordre faible si l'énergie libre est nulle (cela arrive pour $\beta \leq \beta_c$, où β_c est une valeur de seuil qui à priori peut valoir aussi 0 ou $+\infty$) et dans la région de désordre fort si l'énergie libre est négative $(\beta > \beta_c)$. Sans entrer dans les détails de ce qui est montré mathématiquement et ce qui est seulement conjecturé, on a la situation suivante : la marche S va être diffusive (comme pour $\beta = 0$) pour $\beta < \beta_c$, et super-diffusive dans la région de désordre fort.

Pour d = 1, F. Comets et V. Vargas ont démontré que $F(\beta) < 0$ pour tout $\beta > 0$ [32] : il n'y a pas de région de désordre faible. Pour $d \ge 3$, par contre, il est connu que β_c est positif et fini [62, 19] : il y a donc une transition non triviale. La dimension "critique" se révèle donc être d = 2. Dans ce cas, H. Lacoin a montré récemment [66] que $F(\beta) < 0$ pour tout $\beta > 0$: le désordre est toujours fort, comme pour d = 1, mais dans ce cas $F(\beta)$ approche zéro beaucoup plus vite pour $\beta \searrow 0$ (on a $F(\beta) \ge -\exp(-const/\beta^2)$ pour d = 2et $F(\beta) \sim -const \times \beta^4$ pour d = 1). On peut en effet dire que, pour ce modèle de polymère dirigé, la dimension d = 2 est l'analogue du cas $\alpha = 1/2$ du modèle d'accrochage.

La preuve des résultats de [66] se base de façon importante sur l'idée de changement de mesure/analyse de moments fractionnaires introduite dans [48, 35, 49] d'un côté, et sur la méthode de "coarse graining" de [78] de l'autre côté.

6.2.2 Modèle d'accrochage sur une marche aléatoire

Considérons deux marches aléatoires symétriques sur \mathbb{Z}^d , X et Y, de lois \mathbf{P}^X et \mathbf{P}^Y respectivement, qui partent de l'origine. La trajectoire de Y doit être imaginée comme gelée (désordre quenched) tandis que la loi de X est modifiée par l'interaction avec Y de la façon suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,Y}}{\mathrm{d}\mathbf{P}^X}(X) = \frac{e^{\beta \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{X_n = Y_n\}}}}{Z_{N,Y}},\tag{6.2.4}$$

où $\beta \geq 0$. L'hamiltonien est donc simplement le nombre d'instants de temps où les deux marches se trouvent au même endroit. Une question intéressante est de déterminer quelle est la valeur critique $\beta_c(d)$ à partir de laquelle la marche X "colle à" la marche Y (et cela pour \mathbf{P}^Y -presque toute trajectoire de Y).

Ce modèle a été étudié en particulier dans [13] et [12] sous le nom de "Random Walk Pinning Model" (RWPM), ou "modèle d'accrochage sur une marche aléatoire". On peut remarquer une certaine similarité avec le modèle d'accrochage désordonné de la Section 2.2, mais des différence importantes s'imposent : tandis que dans le modèle d'accrochage on a un polymère qui interagit *de façon aléatoire* avec un défaut de forme *non aléatoire* (le défaut juste une ligne droite), dans le modèle que nous considérons dans cette section le défaut a une forme aléatoire, mais le paramètre d'accrochage est constant. On peut voir facilement que la version annealed du modèle (6.2.4) n'est rien d'autre que le modèle d'accrochage homogène de la Section 2.4, où

$$K(n) = \mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y(\inf\{k > 0 : X_k = Y_k\} = n)$$

et le potentiel d'accrochage est β . En particulier, on trouve que $\beta_c^{\text{ann}}(d) = 0$ pour d = 1, 2et $\beta_c^{\text{ann}}(d) > 0$ pour $d \ge 3$ (puisque la marche X - Y est récurrente en dimension 1 et 2 et transiente sinon). L'inégalité de Jensen implique que $\beta_c(d) \ge \beta_c^{\text{ann}}(d)$.

Dans [13], M. Birkner et R. Sun montrent que, sous l'hypothèse simplificatrice que \mathbf{P}^X et \mathbf{P}^Y coïncident avec la loi de la marche aléatoire simple, $\beta_c(d) = \beta_c^{\mathrm{ann}}(d) = 0$ pour d = 1, 2, tandis qu'on a inégalité stricte $\beta_c(d) > \beta_c^{\mathrm{ann}}(d)$ pour $d \ge 4$. La preuve de ce dernier résultat est basée sur une jolie application de la méthode des moments fractionnaires/changement de la mesure que nous avons introduit dans [35]².

Le cas de la dimension marginale d = 3 est le correspondant du cas $\alpha = 1/2$ pour le modèle d'accrochage. Dans ce cas il est donc naturel de s'attendre à $\beta_c(3) > \beta_c^{\text{ann}}(3) > 0$. En effet, dans un papier écrit avec mon étudiant Quentin Berger [9], nous avons montré (voir [9] pour l'énoncé précis) :

Théorème 6.2.1. Supposons que X et Y soient deux marches aléatoires apériodiques symétriques sur \mathbb{Z}^3 , et que la loi des incréments $(X_i - X_{i-1})$ ait une queue sub-gaussienne et une matrice de covariance 3×3 non singulière (même hypothèse pour la loi des incréments de Y). Alors,

$$\beta_c(3) > \beta_c^{\operatorname{ann}}(3) > 0.$$

Une difficulté supplémentaire du modèle RWPM par rapport au modèle d'accrochage est que le désordre n'entre pas dans la définition du Hamiltonien comme une somme de termes indépendants. Il suffit de comparer le Hamiltonien du modèle d'accrochage, $\sum_{n\leq N}(\beta\omega_n+h)\mathbf{1}_{n\in\tau}$, avec celui du RWPM, $\sum_{n\leq N}\mathbf{1}_{\{X_n=Y_n\}}$: les variables ω_n sont i.i.d., ce qui n'est pas le cas pour les variables Y_n (ce sont les incréments $Y_n - Y_{n-1}$ qui sont i.i.d.).

^{2.} Pour $d \ge 5$, ce résultat a été montré aussi par M. Birkner, A. Greven et F. den Hollander, avec une méthode très différente, dans une version préliminaire de l'article [12].

LISTE DES PUBLICATIONS

Prépublications :

- 1. Q. Berger, F. L. Toninelli, *The random walk pinning model in dimension 3*, in preparation.
- G. Giacomin, H. Lacoin, F. L. Toninelli, Disorder relevance at marginality and critical point shift, arXiv :0906.1942, soumis à Ann. Institut Henri Poincaré
- 3. P. Caputo, F. Martinelli, F.L. Toninelli, *Convergence to equilibrium of biased plane partitions*, arXiv :0903.5079, soumis à Random Structures and Algorithms.

Articles publiés dans des revues avec comité de lecture :

2009

- 1. F. Martinelli, F.L. Toninelli, On the mixing time of the 2D stochastic Ising model with "plus" boundary conditions at low temperature, arXiv :0905.3040, à paraître sur Commun. Math. Phys.
- G. Giacomin, H. Lacoin, F.L. Toninelli, Marginal relevance of disorder for pinning models, Commun. Pure Appl. Math. 63 (2010), 233–265.
- 3. G. Giacomin, H. Lacoin, F.L. Toninelli, *Hierarchical pinning models, quadratic maps and quenched disorder*, Probab. Theory Rel. Fields **147** (2010), 185–216.
- G. Giacomin, F.L. Toninelli, On the irrelevant disorder regime of pinning models, Ann. Probab. 37 (2009), 1841–1875.
- B. Derrida, G. Giacomin, H. Lacoin, F.L. Toninelli, Fractional moment bounds and disorder relevance for pinning models, Commun. Math. Phys. 287 (2009), 867–887.
- F.L. Toninelli, Coarse graining, fractional moments and the critical slope of random copolymers, Electron. Journal Probab. 14 (2009), 531–547.

- T. Bodineau, G. Giacomin, H. Lacoin, F.L. Toninelli, Copolymers at selective interfaces : new bounds on the phase diagram, J. Statist. Phys. 132 (2008), 603–626.
- F.L. Toninelli, Disordered pinning models and copolymers : beyond annealed bounds, Ann. Appl. Probab. 18 (2008), 1569–1587.
- F.L. Toninelli, A replica-coupling approach to disordered pinning models, Commun. Math. Phys. 280 (2008), 389–401.

 P. Caputo, F. Martinelli, F.L. Toninelli, On the approach to equilibrium for a polymer with adsorption and repulsion, Electr. J. Probab. 13 (2008), 213–258.

2007

- 11. F.L. Toninelli, Correlation lengths for random polymer models and for some renewal sequences, Electron. J. Probab. **12** (2007), 613–636.
- G. Giacomin, F.L. Toninelli, Force-induced depinning of directed polymers, J. Phys. A : Math. Theor. 40 (2007), 5261–5275.
- F.L. Toninelli, Critical properties and finite-size estimates for the depinning transition of directed random polymers, J. Stat. Phys. 126 (2007), 1025–1044.

2006

- 14. G. Giacomin, F.L. Toninelli, Smoothing of Depinning Transitions for Directed Polymers with Quenched Disorder, Phys. Rev. Lett **96** (2006), 070602.
- 15. G. Giacomin, F.L. Toninelli, *The localized phase of disordered copolymers with adsorption*, ALEA 1 (2006), 149–180.
- 16. G. Giacomin, F.L. Toninelli, Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions, Commun. Math. Phys. **266** (2006), 1–16.

2005

- G. Giacomin, F.L. Toninelli, Estimates on path delocalization for copolymers at selective interfaces, Probab.Theory Rel. Fields 133 (2005), 464–482.
- F. Comets, F. Guerra, F.L. Toninelli, The Ising-Sherrington-Kirpatrick model in a magnetic field at high temperature, J. Stat. Phys. 120 (2005), 147–165.
- 19. S. Franz, F.L. Toninelli, A field-theoretical approach to the spin glass transition : models with long but finite interaction range, J. Stat. Mech. P01008 (2005).

2004

- 20. F. Guerra, F.L. Toninelli, The high temperature region of the Viana-Bray diluted spin glass model, J. Stat. Phys. **115** (2004), 531–555.
- S. Franz, F.L. Toninelli, Finite-range spin glasses in the Kac limit : free energy and local observables, J. Phys. A 37 (2004), 7433–7446.
- S. Franz, F.L. Toninelli, The Kac limit for finite-range spin glasses, Phys. Rev. Lett. 92 (2004), 030602.

- S. Franz, M. Leone, F.L. Toninelli, Replica bounds for diluted non-Poissonian spin systems, J. Phys. A 36 (2003), 10967–10985.
- F. Guerra, F.L. Toninelli, The infinite volume limit in generalized mean field disordered models, Markov Proc. Rel. Fields 9 (2003), 195–207.

25. F. Guerra, F.L. Toninelli, Some comments on the connection between disordered long range spin glass models and their mean field version, J. Phys. A 36 (2003), 10987–10995.

 $\boldsymbol{2002}$

- 26. F.L. Toninelli, About the Almeida-Thouless transition line in the Sherrington-Kirkpatrick mean-field spin glass model, Europhys. Lett. **60** (2002), 764–767.
- F. Guerra, F. L. Toninelli, The Thermodynamic Limit in Mean Field Spin Glass Models, Commun. Math. Phys. 230 (2002), 71–79.
- F. Guerra, F. L. Toninelli, Central limit theorem for fluctuations in the high temperature region of the Sherrington-Kirkpatrick spin glass model, J. Math. Phys. 43 (2002), 6224–6237.
- 29. F. Guerra, F.L. Toninelli, Quadratic replica coupling for the Sherrington-Kirkpatrick mean field spin glass model, J. Math. Phys. 43 (2002), 3704–3716.

Proceedings :

- 1. H. Lacoin, F.L. Toninelli, A smoothing inequality for hierarchical pinning models, Progress in Probability **62** (2009), 271–278.
- F.L. Toninelli, Localization transition in disordered pinning models. Effect of randomness on the critical properties, in Methods of Contemporary Mathematical Staitistical Physics, Lecture Notes in Mathematics 1970 (2009), 129–176.
- S. Franz, F.L. Toninelli, The Kac limit for diluted spin glasses, Int. Jou. Mod. Phys. B 18 (2004), 675–679.
- 4. F. Guerra, F.L. Toninelli, Infinite Volume Limit and Spontaneous Replica Symmetry Breaking in Mean Field Spin Glass Models, Ann. Henri Poincaré 4 (2003), 417–420.
- F. Cametti, G. Jona-Lasinio, C. Presilla, F.L. Toninelli, Comparison between quantum and classical dynamics in the effective action formalism, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXLIII, edited by G. Casati, I. Guarneri, U. Smilansky (IOS Press, Amsterdam 2000), p. 431-448.

Bibliographie

- [1] M. Aizenman, S. Molchanov, Localization at large disorder and at extreme energies : An elementary derivation, Comm. Math. Phys. **157** (1993), 245–iso-latin-1-unix278.
- [2] M. Aizenman and J. Wehr, Rounding effects of quenched randomness on first-order phase transitions, Comm. Math. Phys. 130 (1990), 489–528.
- [3] S. Albeverio, X. Y. Zhou, Free energy and some sample path properties of a random walk with random potential, J. Statist. Phys. 83 (1996), 573–662.
- [4] K. S. Alexander, private communication.
- [5] K. S. Alexander, The effect of disorder on polymer depinning transitions, Commun. Math. Phys. 279 (2008), 117-146.
- [6] K. S. Alexander, N. Zygouras, Quenched and annealed critical points in polymer pinning models, Comm. Math. Phys. 291 (2009), 659–689.
- [7] K. S. Alexander, N. Zygouras, Equality of critical points for polymer depinning transitions with loop exponent one, à paraître sur Ann. Appl. Probab. arXiv :0811.1902 [math.PR]
- [8] S. Asmussen, Applied Probability and Queues, Second edition. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [9] Q. Berger, F. L. Toninelli, On the critical point of the Random Walk Pinning Model in dimension d = 3, arXiv :0911.1661
- [10] S. M. Bhattacharjee, S. Mukherji, Directed polymers with random interaction : Marginal relevance and novel criticality, Phys. Rev. Lett. 70 (1993), 49-52.
- [11] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [12] M. Birkner, A. Greven, F. den Hollander, Quenched large deviation principle for words in a letter sequence, Probab. Theory Related Fields, to appear, arXiv :0807.2611.
- [13] M. Birkner, R. Sun, Annealed vs Quenched Critical Points for a Random Walk Pinning Model, à paraître sur Ann. Institut Henri Poincaré, arXiv :0807.2752
- [14] A. N. Berker and S. Ostlund, Renormalisation-group calculations of finite systems : order parameter and specific heat for epitaxial ordering, J. Phys. C : Solid State Phys. 12 (1979), 4861-4975.
- [15] M. Biskup, F. den Hollander, A heteropolymer near a linear interface, Ann. Appl. Probab. 9 (1999), 668–687.

- [16] P. M. Bleher, The renormalization group on hierarchical lattices, Stochastic methods in mathematics and physics (Karpacz, 1988), 171-201, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [17] T. Bodineau, G. Giacomin, On the Localization Transition of Random Copolymers Near Selective Interfaces, J. Statist. Phys. 117 (2004), 801–818.
- [18] T. Bodineau, G. Giacomin, H. Lacoin, F. L. Toninelli, Copolymers at selective interfaces : new bounds on the phase diagram, J. Statist. Phys. 132 (2008), 603–626.
- [19] E. Bolthausen, A note on diffusion of directed polymers in a random environment, Comm. Math. Phys. 123 (1989), 529–534.
- [20] E. Bolthausen, F. Caravenna, B. de Tilière, The quenched critical point of a diluted disordered polymer model, Stoch. Proc. Appl. 119 (2009), 1479–1504.
- [21] E. Bolthausen, F. den Hollander, Localization transition for a polymer near an interface, Ann. Probab. 25 (1997), 1334–1366.
- [22] E. Buffet, A. Patrick, J. V. Pulé, Directed polymers on trees : a martingale approach, J. Phys. A 26 (1993), 1823-1834.
- [23] P. Caputo, F. Martinelli, F.L. Toninelli, On the approach to equilibrium for a polymer with adsorption and repulsion, Electr. J. Probab. 13 (2008), 213–258.
- [24] F. Caravenna, G. Giacomin, On constrained annealed bounds for pinning and wetting models, Elect. Comm. Probab. 10 (2005), 179–189.
- [25] F. Caravenna, G. Giacomin, The weak coupling limit of disordered copolymer models, arXiv :0907.5076.
- [26] F. Caravenna, G. Giacomin, M. Gubinelli, A numerical approach to copolymers at selective interfaces, J. Statist. Phys. 122 (2006), 799–832.
- [27] J. T. Chayes, L. Chayes, D. S. Fisher, T. Spencer, Finite-Size Scaling and Correlation Lengths for Disordered Systems, Phys. Rev. Lett. 57 (1986), 2999–3002; Correlation length bounds for disordered Ising ferromagnets, Comm. Math. Phys. 120 (1989), 501–523.
- [28] K. L. Chung, P. Erdös, Probability limit theorems assuming only the first moment I, in Mem. Am. Math. Soc. 6 (1951), paper 3, 1-19.
- [29] P. Collet, J.-P. Eckmann, V. Glaser and A. Martin, A spin glass with random couplings, J. Statist. Phys. 36 (1984), 89-106.
- [30] P. Collet, J.-P. Eckmann, V. Glaser and A. Martin, Study of the iterations of a mapping associated to a spin glass model, Commun. Math. Phys 94 (1984), 353-370.
- [31] B. Coluzzi, E. Yeramian, Numerical evidence for relevance of disorder in a Poland-Scheraga DNA denaturation model with self-avoidance : scaling behavior of average quantities, Eur. Phys. Journal B - Condensed Matter and Complex Systems 56 (2007), 349-365.
- [32] F. Comets, V. Vargas, Majorizing multiplicative cascades for directed polymers in random media, ALEA 2 (2006), 1746–1770.
- [33] F. Comets, N. Yoshida, Directed polymers in random environment are diffusive at weak disorder, Ann. Probab. 34 (2006), 1746-1770.

- [34] B. Derrida, E. Gardner, Renormalization group study of a disordered model, J. Phys. A : Math. Gen. 17 (1984), 3223-3236.
- [35] B. Derrida, G. Giacomin, H. Lacoin, F. L. Toninelli, Fractional moment bounds and disorder relevance for pinning models, Commun. Math. Phys. 287 (2009), 867–887.
- B. Derrida, V. Hakim, J. Vannimenus, Effect of disorder on two-dimensional wetting, J. Statist. Phys. 66 (1992), 1189-1213.
- [37] R. A. Doney, One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean, Probab. Theory Rel. Fields 107 (1997), 451-465.
- [38] V. S. Dotsenko, V. S. Dotsenko, Critical behaviour of the phase transition in the 2D Ising Model with impurities, Adv. Phys. 32 (1983), 129–172.
- [39] M. R. Evans, B. Derrida, Improved bounds for the transition temperature of directed polymers in a finite-dimensional random medium, J. Statist. Phys. 69 (1992), 427– 437.
- [40] M. E. Fisher, Walks, walls, wetting, and melting, J. Statist. Phys. **34** (1984), 667-729.
- [41] G. Forgacs, R. Lipowsky, Th. M. Nieuwenhuizen, The behavior of interfaces in ordered and disordered systems, in Phase Transitions and Critical Phenomena 14, Academic Press, London (1991), 135-363.
- [42] G. Forgacs, J. M. Luck, Th. M. Nieuwenhuizen, H. Orland, Wetting of a disordered substrate : exact critical behavior in two dimensions, Phys. Rev. Lett. 57 (1986), 2184-2187.
- [43] D. M. Gangardt, S. K. Nechaev, Wetting transition on a one-dimensional disorder, J. Statist. Phys. 130 (2008), 483-502.
- [44] T. Garel, D. A. Huse, S. Leibler, H. Orland, Localization transition of random chains and interfaces, Europhys. Lett. 8 (1989), 9–13.
- [45] T. Garel, C. Monthus, Numerical study of the disordered Poland2013Scheraga model of DNA denaturation, J. Stat. Mech., Theory and Experiments (2005), P06004.
- [46] G. Giacomin, Renewal convergence rates and correlation decay for homogeneous pinning models, Elect. J. Probab. 13 (2008), 513–529.
- [47] G. Giacomin, Random Polymer Models, Imperial College Press, World Scientific (2007).
- [48] G. Giacomin, H. Lacoin, F. L. Toninelli, Hierarchical pinning models, quadratic maps and quenched disorder, Probab. Theory Rel. Fields 147 (2010), 185–216.
- [49] G. Giacomin, H. Lacoin, F. L. Toninelli, Marginal relevance of disorder for pinning models, Commun. Pure Appl. Math. 63 (2010), 233-265.
- [50] G. Giacomin, H. Lacoin, F.L. Toninelli, Disorder relevance at marginality and critical point shift, arXiv :0906.1942v1, soumis à Ann. Inst. Henri Poincaré Prob. Stat.
- [51] G. Giacomin, F.L. Toninelli, Estimates on path delocalization for copolymers at selective interfaces, Probab.Theory Rel. Fields 133 (2005), 464–482.
- [52] G. Giacomin, F.L. Toninelli, The localized phase of disordered copolymers with adsorption, ALEA 1 (2006), 149–180.
- [53] G. Giacomin, F. L. Toninelli, Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions, Commun. Math. Phys. 266 (2006), 1-16.

- [54] G. Giacomin, F. L. Toninelli, Smoothing of Depinning Transitions for Directed Polymers with Quenched Disorder, Phys. Rev. Lett 96 (2006), 070602.
- [55] G. Giacomin, F. L. Toninelli, On the irrelevant disorder regime of pinning models, Ann. Probab. 37 (2009), 1841–1875.
- [56] A. Y. Grosberg, E. I. Shakhnovich, An investigation of the configurational statistics of a polymer chain in an external field by the dynamical renormalization group method, Sov. Phys.-JETP 64 (1986), 493-501; Theory of phase transitions of the coil-globule type in a heteropolymer chain with disordered sequence of links, Sov. Phys.-JETP, 64 (1986), 1284-1290.
- [57] F. Guerra, Sum rules for the free energy in the mean field spin glass model, Fields Institute Communications **30** (2001), 161–170.
- [58] F. Guerra, F. L. Toninelli, Quadratic replica coupling for the Sherrington-Kirkpatrick mean field spin glass model, J. Math. Phys. 43 (2002), 3704–3716.
- [59] A. B. Harris, Effect of Random Defects on the Critical Behaviour of Ising Models, J. Phys. C 7 (1974), 1671-1692.
- [60] Harris, T. E. *The theory of branching processes*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1963.
- [61] D. A. Huse, C. L. Henley, Pinning and roughening of domain wall in Ising systems due to random impurities, Phys. Rev. Lett. 54 (1985), 2708–2711.
- [62] J. Z. Imbrie, T. Spencer, Diffusion of directed polymers in a random environment, J. Statist. Phys. 52 (1988), 609–626.
- [63] Y. Imry and S.-K. Ma, Random-Field Instability of the Ordered State of Continuous Symmetry, Phys. Rev. Lett. 35 (1975), 1399–1401.
- [64] N. C. Jain, W. E. Pruitt, The Range of the Random Walk, dans Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/2971), Vol. III : Probability theory, pp. 31–50. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.
- [65] Y. Kafri, D. Mukamel, L. Peliti, Why is the DNA denaturation transition first order?, Phys. Rev. Lett. 85 (2000), 4988–4991.
- [66] H. Lacoin, New bounds for the free energy of directed polymers in dimension 1 + 1and 1 + 2, à paraître sur Comm. Math. Phys., arXiv :0901.0699.
- [67] H. Lacoin, F. L. Toninelli, A smoothing inequality for hierarchical pinning models, Progress in Probability 62 (2009), 271-278.
- [68] M. Ledoux, Measure concentration, transportation cost, and functional inequalities, Summer School on Singular Phenomena and Scaling in Mathematical Models, Bonn, 10–13 June 2003.
- [69] D. A. Levin, Y. Peres, E. L. Wilmer, Markov Chains and Mixing Times, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [70] L. Miclo, An example of application of discrete Hardy's inequalities, Markov Proc. Rel. Fields 5 (1999), 319–330.
- [71] T. Morita, Statistical mechanics of quenched solid solutions with application to magnetically dilute alloys, J. Math. Phys. 5 (1966), 1401–1405.

- [72] D. R. Nelson, V. M. Vinokur, Boson localization and correlated pinning of superconducting vortex arrays, Phys. Rev. B 48 (1993), 13060–13097.
- [73] C. Richard, A. J. Guttmann, Poland-Scheraga models and the DNA denaturation transition, J. Statist. Phys. 114 (2004), 943–965.
- [74] R. Shankar, Exact critical behavior of a random bond two-dimensional Ising model, Phys. Rev. Lett. 58 (1987), 2466–2469.
- [75] S. Stepanow, A. L. Chudnovskiy, The Green's function approach to adsorption of a random heteropolymer onto surfaces, J. Phys. A : Math. Gen. 35 (2002), 4229-4238.
- [76] F. L. Toninelli, A replica-coupling approach to disordered pinning models, Commun. Math. Phys. 280 (2008), 389-401.
- [77] F. L. Toninelli, Disordered pinning models and copolymers : beyond annealed bounds, Ann. Appl. Probab. 18 (2008), 1569-1587.
- [78] F. L. Toninelli, Coarse graining, fractional moments and the critical slope of random copolymers, Electron. Journal Probab. 14 (2009), 531–547.
- [79] F.L. Toninelli, Critical properties and finite-size estimates for the depinning transition of directed random polymers, J. Stat. Phys. 126 (2007), 1025–1044.
- [80] F.L. Toninelli, Correlation lengths for random polymer models and for some renewal sequences, Electron. J. Probab. 12 (2007), 613–636.
- [81] S. G. Whittington, Randomly coloured self-avoiding walks : adsorption and localization, Markov Proc. Rel. Fields 13 (2007), 761-776.
- [82] D. B. Wilson, Mixing times of Lozenge tiling and card shuffling Markov chains, Ann. Appl. Probab. 14 (2004), 274–325.

Probab. Theory Relat. Fields 133, 464–482 (2005) Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s00440-005-0439-2

Giambattista Giacomin · Fabio Lucio Toninelli

Estimates on path delocalization for copolymers at selective interfaces

Received: 3 August 2004 / Revised version: 12 January 2005 / Published online: 3 May 2005 – © Springer-Verlag 2005

Abstract. Starting from the simple symmetric random walk $\{S_n\}_n$, we introduce a new process whose path measure is weighted by a factor $\exp\left(\lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h) \operatorname{sign}(S_n)\right)$, with $\lambda, h \ge 0, \{\omega_n\}_n$ a typical realization of an IID process and N a positive integer. We are looking for results in the large N limit. This factor favors $S_n > 0$ if $\omega_n + h > 0$ and $S_n < 0$ if $\omega_n + h < 0$. The process can be interpreted as a model for a random heterogeneous polymer in the proximity of an interface separating two selective solvents. It has been shown [6] that this model undergoes a (de)localization transition: more precisely there exists a continuous increasing function $\lambda \mapsto h_c(\lambda)$ such that if $h < h_c(\lambda)$ then the model is localized while it is delocalized if $h \ge h_c(\lambda)$. However, localization and delocalization were not given in terms of path properties, but in a free energy sense. Later on it has been shown [3]. On the other hand, only weak results on the delocalized regime have been known so far.

We present a method, based on concentration bounds on *suitably restricted* partition functions, that yields much stronger results on the path behavior in the interior of the delocalized region, that is for $h > h_c(\lambda)$. In particular we prove that, in a suitable sense, one cannot expect more than $O(\log N)$ visits of the walk to the lower half plane. The previously known bound was o(N). Stronger O(1)-type results are obtained deep inside the delocalized region.

The same approach is also helpful for a different type of question: we prove in fact that the limit as λ tends to zero of $h_c(\lambda)/\lambda$ exists and it is independent of the law of ω_1 , at least when the random variable ω_1 is bounded or it is Gaussian. This is achieved by interpolating between this class of variables and the particular case of ω_1 taking values ±1 with probability 1/2, treated in [6].

F.L. Toninelli: Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich, Switzerland

Present address: Laboratoire de Physique, UMR-CNRS 5672, ENS Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France. e-mail: fltonine@ens-lyon.fr

Mathematics Subject Classification (2000): 60K35, 82B41, 82B44

Key words or phrases: Copolymers – Directed Polymers – Delocalization Transition – Concentration inequalities – Interpolation techniques

G. Giacomin: Laboratoire de Probabilités de P 6 & 7 (CNRS U.M.R. 7599) and Université Paris 7 – Denis Diderot, U.F.R. Mathematiques, Case 7012, 2 place Jussieu 75251 Paris cedex 05, France. e-mail: giacomin@math.jussieu.fr

Home page: http://felix.proba.jussieu.fr/pageperso/giacomin/
GBpage.html

1. Introduction

1.1. The model and its free energy

Let $S = \{S_n\}_{n=0,1,...}$ be a simple random walk: $S_0 = 0$ and $\{S_j - S_{j-1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ a sequence of IID random variables with $\mathbf{P}(S_1 = \pm 1) = 1/2$. We denote by Ω the set of all random walk trajectories. For $\lambda \ge 0$, $h \ge 0$, $N \in 2\mathbb{N}$ and $\omega = \{\omega_n\}_{n=1,2,...} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ we introduce the *copolymer* measures

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}^{a}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) = \frac{1}{\widetilde{Z}_{N,\omega}^{a}} \exp\left(\lambda \sum_{n=1}^{N} \left(\omega_{n} + h\right) \operatorname{sign}\left(S_{n}\right)\right) \mathbf{1}_{\Omega_{N}^{a}},\tag{1.1}$$

with a = f (free case) or a = c (constrained case), $\Omega_N^f = \Omega$, $\Omega_N^c = \{S \in \Omega : S_N = 0\}$. $\widetilde{Z}_{N,\omega}^a$ is the partition function and sign (S_{2n}) is set to be equal to sign (S_{2n-1}) for any *n* such that $S_{2n} = 0$.

The sequence ω is chosen as a typical realization of an IID sequence of random variables, still denoted by $\omega = {\omega_n}_n$. We call \mathbb{P} the law of ω . Further hypotheses on ω are summed up by:

Definition 1.1.

- **Basic assumptions**: $\omega_1 \sim -\omega_1$ and $M(t) := \mathbb{E}\left[\exp(t\omega_1)\right] < \infty$ for t in a neighborhood of zero. Without loss of generality we assume $\mathbb{E}\left[\omega_1^2\right] = 1$.
- Deviation inequality above the mean: there exists a positive constant C such that for every N, for every Lipschitz and convex function $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ with $g(\omega) := g(\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{P})$ and $t \ge 0$

$$\mathbb{P}\left(g(\omega) - \mathbb{E}\left[g(\omega)\right] \ge t\right) \le C \exp\left(-\frac{t^2}{C \|g\|_{\text{Lip}}^2}\right),\tag{1.2}$$

where $||g||_{Lip}$ is the Lipschitz constant of g with respect to the Euclidean distance.

The deviation inequality (1.2) is known to hold with a certain generality: its validity for the Gaussian case $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ and for the case of bounded random variables is by now a classical result, see [19], [15] and [21]. However one can go beyond: it holds in particular whenever the law of ω_1 satisfies the log–Sobolev inequality [15] and in that case of course *C* depends on the log–Sobolev constant. As a matter of fact, in all the cases we have mentioned not only a deviation inequality above the mean holds, but also below, and therefore one has the full concentration inequality. A necessary and sufficient condition for the log–Sobolev inequality to hold can be found in [4]. In order to be more explicit we point out that if ω_1 has a density of the type $\exp(-V)$, with *V* bounded from below and strictly convex outside a finite interval, the law of ω_1 satisfies the log–Sobolev inequality with a finite constant and therefore (1.2) holds.

Under the basic assumptions on ω the *quenched free energy* of the system exists, namely the limit

$$f(\lambda, h) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \widetilde{Z}^a_{N,\omega}, \qquad (1.3)$$

exists in the $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost sure sense and in the $\mathbb{L}^1(\mathbb{P})$ sense. This existence result can be proven via super-additivity arguments (we refer to [12] for the details) and the method shows also that $f(\lambda, h)$ is non-random and independent of the choice of *a*.

We observe that

$$f(\lambda, h) \ge \lambda h. \tag{1.4}$$

The proof of such a result is elementary: if we set $\Omega_N^+ = \{S \in \Omega : S_n > 0 \text{ for } n = 1, 2, ..., N\}$ we have

$$\frac{1}{N}\log\widetilde{Z}_{N,\omega}^{\mathbf{f}} \geq \frac{1}{N}\log\mathbf{E}\left[\exp\left(\lambda\sum_{n=1}^{N}\left(\omega_{n}+h\right)\operatorname{sign}\left(S_{n}\right)\right);\Omega_{N}^{+}\right]$$
$$=\frac{\lambda}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\omega_{n}+h\right)+\frac{1}{N}\log\mathbf{P}\left(\Omega_{N}^{+}\right)\xrightarrow{N\to\infty}\lambda h,\qquad(1.5)$$

where the limit is taken in the almost sure sense: we have applied the strong law of large numbers and the well known fact that $\mathbf{P}(\Omega_N^+)$ behaves like $N^{-1/2}$ for N large [10, Ch. 3]. The observation (1.4), above all if viewed in the light of its proof, suggests the following partition of the parameter space (or *phase diagram*):

- The localized region: $\mathcal{L} = \{(\lambda, h) : f(\lambda, h) > \lambda h\};$
- The delocalized region: $\mathcal{D} = \{(\lambda, h) : f(\lambda, h) = \lambda h\}.$

We sum up the known results on the phase diagram:

Theorem 1.2. Under the basic assumptions on ω there exists an increasing function $h_c : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ such that

$$\mathcal{L} = \{ (\lambda, h) : h < h_c(\lambda) \} \quad and \quad \mathcal{D} = \{ (\lambda, h) : h \ge h_c(\lambda) \}.$$
(1.6)

 $h_c(\cdot)$ is continuous if it takes values in $[0, \infty)$, otherwise it is continuous in $[0, \sup\{\lambda : h_c(\lambda) < \infty\}$). Moreover

$$\underline{h}(\lambda) := \frac{1}{4\lambda/3} \log M (4\lambda/3) \le h_c(\lambda) \le \frac{1}{2\lambda} \log M (2\lambda) =: \overline{h}(\lambda).$$
(1.7)

Part of the results in Theorem 1.2 have been proven in [6]. The present version takes into account the improvements brought by [5]. For the rest of the paper we will refer to $\{(\lambda, h) : h > \overline{h}(\lambda)\} \subset \mathcal{D}$ as strongly delocalized region.

The bounds in (1.7) yield that $2/3 \leq \liminf_{\lambda \searrow 0} h_c(\lambda)/\lambda$ and $\limsup_{\lambda \searrow 0} h_c(\lambda)/\lambda \leq 1$. In [6] it has been shown that the limit of $h_c(\lambda)/\lambda$ exists in the particular case of ω_1 taking values ± 1 and it can be expressed in terms of a suitable Brownian copolymer, suggesting thus a universality of this result. The techniques we develop allow to interpolate between the ± 1 case and more general cases, namely:

Theorem 1.3. The slope of the critical curve at the origin,

$$m_c := \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{h_c(\lambda)}{\lambda}, \tag{1.8}$$

exists and does not depend on the law of ω_1 , provided that ω_1 is either a bounded symmetric variable of unit variance or a standard Gaussian variable.

Theorem 1.3 is proven in Section 3. It is in the line of the interpolation results [13] and [7], but here one needs to have a more explicit control of the λ dependence of the error made in the interpolation procedure. It turns out that the approach that we propose here for path estimates yields also this control. It would be interesting to investigate whether a suitable refinement of the strategy we propose or an extension of the approach in [6], or possibly a combination of both, would allow to obtain a better result, removing the rather unnatural boundedness requirement on the random variables, which arises from our application of the interpolation method.

1.2. From free energy to path behavior

The polymer measures $\mathbf{P}_{N,\omega}^a$ have been introduced in [18] and [6] motivated by earlier theoretical physics works, in particular by [11] (for updated physics developments see [16] and references therein). It is a model for an heterogeneous polymer, constituted by charged units (*monomers*). The polymer lives in a solvent which is also heterogeneous: it is made of two solvents in a state in which a flat interface is present (an example familiar to everybody is the case of an oil/water interface). The sign of the charge determines the preference of a monomer for one solvent or the other and the absolute value of the charge plays a role in the intensity of such a preference. Moreover, in general the situation may be asymmetric: there may be more charges of a certain sign or the intensity of the solvent–monomer interaction may not be invariant under the change of sign of the charge (we are modeling this second situation and *h* is the asymmetry parameter). What we want to analyze is which of the two following scenarios prevails:

- (1) The polymer places *most of* the monomers in their preferred solvent (in the model the n^{th} -monomer is preferably above the *x*-axis, that plays the role of the interface, if $\omega_n + h > 0$, and below if $\omega_n + h < 0$). This forces of course the polymer to stick close to the interface and this is the intuitive concept of a localized polymer path.
- (2) The polymer lies almost fully in one of the two solvents. Intuitively that may happen in an asymmetric case. In such a situation one expects the polymer to wander away from the interface, since it would be undergoing a repulsion effect of *entropic origin*: the trajectories staying close to the interface are very few with respect to the trajectories exploring freely a half–space. This is for us a delocalized behavior.

In principle there is a third reasonable scenario: the case in which the polymer has large fluctuations between the two solvents. It turns out that, at least if we disregard the critical case $h = h_c(\lambda)$, this situation is possible only in the trivial $\lambda = 0$

case. Moreover scenario (1) is effectively observed if $(\lambda, h) \in \mathcal{L}$ and scenario (2) is verified at least in the interior of \mathcal{D} . But let us be more precise and let us sum up the state of the art on this issue:

- If (λ, h) ∈ L then very strong localization results are available. The keyword in this case is *tightness* and one should really think of a path essentially as being at distance O(1) from the interface. The precise statements are rather involved, due to the presence of atypical finite stretches in any typical ω, and we prefer to refer to [18], [1] and [3].
- (2) The results in the delocalized regime are much more meager. All the same the following result is available [3]: if $(\lambda, h) \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ then for every *L*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}_{N,\omega}^{a} \left(S_{n} > L \right) = 1, \quad \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - \mathrm{a.s.}.$$
(1.9)

While the delocalization result (1.9) is in sharp contrast with the localized scenario (1), it is far from matching the very strong delocalization results available in polymer models without disorder (for example in the well known (1 + 1)-dimensional wetting models, see, e.g., [12], [14] and [9]): loosely stated one expects that a typical delocalized path in the limit of $N \to \infty$ has only a finite number of visits to the lower half-plane and, as a consequence, a Brownian scaling result should hold with convergence to well known processes like the Brownian meander or the Bessel(3) bridge according to whether a = f or a = c (see Section 4 for more precision on this issue). These are reasonable conjectures, supported also by the fact that in the localized regime the results in the disordered model match what one observes in the non-disordered case. One should however stress the essential difference between the localized and delocalized regions: in the first case one is in a large deviation regime – $\mathbf{P}_{N,\omega}^a$ charges a set of trajectories which has exponentially small probability with respect to \mathbf{P} – while this is not the case in the delocalized regime. The large deviation machinery does not seem to go beyond results of the type (1.9).

The purpose of this paper is to present an approach, based on concentration inequalities, that yields results that go well beyond the *density* result (1.9).

In order to state our main theorem we need some notation: we set $\Delta_n = (1 - \text{sign}(S_n))/2$ and introduce the random variable $\mathcal{N} = \sum_{n=1}^{N} \Delta_n$, counting how many monomers are in the lower half-plane (unfavorable solvent). We introduce also the random set $\mathcal{A} := \{n \leq N : \Delta_n = 1\} \cup \{0\}$ and note that the (even) number max \mathcal{A} identifies the point of last exit of *S* from the lower half-plane.

Theorem 1.4. Under the basic assumptions on ω we have that

(1) if $h > \overline{h}(\lambda)$ there exists c such that

Æ

$$\mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathbf{f}}\left(\max \mathcal{A} \le \ell\right) \ge 1 - c/\sqrt{\ell+1},\tag{1.10}$$

for every N and every non-negative integer $\ell \leq N$. Analogously,

$$\mathbb{E} \mathbf{P}_{N,\omega}^{c} \left(\max\{\mathcal{A} \cap [0, N/2] \} \le \ell_1 \text{ or } \min\{\mathcal{A} \cap [N/2, N] \} \ge N - \ell_2 \right)$$

$$\ge 1 - \frac{c}{\sqrt{\ell_1 \ell_2 + 1}}, \tag{1.11}$$

for every N, every $\ell_1 \leq N/2$ and $\ell_2 \leq N/2$, with the convention that $\min(\emptyset) = N$. Moreover

$$\mathbb{E} \mathbf{P}^{a}_{N,\omega} \left(\mathcal{N} \ge m \right) \le \frac{1}{c} \exp\left(-cm\right), \qquad (1.12)$$

both for a = f and a = c, for every N and every $m \in \mathbb{N}$.

(2) If the deviation inequality holds then for $h > h_c(\lambda)$ there exist two positive constants *c* and *q* such that

$$\mathbb{E} \mathbf{P}^{a}_{N \ \omega} \left(\mathcal{N} \ge m \right) \le \exp\left(-cm\right), \tag{1.13}$$

both for a = f and a = c, for every N and every $m \ge q \log N$.

We refer to Section 4 for a thorough discussion on how these results relate to what is expected to happen, with a particular attention to scaling limits and almost sure results. In the same section one finds also some further considerations on the delocalized path behavior.

Remark 1.5. The methods of proof of Theorem 1.4 are applicable in more general contexts. We mention in particular the case of disordered pinning or wetting. Consider in particular the case of a model defined like in (1.1), but with sign(S_n) replaced by $\mathbf{1}_{\{0\}}(S_n)$. In spite of the formal resemblance, this is a profoundly different model and, in order to deal with interesting phenomena, one has to allow h to take negative values too. In [2] it is proven that the free energy of the model exists and it is non negative and, exactly in analogy with $f(\lambda, h) - \lambda h$ in our setting, one defines the localization and delocalization regimes depending on whether the free energy is positive or zero. Moreover for any $\lambda > 0$ the transition takes place at a critical value h_c of the parameter h and $h_c \in [h_c^a, 0)$, where $h_c^a < 0$ is the critical value for the corresponding annealed model, a homopolymer model that can be solved exactly. It is expected, but not proven, that $h_c > h_c^a$ (see references in [2]). Theorem 1.4 holds for this disordered pinning model provided one changes the definition of \mathcal{N} to $\mathcal{N} := \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{0\}}(S_n)$.

2. Proof of Theorem 1.4

It is convenient to consider a modified partition function. To this purpose we observe that we may write

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}^{a}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\left(S\right) = \frac{1}{Z_{N,\omega}^{a}} \exp\left(-2\lambda \sum_{n=1}^{N} \left(\omega_{n} + h\right) \Delta_{n}\right) \mathbf{1}_{\Omega_{N}^{a}}\left(S\right), \qquad (2.1)$$

where $Z_{N,\omega}^a = Z_{N,\omega}(\Omega_N^a)$, with the notation

$$Z_{N,\omega}\left(\widetilde{\Omega}\right) = \mathbf{E}\left[\exp\left(-2\lambda\sum_{n=1}^{N}\left(\omega_{n}+h\right)\Delta_{n}\right); \,\widetilde{\Omega}\right],\tag{2.2}$$

for $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$. Likewise we introduce $F_{N,\omega}(\widetilde{\Omega}) := (1/N) \log Z_{N,\omega}(\widetilde{\Omega})$ and $F^a_{N,\omega} := F_{N,\omega}(\Omega^a_N)$. Notice that $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. we have that $Z^a_{N,\omega} \approx \widetilde{Z}^a_{N,\omega} \exp(-\lambda hN)$, where \simeq denotes the Laplace asymptotic equivalence, which means that the $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. limit of $F^a_{N,\omega}$ equals $f(\lambda, h) - \lambda h =: F(\lambda, h)$.

2.1. The concentration lemma

For $m \in \{0, 2, ..., N\}$ let us consider an event $\Omega_m \subset \Omega$ such that $\mathbf{P}(\Omega_m) > 0$ and such that $\mathcal{N} = m$ for every $S \in \Omega_m$. If the distribution of ω satisfies the deviation inequality, we have

Lemma 2.1. For every N, every $m \in \{0, 2, ..., N\}$ and every $u \ge 0$ we have

$$\mathbb{P}\left(\mathsf{F}_{N,\omega}(\Omega_m) - \mathbb{E}\left[\mathsf{F}_{N,\omega}(\Omega_m)\right] \ge u\right) \le C \exp\left(-\frac{u^2 N^2}{4C\lambda^2 m}\right).$$
(2.3)

Proof of Lemma 2.1. By the deviation inequality it suffices to show that for every $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^N$ we have

$$\left|\mathsf{F}_{N,\omega}\left(\Omega_{m}\right)-\mathsf{F}_{N,\omega'}\left(\Omega_{m}\right)\right| \leq \frac{2\lambda\sqrt{m}}{N}\left\|\omega-\omega'\right\|,\tag{2.4}$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm of \cdot . In order to establish (2.4) we introduce $\omega_t = t\omega + (1-t)\omega'$ and, taking the derivative with respect to t and integrating back, after the use of the Cauchy–Schwarz inequality we obtain

$$\left| \mathsf{F}_{N,\omega} \left(\Omega_{m} \right) - \mathsf{F}_{N,\omega'} \left(\Omega_{m} \right) \right| = \left| \int_{0}^{1} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-2\lambda)}{N} \mathbf{E}_{N,\omega_{t}} \left[\Delta_{n} \left| \Omega_{m} \right] \left(\omega_{n} - \omega_{n}' \right) \, \mathrm{d}t \right|$$

$$\leq \frac{2\lambda}{N} \sqrt{\sup_{t} \sum_{n=1}^{N} \left(\mathbf{E}_{N,\omega_{t}} \left[\Delta_{n} \left| \Omega_{m} \right] \right)^{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\omega_{n} - \omega_{n}' \right)^{2}}.$$
(2.5)

Since $\sum_{n=1}^{N} (\mathbf{E}_{N,\omega_t} [\Delta_n | \Omega_m])^2 \le m$, the proof is complete.

2.2. The delocalized region

Proof of Theorem 1.4, part (2). In this proof we set $F_{N,\omega}^a(\lambda, h) := (1/N) \log Z_{N,\omega}^a$ and

$$F_{N,\omega}^{a}(\lambda,h;m) := \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega} \left(\Omega_{N}^{a} \cap \{\mathcal{N}=m\} \right).$$
(2.6)

Since for $(\lambda, h) \in \mathcal{D}$ we have $F(\lambda, h) = 0$ and since $\left\{ N\mathbb{E} \left[F_{N,\omega}^{c}(\lambda, h) \right] \right\}_{N}$ is superadditive, so that $\lim_{N \to \infty} \mathbb{E} \left[F_{N,\omega}^{c}(\lambda, h) \right] = \sup_{N} \mathbb{E} \left[F_{N,\omega}^{c}(\lambda, h) \right]$, we have that

$$\mathbb{E}\left[\mathsf{F}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda,h)\right] \le 0,\tag{2.7}$$

for every N. The superadditivity is a direct consequence of the Markovian character of S, see [6] or [12] for the details.

Now let us fix $(\lambda, h) \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ and $\varepsilon > 0$ such that $(\lambda, h - \varepsilon) \in \mathcal{D}$. Observe that for every ω

$$F_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda,h;m) \ge -\lambda\varepsilon m/N \iff F_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda,h-\varepsilon;m) \ge \lambda\varepsilon m/N, \quad (2.8)$$

but $\mathbb{E}\left[F_{N,\omega}^{c}(\lambda, h - \varepsilon; m)\right] \leq \mathbb{E}\left[F_{N,\omega}^{c}(\lambda, h - \varepsilon)\right] \leq 0$, so that, by Lemma 2.1, we have

$$\mathbb{P}\left(\mathsf{F}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda,h;m) \geq -\lambda\varepsilon m/N\right) = \mathbb{P}\left(\mathsf{F}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda,h-\varepsilon;m) \geq \lambda\varepsilon m/N\right)$$
$$\leq C\exp\left(-\varepsilon^2 m/4C\right). \tag{2.9}$$

From this we directly obtain that if we set $E_{\overline{m}} = \{\text{there exists } m \ge \overline{m} \text{ such that } F_{N,\omega}^{c}(\lambda, h; m) \ge -\lambda \varepsilon m/N \}$ then

$$\mathbb{P}(E_{\overline{m}}) \le c_1 \exp\left(-c_2 \overline{m}\right). \tag{2.10}$$

We can now evaluate the tail of \mathcal{N} . For $\omega \in E_{\overline{m}}^{\complement}$, with $\Omega_m = \{\mathcal{N} = m, S_N = 0\}$, we have

$$\mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}\left(\mathcal{N} \ge \overline{m}\right) = \frac{\sum_{m \ge \overline{m}} Z_{N,\omega}\left(\Omega_{m}\right)}{Z_{N,\omega}^{\mathsf{c}}} \le c_{3} N^{3/2} \sum_{m \ge \overline{m}} \exp\left(-\lambda \varepsilon m\right)$$
$$\le c_{4} N^{3/2} \exp\left(-\lambda \varepsilon \overline{m}\right), \qquad (2.11)$$

where we have used that $Z_{N,\omega}^{c} \ge \mathbf{P}(S_n > 0, n = 1, ..., N - 1, S_N = 0) \ge 1/(c_3 N^{3/2})$ [10, Ch. 3]. The estimates (2.10) and (2.11) readily imply

$$\mathbb{E} \mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathbf{c}} \left(\mathcal{N} \ge \overline{m} \right) \le c_5 N^{3/2} \exp\left(-c_6 \overline{m} \right).$$
(2.12)

The choice of $\overline{m} \ge q \log N$, for q sufficiently large completes the proof for the case of $\mathbf{P}_{N,\omega}^{c}$.

For the free endpoint case $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathbf{f}}$ one recalls that in [6] (or in [12]) it is proven that there exists a positive constant c such that

$$Z_{N,\omega}^{\mathbf{f}} \le cN Z_{N,\omega}^{\mathbf{c}},\tag{2.13}$$

for every ω and every N. Therefore, by (2.7), we have

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{F}_{N,\omega}^{\mathbf{f}}(\lambda,h)\right] \leq \frac{1}{N}\log(cN),\tag{2.14}$$

and therefore formulas (2.8), (2.9) and (2.10) hold if we replace the quantity $F_{N,\omega}^{c}(\lambda, h; m)$ with $F_{N,\omega}^{f}(\lambda, h; m) - (\log cN)/N$. It suffices therefore to observe that $\inf_{N,\omega} N^{1/2} Z_{N,\omega}^{f} \ge \inf_{N} N^{1/2} \mathbf{P}(S_{n} > 0, n = 1, ..., N) > 0$ to conclude that (2.11) holds unchanged if a = c is replaced by a = f and $\Omega_{m} = \{\mathcal{N} = m\}$, apart for the explicit values of the multiplicative constants (which we have not tracked anyway). The proof is therefore complete.

2.3. The strongly delocalized region

Proof of Theorem 1.4, part (1). We start by proving (1.12). We compute by means of the Fubini–Tonelli theorem:

$$\mathbb{E}\left[Z_{N,\omega}\left(\Omega_{m}\right)\right] = \mathbb{E}\mathbb{E}\left[\exp\left(-2\lambda\sum_{n=1}^{N}\left(\omega_{n}+h\right)\Delta_{n}\right); \ \Omega_{m}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\log M(2\lambda\Delta_{n})-2\lambda h\Delta_{n}\right)\right); \ \Omega_{m}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(-2\lambda\left(h-\log M(2\lambda)/2\lambda\right)\sum_{n=1}^{N}\Delta_{n}\right)\left|\Omega_{m}\right] \mathbb{P}\left(\Omega_{m}\right),$$
(2.15)

where Ω_m is like in Lemma 2.1. Since $\mathcal{N} = \sum_{n=1}^N \Delta_n = m$ on Ω_m we have

$$\mathbb{E}\left[Z_{N,\omega}\left(\Omega_{m}\right)\right] = \mathbf{P}\left(\Omega_{m}\right)\exp\left(-\beta m\right), \qquad (2.16)$$

with $\beta := 2\lambda (h - \log M(2\lambda)/2\lambda)$, so $\beta > 0$ in the strongly delocalized regime.

We can now estimate the tail behavior of \mathcal{N} , averaged over the disorder ω . We first consider the free case: set $\Omega_m = \{\mathcal{N} = m\}$ and $P_N(m) := \mathbf{P}(\Omega_m)$. We have

$$\mathbb{E} \mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathbf{f}} \left(\mathcal{N} \ge \overline{m} \right) = \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{m \ge \overline{m}} Z_{N,\omega} \left(\Omega_m \right)}{Z_{N,\omega}^{\mathbf{f}}} \right] \le \sum_{m \ge \overline{m}} \exp\left(-\beta m\right) \frac{P_N(m)}{P_N(0)}, \quad (2.17)$$

where we have used once again that $Z_{N,\omega}^{f} \ge \mathbf{P} (\mathcal{N} = 0) = P_N(0)$ and we have applied (2.16). The proof of (1.12) in the free endpoint case is completed once we observe that $P_N(m) \le P_N(0)$, a fact that can be easily extracted from the exact expression of $P_N(m)$ [10, Ch. 3].

In the constrained endpoint case one takes $\Omega_m = \{\mathcal{N} = m, S_N = 0\}$ and the steps are then identical. Notice however that in this case $P_N(m) = P_N(0)$ every *m* [10, Ch. 3].

We turn now to the proof of (1.10) and (1.11). Like in (2.15), by explicit computation we have

$$\mathbb{E}\left[Z_{N,\omega}^{a}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\beta\mathcal{N}\right); \ \Omega_{N}^{a}\right].$$
(2.18)

Let us observe preliminarily that we have [10, Ch. 3]:

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{N}=k\right) \le \frac{c}{\sqrt{N}} \quad \text{and} \quad \mathbf{P}\left(\mathcal{N}=k, S_N=0\right) \le \frac{c}{N^{3/2}}, \tag{2.19}$$

and from this one easily finds a constant C > 0 such that

$$\mathbb{E}\left[Z_{N,\omega}^{\mathbf{f}}\right] \le \frac{C}{N^{1/2}} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[Z_{N,\omega}^{\mathbf{c}}\right] \le \frac{C}{N^{3/2}}.$$
(2.20)

On the other hand we know (and used several times by now) that there exists c > 0 such that

$$Z_{N,\omega}^{f} \ge c/N^{1/2}$$
 and $Z_{N,\omega}^{c} \ge c/N^{3/2}$ (2.21)

473

for every ω .

We focus now on the proof of (1.10). Let us call F_{ℓ} the event of the random walk trajectories for which there exists $n \in \{\ell, \ldots, N\}$ such that $S_{\ell} = 0$. By conditioning on the last hitting time of zero before time N we obtain

$$\mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathbf{f}}(F_{\ell}) = \frac{1}{Z_{N,\omega}^{\mathbf{f}}} \sum_{l=\ell}^{N} Z_{l,\omega}^{\mathbf{c}} \mathbf{P} \left(S_n > 0 \text{ for } n = 1, 2, \dots, (N-l) \right)$$
$$\times \left(1 + \exp\left(-2\lambda \sum_{n=l+1}^{N} (\omega_n + h)\right) \right). \tag{2.22}$$

Since the denominator can be bounded below uniformly in ω , cf. (2.21), by integrating with respect to ω we obtain

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathbf{f}}\left(F_{\ell}\right)\right] \leq cN^{1/2} \sum_{l=\ell}^{N} \mathbb{E}\left[Z_{l,\omega}^{\mathbf{c}}\right] \mathbf{P}(S_{n} > 0, n = 1, 2, \dots, N-l)$$

$$\times (1 + \exp(-\beta(N-l)))$$

$$\leq c_{1}N^{1/2} \sum_{l=\ell}^{N} \frac{1}{(l+1)^{3/2}} \frac{1}{(N+1-l)^{1/2}} \leq \frac{c_{2}}{(\ell+1)^{1/2}}.$$
(2.23)

In order to complete the proof of (1.10) we need to exclude that the last excursion of the polymer is in the lower half plane. However one directly verifies that:

$$\mathbb{E} \mathbf{P}_{N\omega}^{\mathbf{f}} \left(F_{\ell}^{\mathbf{C}}, \ S_n < 0 \text{ for } n \ge \ell \right) \le \exp(-\beta(N-\ell)), \tag{2.24}$$

and this suffices to conclude the proof of (1.10).

The proof of (1.11) is conceptually very close to the proof of (1.10). We introduce the event F_{ℓ_1,ℓ_2} of the polymer trajectories hitting 0 in the set $\{\ell_1, \ldots, N/2\}$ and in $\{N/2, \ldots, N - \ell_2\}$. We may write

$$\mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}\left(F_{\ell_{1},\ell_{2}}\right) = \frac{1}{Z_{N,\omega}^{\mathsf{c}}} \sum_{j_{1}=\ell_{1}}^{N/2} \sum_{j_{2}=\ell_{2}}^{N/2} Z_{j_{1},\omega}^{\mathsf{c}} Z_{N,\omega}^{\pm}(j_{1},j_{2}) Z_{j_{2},\tau_{N-j_{2}}\omega}^{\mathsf{c}}, \quad (2.25)$$

where τ_k is the *k*-shift, i.e., $(\tau_k \omega)_n = \omega_{n+k}$, and

$$Z_{N,\omega}^{\pm}(j_1, j_2) := \mathbf{P}\left(S_n > 0, \ n = 1, 2, \dots, N - j_1 - j_2 - 1, \ S_{N-j_1-j_2} = 0\right) \\ \times \left(1 + \exp\left(-2\lambda \sum_{n=j_1+1}^{N-j_2} (\omega_n + h)\right)\right).$$
(2.26)

Once again we estimate the denominator uniformly with respect to ω , cf. (2.21), and then take expectation. By applying (2.19) and (2.20) we obtain

$$\mathbb{E}\mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}\left(F_{\ell_{1},\ell_{2}}\right) \leq c_{1} \sum_{j_{1}=\ell_{1}}^{N/2} \sum_{j_{2}=\ell_{2}}^{N/2} \frac{1}{(j_{1}+1)^{3/2}} \frac{1}{(j_{2}+1)^{3/2}} \left(\frac{N}{N-j_{1}-j_{2}+1}\right)^{3/2}.$$
(2.27)

Since the right-hand side can be bounded above by $c_2/\sqrt{\ell_1\ell_2+1}$ the proof is easily completed.

3. Universality of the slope at the origin

Proof of Theorem 1.3. Let us first of all prove the theorem when the random variable ω_1 is bounded.

Let $\mathbb{P}^{(1)}$ be the law of IID centered Bernoulli random variables $\omega_n = \pm 1$. Also, consider a law $\mathbb{P}^{(2)}$ for the IID symmetric bounded random variables $\{\omega_n\}_n$, and recall that by convention $\mathbb{E}^{(2)}[\omega_1^2] = 1$.

Let $m_c^{(1)}$ be the slope at the origin of the critical curve of the copolymer model with Bernoulli disorder, whose existence was proven in [6]. By definition of $m_c^{(1)}$, for any $v > m_c^{(1)}$ and λ sufficiently small one has

$$\mathbf{F}^{(1)}(\lambda, \nu\lambda) := \sup_{N} \mathbb{E}^{(1)} \mathbf{F}^{\mathsf{c}}_{N,\omega}(\lambda, \nu\lambda) = 0.$$
(3.1)

This implies that, for any $\varepsilon > 0$, $N \in 2\mathbb{N}$ and $m \in \{0, 2, \dots, N\}$,

$$\mathbb{E}^{(1)}\mathsf{F}^{\mathsf{c}}_{N,\omega}(\lambda,(\upsilon+\varepsilon)\lambda;m) \leq -\frac{2\varepsilon\lambda^2m}{N},\tag{3.2}$$

where we use the same notation as in equation (2.6). On the other hand, one has the following lemma, proven below.

Lemma 3.1. If the laws $\mathbb{P}^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2$ correspond to IID centered bounded random variables, there exists a constant c > 0 such that for any $h \ge 0, 0 \le \lambda \le 1, N \in 2\mathbb{N}$ and $m \in \{0, 2, \dots, N\}$,

$$\left| \mathbb{E}^{(1)} \mathbf{F}^{a}_{N,\omega}(\lambda,h;m) - \mathbb{E}^{(2)} \mathbf{F}^{a}_{N,\omega}(\lambda,h;m) \right| \le c \frac{m\lambda^{3}}{N},$$
(3.3)

and

$$\left|\mathbb{E}^{(1)}\mathsf{F}^{a}_{N,\omega}(\lambda,h) - \mathbb{E}^{(2)}\mathsf{F}^{a}_{N,\omega}(\lambda,h)\right| \le c\lambda^{3}.$$
(3.4)

Thanks to equations (3.2) and (3.3), one has

$$\mathbb{E}^{(2)}\mathsf{F}^{\mathsf{c}}_{N,\omega}(\lambda, (\nu+\varepsilon)\lambda; m) \leq -\frac{2\varepsilon\lambda^2 m}{N} + c\frac{m\lambda^3}{N} \leq -\frac{\varepsilon\lambda^2 m}{N}$$
(3.5)

provided that $\lambda \leq \min(1, \varepsilon/c)$. Using the deviation inequality (1.2), which is applicable since the random variables are bounded, it is then possible to deduce that

$$F^{(2)}(\lambda, (v+\varepsilon)\lambda) := \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}^{(2)} F_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda, (v+\varepsilon)\lambda) = 0.$$
(3.6)

This point is discussed in greater detail at the end of this section, in a more general context where the random variables $\omega_n^{(2)}$ are not necessarily bounded. Therefore, one has $\lim \sup_{\lambda \searrow 0} h_c^{(2)}(\lambda)/\lambda \le v + \varepsilon$ and, thanks to the arbitrariness of $\varepsilon > 0$ and of $v > m_c^{(1)}$,

$$\limsup_{\lambda \searrow 0} \frac{h_c^{(2)}(\lambda)}{\lambda} \le m_c^{(1)}.$$
(3.7)

To obtain the opposite bound, observe that from Theorem 6 of [6] follows that for any $v < m_c^{(1)}$, there exists c(v) > 0 such that

$$F^{(1)}(\lambda, v\lambda) \ge c(v)\lambda^2 \tag{3.8}$$

for λ sufficiently small. On the other hand, thanks to (3.4), for λ sufficiently small one has

$$F^{(2)}(\lambda, \nu\lambda) \ge \frac{c(\nu)}{2}\lambda^2$$
(3.9)

which implies

$$\liminf_{\lambda \searrow 0} \frac{h_c^{(2)}(\lambda)}{\lambda} \ge m_c^{(1)}$$
(3.10)

and the statement of the theorem in the bounded case. Theorem 1.3, ω_1 bounded

Proof of Lemma 3.1. This is based on an interpolation argument, of the type of the one showing that the free energy of the Sherrington-Kirkpatrick spin glass model does not depend on the distribution of the couplings (see [20], [13] and the more recent [7]).

For definiteness, we give the proof of (3.3) in the pinned case a = c. For $0 \le t \le 1$, consider the auxiliary free energy

$$F_{N}(t) = \frac{1}{N} \mathbb{E}^{(1,2)} \log \mathbf{E} \left[\exp \left(-2\lambda \sum_{n=1}^{N} (\sqrt{t} \omega_{n}^{(1)} + \sqrt{1-t} \omega_{n}^{(2)} + h) \Delta_{n} \right); \mathcal{N} = m, S_{N} = 0 \right],$$
(3.11)

where $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ are independent and distributed according to the laws $\mathbb{P}^{(1)}, \mathbb{P}^{(2)}$ respectively. Then, one has immediately

$$F_N(1) = \mathbb{E}^{(1)} \mathbf{F}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda, h; m) \tag{3.12}$$

$$F_N(0) = \mathbb{E}^{(2)} \mathsf{F}^{\mathsf{c}}_{N,\omega}(\lambda, h; m). \tag{3.13}$$



Therefore, one has to estimate the *t*-derivative of the free energy, which is easily computed:

$$\frac{\mathrm{d}F_{N}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda}{N} \mathbb{E}^{(1,2)} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}_{N,\omega_{t}}(\Delta_{n} | \mathcal{N} = m, S_{N} = 0) \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \omega_{n}^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{1-t}} \omega_{n}^{(2)}\right).$$
(3.14)

This expression can be manipulated by means of the identity

$$\mathbb{E} \eta G(\eta) = \mathbb{E} G'(\eta) + \mathbb{E} \left((\eta^2 - 1) \int_0^{\eta} G''(u) \, \mathrm{d}u \right) - \frac{1}{4} \mathbb{E} |\eta| \int_{-|\eta|}^{+|\eta|} (\eta^2 - u^2) G'''(u) \, \mathrm{d}u,$$
(3.15)

which holds for any symmetric random variable η with $\mathbb{E}[\eta^2] = 1$ and for sufficiently regular functions *G*. In our case, the idea is that every derivative with respect to $\omega_n^{(\ell)}$ carries a (small) factor λ , so that the first term in the r.h.s. of (3.15) is the dominant one. Applying this identity to (3.14), one finds that the *dominant terms* cancel exactly, and one is left with terms involving derivatives of $\mathbf{E}_{N,\omega_t}(\Delta_n | \mathcal{N} = m, S_N = 0)$ of order higher than one. Indeed, denoting

$$0 \leq X_n^{(\ell)}(u) := \mathbf{E}_{N,\omega_t}(\Delta_n | \mathcal{N} = m, S_N = 0) \Big|_{\omega_n^{(\ell)} = u},$$

and noting that for $k \ge 1$

$$0 \le (X_n^{(\ell)}(u))^k \le X_n^{(\ell)}(u),$$

one has

$$\left|\frac{\mathrm{d}F_{N}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \leq \sum_{\ell=1}^{2} \frac{12\lambda^{3}}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}^{(1,2)}((\omega_{n}^{(\ell)})^{2} + 1) \left|\int_{0}^{\omega_{n}^{(\ell)}} X_{n}^{(\ell)}(u) \,\mathrm{d}u\right| \quad (3.16)$$

$$\sum_{\ell=1}^{2} 26\lambda^{4} \sum_{n=1}^{N} -(1,2) \dots (\ell) \sum_{\ell=1}^{\ell+1} \int_{0}^{|\omega_{n}^{(\ell)}|} (\ell) \,\mathrm{d}u$$

$$+\sum_{\ell=1}^{2} \frac{26\lambda^4}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}^{(1,2)} |\omega_n^{(\ell)}|^3 \int_{-|\omega_n^{(\ell)}|}^{+|\omega_n^{(\ell)}|} X_n^{(\ell)}(u) \, \mathrm{d}u.$$
(3.17)

Below, we consider only the terms with $\ell = 1$, the other case requiring only minimal modifications. Let us first consider the term in (3.17). Observe that

$$-2\lambda X_n^{(1)}(u) \le -2\lambda\sqrt{t} \left(X_n^{(1)}(u) - (X_n^{(1)}(u))^2 \right) = \frac{d}{du} X_n^{(1)}(u) \le 0 \quad (3.18)$$

so that for any u, u'

$$X_n^{(1)}(u) \le X_n^{(1)}(u')e^{2\lambda|u-u'|}.$$
(3.19)

Therefore, the term in (3.17) can be bounded above by

$$\frac{26\lambda^4}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}^{(1,2)} |\omega_n^{(1)}|^3 \int_{-|\omega_n^{(1)}|}^{+|\omega_n^{(1)}|} \mathbf{E}_{N,\omega_l}(\Delta_n |\mathcal{N}=m, S_N=0) e^{2\lambda |u-\omega_n^{(1)}|} \, \mathrm{d}u \le c \frac{m\lambda^4}{N}$$
(3.20)

where we made use of the boundedness of $\omega_n^{(1)}$ and of the fact that $\mathbf{E}_{N,\omega_t}(\Delta_n | \mathcal{N} = m, S_N = 0)$ does not depend on *u*. An analogous bound can be obtained for the term in (3.16). Indeed, it is bounded above by

$$c\frac{\lambda^{3}}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}^{(1,2)}\left|\int_{0}^{\omega_{n}^{(1)}}\mathbf{E}_{N,\omega_{t}}(\Delta_{n}|\mathcal{N}=m,S_{N}=0)e^{2\lambda|u-\omega_{n}^{(1)}|}\,\mathrm{d}u\right|$$

$$\leq c'\frac{\lambda^{3}}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}^{(1,2)}\mathbf{E}_{N,\omega_{t}}(\Delta_{n}|\mathcal{N}=m,S_{N}=0)=c'\frac{m\lambda^{3}}{N}.$$
(3.21)

The proof of (3.4) is much simpler. In this case one removes the constraint on \mathcal{N} in the definition of $F_N(t)$ and then it is immediate to realize that (3.16) and (3.17) are of order $O(\lambda^3)$ and $O(\lambda^4)$, respectively.

Lemma 3.1

Proof of Theorem 1.3, $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. It remains to show that the proof covers also the case when $\mathbb{P}^{(2)}$ is the law of IID centered Gaussian variables. One easily verifies that Lemma 3.1 still holds if one of the two laws is replaced by the Gaussian one. To this purpose, it is sufficient to observe that, if η is a $\mathcal{N}(0, 1)$ random variable, identity (3.15) can be replaced by the integration by parts formula

$$\mathbb{E}\eta G(\eta) = \mathbb{E}G'(\eta).$$

Therefore, one still obtains the uniform bound (3.5). In order to deduce (3.6) from (3.5), one proceeds as follows. For any $\overline{m} \ge 0$, one can decompose the partition function and write with obvious notation

$$Z_{N,\omega}^{c}(\lambda,h) = Z_{N,\omega}^{c}(\lambda,h;m \le \overline{m}) + Z_{N,\omega}^{c}(\lambda,h;m > \overline{m}).$$
(3.22)

From now until the end of the proof we set $h = (v + \varepsilon)\lambda$. Then, using the inequality

$$\log(a+b) \le \log 2 + \log a + \log b, \tag{3.23}$$

which holds whenever $a, b \ge 1$, and the fact that $Z_{N,\omega}^{c}(\lambda, h; m \le \overline{m}) \ge c_1 N^{-3/2}$ for some constant c_1 independent of ω and N, one has

$$\mathbb{E}^{(2)} \mathsf{F}_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda, h) \leq \frac{1}{N} \mathbb{E}^{(2)} \log Z_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda, h; m \leq \overline{m}) + \frac{1}{N} \mathbb{E}^{(2)} \log \max\left(1, Z_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda, h; m > \overline{m}) N^{3/2} / c_1\right) + \frac{\log 2}{N}.$$
(3.24)

The first term in (3.24) can be bounded above via Jensen's inequality by $c_2\overline{m}/N$, where c_2 is a constant independent of \overline{m} and N. As for the second term, define the event $E_{\overline{m}}$ as

$$E_{\overline{m}} = \left\{ \text{ there exists } m \ge \overline{m} \text{ such that } F_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda,h;m) \ge -\frac{\varepsilon m \lambda^2}{2N} \right\} (3.25)$$

whose probability, thanks to the deviation inequality (1.2) and to (3.5), satisfies

$$\mathbb{P}^{(2)}\left(E_{\overline{m}}\right) \leq \frac{1}{c_3}e^{-c_3\overline{m}}$$

The second term in (3.24) can be therefore bounded above by

$$c_4 \frac{\log N}{N} + \frac{1}{N} \sqrt{\mathbb{P}^{(2)}(E_{\overline{m}}) \mathbb{E}^{(2)} \left(\log \max\left(1, Z_{N,\omega}^{\mathsf{c}}(\lambda, h; m > \overline{m}) N^{3/2} / c_1\right)\right)^2},\tag{3.26}$$

where the first term comes from the average restricted to the event $E_{\overline{m}}^{\complement}$ and in the second we applied Cauchy-Schwarz inequality. Observing that

$$Z_{N,\omega}^{c}(\lambda, h; m > \overline{m}) \le \exp\left(2\lambda \sum_{n=1}^{N} (h + |\omega_n|)\right)$$

and putting everything together, one obtains finally

$$\mathbb{E}^{(2)} \mathsf{F}^{\mathsf{c}}_{N,\omega}(\lambda, h) \le c_5 \left(\frac{\overline{m}}{N} + \frac{\log N}{N} + e^{-c_3 \overline{m}/2} \right), \tag{3.27}$$

from which (3.6) follows choosing for instance $\overline{m} = \sqrt{N}$.

From this point on, the proof proceeds exactly like in the bounded case. Theorem 1.3, $\omega_1 {\sim} \mathcal{N}(0,1)$

4. Further results and considerations

4.1. What does one expect on delocalized paths

In the previous section, we have given delocalization results that hold in average with respect to the \mathbb{P} -probability. On the other hand, one would like to prove $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost sure results. In this respect, based on what is known on non-disordered models, see e.g. [9] and [14], it is tempting to conjecture the following scenario: for $h > h_c(\lambda)$

C.1 there are only a finite number of visits to the unfavorable solvent, that is $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s.

$$\lim_{\ell \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \mathbf{P}^{\mathbf{f}}_{N,\omega} \left(\max \mathcal{A} > \ell \right) = 0.$$
(4.1)

C.2 there is a diffusive scaling limit to a *Brownian meander*. In other terms if we set $B_t^{(N)} := S_{Nt}/\sqrt{N}$ for $N \in \{0, 1, ..., N\}$ and we extend the definition of $B_{\cdot}^{(N)}$ to a function in $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ by linear interpolation for $S_{N, \cdot}$, $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. we have that the law of $B_{\cdot}^{(N)}$, with *S* distributed according to $\mathbf{P}_{N,\omega}^{f}$, converges weakly as $N \to \infty$ to the law of the Brownian meander, that is the law of a standard Brownian process conditioned not to enter the lower half plane. The standard reference for the Brownian meander is [17].

With the same level of confidence one might formulate the analogous statements for the constrained case: in particular, in C.2 the expected scaling limit would the Brownian bridge conditioned to stay positive, a process that normally goes under the name of *Bessel(3) bridge*, see [17].

As we will see, the scenario outlined above cannot hold if taken literally, though we expect the qualitative picture to be correct. To start with, observe that Theorem 1.4 gives partial support to the conjectures, at least for $h \ge \overline{h}(\lambda)$. Indeed, for example if we choose a sequence $\{\ell_N\}_N$ with $\lim_N \ell_N = \infty$, then by (1.10) we have that

$$\lim_{N} \mathbf{P}_{N,\omega}^{\mathbf{f}} \left(\max \mathcal{A} > \ell_N \right) = 0, \tag{4.2}$$

in \mathbb{P} -probability, or $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. by subsequences. This of course falls a bit short of proving C.1, even in the strongly delocalized region. Just about the same is true for C.2. Let us set $\zeta_N := \max \mathcal{A}$. By the result we just stated, for $h > \overline{h}(\lambda)$ there exists a sequence $\{N_j\}_j$ such that $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. the random variable ζ_{N_j}/N_j tends to zero as *j* tends to infinity, in $\mathbf{P}_{N_j,\omega}$ -probability. Since it is not difficult to see that, conditionally to $\zeta_N = k$, the law of $\{S_{\zeta_N+n}\}_{n=0,1,\dots}$ coincides with the law of a simple random walk constrained not to enter the lower half-plane up to time N - k, we are in the framework already considered for example in [14] or [9]. Therefore, by proceeding like in [9], one can show that for a \mathbb{P} -typical ω the sequence of random functions $\{B_{\cdot}^{(N_j)}\}_j$, with *S* distributed according to $\mathbf{P}_{N_j,\omega}^{\mathbf{f}}$, converges weakly as $j \to \infty$ to the law of the Brownian meander.

On the other hand, Theorem 1.4 does not say much in the direction of C.1 and C.2 for $h \in (h_c(\lambda), \overline{h}(\lambda)]$. This is due to the fact that, in spite of knowing that there are few visits to the unfavorable solvent, we do not know that they are close to the origin (or to N, in the constrained case).

4.2. On the size of $Z_{N,\omega}^a$

Some further insight on the behavior of paths in the delocalized phase may be obtained by looking at the size of $Z_{N,\omega}^a$.

Observe that, by (2.20), under the basic assumptions on the disorder distribution and in the strongly delocalized regime $h \ge \overline{h}(\lambda)$, $Z_{N,\omega}^a$ is of the order of $N^{-1/2}$ for a = f, and $N^{-3/2}$ for a = c, in the evident \mathbb{P} -probability sense. Recalling (2.21), the result is somewhat sharp. We lack however an almost sure result going beyond the fact that $Z_{N,\omega}^a$ tends to $0 \mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. in the strongly delocalized region (this is an immediate consequence of the convergence in probability along with the fact

that $\{Z_{N,.}^{a}\}_{N}$ is a positive supermartingale for $h \ge \overline{h}(\lambda)$ with respect to the natural filtration of ω and therefore it converges $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s.).

On the other hand, the result that we are going to present now says that something qualitatively different happens for $h_c(\lambda) \le h \le \overline{h}(\lambda)$. As we will discuss at the end of the section, this phenomenon reflects on the behavior of the paths.

Proposition 4.1. Under the basic assumptions on ω one can construct a sequence $\{\tau_N\}_N$ of stopping times, with respect to the natural filtration of the sequence ω , with the property that $\log \tau_N(\omega) / \log N \xrightarrow{N \to \infty} 1 \mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. and we can find a number $\delta = \delta(\lambda, h)$, explicitly given below, such that $\delta > 0$ if $h < \overline{h}(\lambda)$, and that

$$\lim_{N \to \infty} N^{1/2 - \delta'} Z^{\sharp}_{\tau_N(\omega),\omega} = +\infty, \quad \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) - a.s..$$
(4.3)

for every $\delta' < \delta$.

Proof. Set $\widetilde{\omega}_n := \omega_n + h$, choose a real number q < h and define

$$\tau_N := \inf\left\{ n \in 2\mathbb{N} : \frac{\sum_{j=k+1}^n \widetilde{\omega}_j}{n-k} \le q \text{ for some } k \in \{0, 2, \dots, n-r_N\} \right\}$$
(4.4)

with r_N the largest even integer smaller than $(\log N)/\Sigma_h(q)$, where $\Sigma_h(\cdot)$ is the Cramer Large Deviation functional of $\tilde{\omega}$:

$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\ell} \widetilde{\omega}_j \le q\ell\right) = -\Sigma_h(q).$$
(4.5)

We note that τ_N is the first moment at which an *atypical* stretch of length at least r_N appears along the sequence ω . By Theorem 3.2.1 in [8, §3.2] we have that $\log \tau_N / \log N$ tends to 1 $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s.. The same theorem tells us that, if

$$R_n := \max\left\{\ell - k : k \text{ and } \ell \text{ even }, \ 0 \le k < \ell \le n, \frac{\sum_{j=k+1}^{\ell} \widetilde{\omega}_j}{\ell - k} \le q\right\}, \quad (4.6)$$

then $R_n/\log n \xrightarrow{n \to \infty} 1/\Sigma_h(q) \mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. and therefore

$$\lim_{N \to \infty} \frac{R_{\tau_N}}{\log N} = \frac{1}{\Sigma_h(q)}, \quad \mathbb{P}(d\omega) - \text{a.s..}$$
(4.7)

Notice that the longest atypical stretch, in the sense of (4.6), for $n = \tau_N$ ranges from $\tau_N - R_{\tau_N}$ to τ_N , so $\sum_{j=\tau_N - R_{\tau_N} + 1}^{\tau_N} \widetilde{\omega}_j \le q R_{\tau_N}$. Choose now any $\varepsilon > 0$ and a typical ω . We have

$$Z_{\tau_N,\omega}^{\mathbf{f}} \geq \mathbf{P}\left(S_n > 0, \ n = 1, 2, \dots, \tau_N - R_{\tau_N} - 1, \ S_{\tau_N - R_{\tau_N}} = 0\right)$$

$$\times \exp\left(-2\lambda q R_{\tau_N}\right) \mathbf{P}\left(S_n < 0, \ n = 1, 2, \dots, R_{\tau_N}\right)$$

$$\geq c \frac{1}{N^{3/2+\varepsilon}} N^{-2\lambda q/\Sigma_h(q)}.$$
 (4.8)

The second inequality holds for N sufficiently large. Now we set

$$\delta := \sup_{q < h} \frac{-2\lambda q - \Sigma_h(q)}{\Sigma_h(q)},\tag{4.9}$$

and observe that $\sup_{q < h} (-2\lambda q - \Sigma_h(q))$ is positive if and only if $\sup_{q \in \mathbb{R}} (-2\lambda q - \Sigma_h(q))$ is positive. The latter expression is the Legendre transform of $\Sigma_h(\cdot)$ and therefore it coincides with $-2\lambda h + \log M(2\lambda)$, which is positive for $h < \overline{h}(\lambda)$. We have therefore proven (4.3).

Two remarks are in order:

Remark 4.2. It is immediate to see that, at least in the case in which ess sup $\omega_1 =: \omega^*$ is finite, Proposition 4.1 yields that C.1 cannot hold in the free endpoint case below $\overline{h}(\lambda)$. Even more, it is in contradiction with the possibility of having $o(\log N)$ visits to the unfavorable solvent, if one insists on having $\mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. results. This is easily seen by considering copolymers of length τ_N : one estimates for the numerator the partition function restricted to trajectories of the walk visiting $o(\log N)$ times the lower half plane and for the denominator one uses (4.3).

Remark 4.3. The argument in the proof of Proposition 4.1 may be repeated for the constrained case and one obtains that, as long as $h < \omega^*$ there exists $\delta > 0$ such that $N^{3/2-\delta}Z_{N,\omega}^{c}$ does not vanish. This once again contradicts C.1: it is however a more evident phenomenon, since the polymer is forced in any case to visit all atypical ω -stretches when its endpoint encounters them.

Acknowledgements. We would like to thank Thierry Bodineau for several enlightening discussions. We thank also Francesco Caravenna and Massimiliano Gubinelli for the interaction we had on the content of Section 4, and Michel Ledoux and Cédric Villani for e-mail exchanges on concentration issues. F.L.T. is grateful to the *Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires P6 & 7* for the hospitality and to the University of Paris 7 for the support. This work was supported in part by the Swiss Science Foundation Contract No. 20-100536/1.

References

- Albeverio, S., Zhou, X.Y.: Free energy and some sample path properties of a random walk with random potential. J. Statist. Phys. 83, 573–622 (1996)
- Alexander, K.S., Sidoravicius, V.: Pinning of polymers and interfaces by random potentials. Preprint 2005. Available on: arXiv.org e-Print archive: math.PR/0501028
- Biskup, M., den Hollander, F.: A heteropolymer near a linear interface. Ann. Appl. Probab. 9, 668–687 (1999)
- 4. Bobkov, S., Götze, F.: Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. J. Funct. Anal. **163**, 1–28 (1999)
- Bodineau, T., Giacomin, G.: On the localization transition of random copolymers near selective interfaces. J. Statist. Phys. 117, 801-818 (2004)
- Bolthausen, E., den Hollander, F.: Localization transition for a polymer near an interface. Ann. Probab. 25, 1334–1366 (1997)
- Carmona, P., Hu, Y.: Universality in Sherrington-Kirkpatrick's Spin Glass Model. Preprint 2004. Available online: http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/hu/ preprints.html



G. Giacom	in, F.L.	Toninelli
-----------	----------	-----------

- Dembo, A., Zeitouni, O.: Large deviations techniques and applications. Springer Verlag, New York, 1998
- Deuschel, J.–D., Giacomin, G., Zambotti, L.: Scaling limits of equilibrium wetting models in (1+1)–dimension. Probab. Theory Rel. Fields, DOI: 10.1007/s00440-004-0401-8 (December 2004). Published online: http://link.springer.de/link/service/journals/00440/
- Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. Vol. I, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1968
- Garel, T., Huse, D.A., Leibler, S., Orland, H.: Localization transition of random chains at interfaces. Europhys. Lett. 8, 9–13 (1989)
- 12. Giacomin, G.: Localization phenomena in random polymer models. Preprint 2004. Available online: http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/giacomin/pub/publicat.html
- Guerra, F., Toninelli, F.L.: The Thermodynamic limit in mean field spin glass models. Commun. Math. Phys. 230, 71–79 (2002)
- 14. Isozaki, Y., Yoshida, N.: Weakly pinned random walk on the wall: pathwise descriptions of the phase transition. Stoch. Proc. Appl. **96** (2), 261–284 (2001)
- Ledoux, M.: Measure concentration, transportation cost, and functional inequalities. Summer School on Singular Phenomena and Scaling in Mathematical Models, Bonn, 10–13 June 2003. Available online: http://www.lsp.ups-tlse.fr/Ledoux/
- 16. Monthus, C.: On the localization of random heteropolymers at the interface between two selective solvents. Eur. Phys. J. B **13**, 111–130 (2000)
- Revuz, D., Yor, M.: Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer Verlag, New York–Heidelberg, 1991
- Sinai, Ya.G.: A random walk with a random potential. Theory Probab. Appl. 38, 382–385 (1993)
- 19. Talagrand, M.: A new look at independence. Ann. Probab. 24, 1-34 (1996)
- Talagrand, M.: Gaussian averages, Bernoulli averages and Gibbs' measure. Random Structures Algorithms 21, 197–204 (2002)
- 21. Villani, C.: Topics in optimal transportation. Graduate Studies in Mathematics **58**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003
Smoothing Effect of Quenched Disorder on Polymer Depinning Transitions

Giambattista Giacomin, Fabio Lucio Toninelli

² Laboratoire de Physique, ENS Lyon (CNRS U.M.R. 5672), 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France. E-mail: fltonine@ens-lyon.fr

Received: 8 July 2005 / Accepted: 28 November 2005 Published online: 11 April 2006 – © Springer-Verlag 2006

Abstract: We consider general disordered models of pinning of directed polymers on a defect line. This class contains in particular the (1 + 1)-dimensional interface wetting model, the disordered Poland–Scheraga model of DNA denaturation and other (1 + d)dimensional polymers in interaction with flat interfaces. We consider also the case of copolymers with adsorption at a selective interface. Under quite general conditions, these models are known to have a (de)localization transition at some critical line in the phase diagram. In this work we prove in particular that, as soon as disorder is present, the transition is at least of second order, in the sense that the free energy is differentiable at the critical line, so that the order parameter vanishes continuously at the transition. On the other hand, it is known that the corresponding non-disordered models can have a first order (de)localization transition, with a discontinuous first derivative. Our result shows therefore that the presence of the disorder has really a smoothing effect on the transition. The relation with the predictions based on the Harris criterion is discussed.

1. Introduction and Models

Quenched disorder is expected to smooth phase transitions in many situations. This is for instance the case of ferromagnetic spin systems in dimension $d \le 2$ (if the spins are discrete) or in dimension $d \le 4$ (if they have rotation symmetry): when a random magnetic field is present the Imry–Ma argument [20], made rigorous by Aizenman and Wehr [1], implies that these models do not exhibit, at any temperature, the first order phase transition with associated spontaneous magnetization which characterizes the corresponding pure models. For the analogous phenomenon for SOS effective interface models see [6].

In the present work, under some conditions on the disorder distribution, we prove that a similar effect takes place in models of directed polymers in random media exhibiting a localization/delocalization transition on a defect line. Such a transition may be of first or higher order in the corresponding pure, i.e. non-disordered, cases and we show that, as soon as disorder is present, the transition is at least of second order. It is important

¹ Laboratoire de Probabilités de P 6 & 7 (CNRS U.M.R. 7599) and Université Paris 7 – Denis Diderot, U.F.R. Mathematiques, Case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. E-mail: giacomin@math.jussieu.fr

to emphasize that the mechanism inducing the smoothing of the transition in our case is very different from the Imry–Ma one, and it is rather based on an estimate of the probability that the polymer visits rare but very favorable regions where the disorder produces a large positive fluctuation of the partition function.

We will consider mainly two classes of models: random pinning (or wetting) models and random copolymers at selective interfaces. In pinning models [2, 10, 13, 24, 27] the typical situation one has in mind is that of a directed path in (1 + d) dimensions, which receives a reward (or a penalty) at each intersection with a 1-dimensional region (a *defect line*, in the physical language) according to whether the charge present on the line at the intersection point is positive or negative. On the other hand the copolymer model, whose study was initiated in [14] in the theoretical physical literature (see [23] and references therein for updated physics developments) and in [5, 25] in the mathematical one, aims at modeling a (1 + 1)-dimensional, directed heteropolymer containing both hydrophobic and hydrophilic components, in the presence of an interface (the line S = 0 in the notations of Sect. 1.2) separating two solvents, situated in the upper and lower half-planes (S > 0 and S < 0). One solvent favors the hydrophilic components and the other favors the hydrophobic ones, i.e., if the charge of the n^{th} monomer is positive (negative), this monomer tends to be in the upper (lower) half-plane.

The main question one would like to answer is whether or not the interaction induces a localization of the polymer along the defect line or interface.

1.1. Random pinning and wetting models. Let $S := \{S_n\}_{n=0,1,\dots}$ be a homogeneous process on an arbitrary set that contains a point 0, with $S_0 = 0$ and law **P**. For $\beta \ge 0$, $h \in \mathbb{R}$ and $\omega = \{\omega_n\}_{n=1,2,\dots} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, one introduces the probability measure

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) = \frac{1}{Z_{N,\omega}} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \left(\beta\omega_n - h\right) \mathbf{1}_{S_n=0}\right) \mathbf{1}_{S_N=0}.$$
 (1.1)

The choice of setting $S_N = 0$ is just for technical convenience, see Remark 1.1 below. Let us set $\tau_0 = 0$ and, for $i \in \mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$, $\tau_i = \inf \{n > \tau_{i-1} : S_n = 0\}$ if $\tau_{i-1} < +\infty$ and $\tau_i = +\infty$ if $\tau_{i-1} = +\infty$. We assume that $\tau := \{\tau_i\}_i$ is the sequence of partial sums of an IID sequence of random variables taking values in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ with discrete density $K(\cdot)$:

$$K(n) = \mathbf{P}(\tau_1 = n). \tag{1.2}$$

This is of course the case if *S* is a Markov chain and for definiteness one should keep this case in mind. In order to avoid trivialities, we assume that $K(\infty) < 1$ and for the model to be defined we assume also that there exists $s \in \mathbb{N}$ such that $\mathbf{P}(S_N = 0) > 0$ for every $N \in s\mathbb{N}$. Therefore, starting with (1.1), we always implicitly assume that $N \in s\mathbb{N}$, when *N* is the length of the polymer.

Moreover the cases we will consider are such that there exist $\alpha \ge 1$ such that

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log K(sn)}{\log n} \ge -\alpha, \tag{1.3}$$

and K(n) = 0 if $n \notin s\mathbb{N}$. We advise the reader who feels uneasy with the weak requirement (1.3) to focus on the case of K(n) behaving like $n^{-\alpha}$, possibly times a *slowly* varying function (see Appendix 3.2). Note that, for $\alpha < 2$, the return times to zero of

S are not integrable. We stress that we have introduced *s* to account for the possible periodicity of *S*: of course the most natural example is that of the simple random walk on \mathbb{Z} , $\mathbf{P}(S_i - S_{i-1} = 1) = \mathbf{P}(S_i - S_{i-1} = -1) = 1/2$ and $\{S_i - S_{i-1}\}_i$ IID, for which (1.3) holds with s = 2 and $\alpha = 3/2$ [11, Ch. III]. Another example is that of the simple random walk on \mathbb{Z}^d , $d \ge 2$: in this case, $\alpha = d/2$.

We can rewrite $Z_{N,\omega}$, and in fact the model itself, in terms of the sequence τ : the partition function in (1.1) is

$$Z_{N,\omega} := \mathbf{E} \left[\exp \left(\mathcal{H}_{N,\omega}(S) \right); \ \tau_{\mathcal{N}_N} = N \right], \tag{1.4}$$

with $\mathcal{N}_N := \sup\{i : \tau_i \leq N\}$ and

$$\mathcal{H}_{N,\omega}(S) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_N} \left(\beta \omega_{\tau_i} - h \right).$$
(1.5)

The disordered pinning model, which we consider here, is obtained assuming that the sequence ω is chosen as a typical realization of an IID sequence of random variables with law \mathbb{P} , still denoted by $\omega = \{\omega_n\}_n$. We assume finiteness of exponential moments:

$$\mathbb{E}[\exp(t\omega_1)] < \infty, \tag{1.6}$$

for $t \in \mathbb{R}$ and, without loss of generality, $\mathbb{E} \omega_1 = 0$ and $\mathbb{E} \omega_1^2 = 1$. Further assumptions on \mathbb{P} will be formulated in Sect. 2, where we state our main results.

Under the above assumptions on the disorder the *quenched free energy* of the model exists, namely the limit

$$F(\beta, h) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}, \qquad (1.7)$$

exists $\mathbb{P}(d\omega)$ –almost surely and in the \mathbb{L}^1 (\mathbb{P}) sense. The existence of this limit can be proven via standard super-additivity arguments based on Kingman's sub-additive ergodic theorem [22] (we refer for example to [2, 5, 16] for details). This approach yields also automatically the so-called *self-averaging* property of the free energy, that is the fact that $F(\beta, h)$ is non-random. A simple but fundamental observation is that

$$F(\beta, h) \ge 0. \tag{1.8}$$

The proof of such a result is elementary:

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_{N,\omega} \ge \frac{1}{N}\mathbb{E}\log \mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_N} \left(\beta\omega_{\tau_i} - h\right)\right); \tau_1 = N\right]$$
(1.9)

$$= \frac{1}{N} (\beta \mathbb{E}[\omega_N] - h) + \frac{1}{N} \log \mathbf{P}(\tau_1 = N) \xrightarrow{N \to \infty} 0, \quad (1.10)$$

where we have used assumption (1.3). The proof of (1.8) suggests the following partition of the parameter space (or *phase diagram*):

- The localized region: $\mathcal{L} = \{(\beta, h) : F(\beta, h) > 0\};$
- The delocalized region: $\mathcal{D} = \{(\beta, h) : F(\beta, h) = 0\}.$

We set $h_c(\beta) := \sup\{h : F(\beta, h) > 0\}$, and we will call $h_c(\beta)$ the *critical point*. Since $F(\beta, \cdot)$ is not increasing and continuous, $\mathcal{D} = \{(\beta, h) : h \ge h_c(\beta)\}$. It is rather easy to see that $|h_c(\beta)| < \infty$, see e.g., [2] and [16].

Remark 1.1. It would be of course as natural to consider the model with partition function $Z_{N,\omega}^{f} := \mathbf{E} \left[\exp \left(\mathcal{H}_{N,\omega}(S) \right) \right]$. It is therefore worth to stress that by standard arguments, see e.g. [16], one sees that

$$Z_{N,\omega} \leq Z_{N,\omega}^{f} \leq \max_{\substack{n \in s \mathbb{N}: \\ n \leq N}} \frac{\sum_{j=n}^{\infty} K(j)}{K(n)} \exp\left(|\beta\omega_{N} - h|\right) Z_{N,\omega}$$
$$\leq \frac{1}{\min_{\substack{n \in s \mathbb{N}: \\ n \leq N}} K(n)} \exp\left(|\beta\omega_{N} - h|\right) Z_{N,\omega}, \tag{1.11}$$

uniformly in $N \in s\mathbb{N}$ and ω . In particular, by (1.3), the free energy is unaffected by the presence of the constraint $\tau_{\mathcal{N}_N} = N$: we stick to the constrained case because it simplifies some technical steps of the proofs.

Remark 1.2. For ease of exposition we have used the generic denomination of *pinning model*, but our framework, as it is possibly clearer when the partition function is cast in the form (1.4), includes a variety of models, like for example the Poland–Scheraga model of DNA denaturation, for which theoretical arguments on models with excluded volume interactions suggest a value of α larger than 2 [21]: note that whether the transition in the disordered case is of first or higher order is a crucial and controversial issue in the field, see for example [9, 8, 15]. We stress also that, since we can choose $K(\infty) > 0$, it is rather easy to see that also the disordered (1 + 1)-dimensional interface wetting models [10, 13] enter the general class we are considering.

It is known that the nonrandom case $\beta = 0$ is exactly solvable and that, according to the law of τ_1 , the transition at $h_c(0) = \log(1 - K(\infty))$ can be either of first or higher order. For completeness and to match our set-up, we give a quick self-contained analysis of this case in Appendix 3.2.

1.2. Random copolymers at a selective interface. In the case of the copolymer model, the natural setting is to assume, in addition, that the state space of the process $\{S_n\}_n$ is \mathbb{Z} , that the law **P** is invariant under the transformation $S \to -S$ and that $(S_i - S_{i-1}) \in \{-1, 0, +1\}$ for every $i \ge 1$. For instance, if $\{S_i - S_{i-1}\}_i$ is a sequence of IID variables then it is a classical result [12, Ch. XII.7] that $K(n) = c(1+o(1))n^{-3/2}$, for large values of $n \in s\mathbb{N}$ (so $\alpha = 3/2$): c is a constant that can be expressed in terms of $\mathbf{P}(S_1 - S_0 = 0)$ and of course s = 1 unless $\mathbf{P}(S_1 - S_0 = 0) = 0$. The copolymer model is defined introducing

$$\mathcal{H}_{N,\omega}(S) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (\beta \omega_n + h) \operatorname{sign}(S_n), \qquad (1.12)$$

with the convention that sign(0) = +1, and the corresponding partition function

$$Z_{N,\omega} := \mathbf{E} \left[\exp \left(\mathcal{H}_{N,\omega}(S) \right); \ S_N = 0 \right].$$
(1.13)

We may assume without loss of generality that both β and *h* are nonnegative. The factor 1/2 in (1.12) is introduced just for convenience (see Sect. 3.2). As in Sect. 1.1, the corresponding random model is obtained by choosing ω as a realization of an IID sequence of centered random variables of unit variance and finite exponential moments. In analogy with (1.7) and (1.8), the limit

$$f(\beta, h) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}, \qquad (1.14)$$

exists $\mathbb{P}(d\omega)$ –almost surely and in the \mathbb{L}^1 (\mathbb{P}) sense and one can prove as in (1.9) that $F(\beta, h) := f(\beta, h) - h/2 \ge 0$. Therefore, also in this case we can partition the phase diagram into a localized and a delocalized phase, as

- The localized region: $\mathcal{L} = \{(\beta, h) : F(\beta, h) > 0\};$
- The delocalized region: $\mathcal{D} = \{(\beta, h) : F(\beta, h) = 0\}.$

Also in this case, we set $h_c(\beta) := \sup\{h : F(\beta, h) > 0\}$ and we observe that $\mathcal{D} = \{(\beta, h) : h \ge h_c(\beta)\}.$

Many results have been proven for copolymers at selective interfaces, but they are almost always about the case of simple random walks. However they can be extended in a rather straightforward way to the general case we consider here (we omit the details also because they are not directly pertinent to the content of this paper). Above all we have that $0 < h_c(\beta) < \infty$ for every $\beta > 0$. Even more, the explicit bounds carry over to the general *S* we consider here: the upper bound [5] is even independent of the choice of the law of *S*, while the lower bound [4] depends on α .

We take this opportunity to stress also that various results about path behavior in the two regions are available, both for the pinning problem and for the copolymer, and, once again, mostly in the simple random walk case $\alpha = 3/2$. For instance, it is known that in \mathcal{L} long excursions of the walk from the line S = 0 are exponentially suppressed and the fraction of sites where the polymer crosses the line remains nonzero in the thermodynamic limit (e.g., cf. [16, 25] and references therein, and [18]). On the other hand, in the interior of \mathcal{D} the number of intersections is, in a suitable sense, $O(\log N)$ [17] and, for the copolymer, the number of steps where $sign(S_n) = -1$ is also $O(\log N)$ [17].

2. Smoothing of the Depinning Transition

While the free energy can be proven to be infinitely differentiable with respect to all of its parameters in the region \mathcal{L} [18], no results are available about its regularity at the critical point, apart from the obvious fact that F is continuous since it is convex. The result of the present paper partly fills this gap, showing that the transition is at least of second order, as soon as disorder is present.

In order to state our main theorem, we need some further assumptions on the disorder variables ω . We will consider two distinct cases:

C1: *Bounded random variables*. The random variable ω_1 is bounded,

$$|\omega_1| \le M < \infty. \tag{2.1}$$

C2: Unbounded continuous random variables. The law of ω_1 has a density $P(\cdot)$ with respect to the Lebesgue measure on \mathbb{R} , and there exists $0 < R < \infty$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} P(y+x) \log\left(\frac{P(y+x)}{P(y)}\right) dy \le Rx^2$$
(2.2)

in a neighborhood of x = 0. This is true in great generality whenever $P(\cdot)$ is positive, for example when the disorder is Gaussian and, more generally, whenever $P(\cdot) = \exp(-V(\cdot))$, with $V(\cdot)$ a polynomial bounded below.

Then, one has:

Theorem 2.1. Under Condition C1 or C2, both for the copolymer and for the pinning model, for every $0 < \beta < \infty$ there exists $0 < c(\beta) < \infty$, possibly depending on \mathbb{P} , such that for every $1 \le \alpha < \infty$,

$$F(\beta, h) \le \alpha c(\beta) (h_c(\beta) - h)^2$$
(2.3)

if $h < h_c(\beta)$.

Although the above result, coupled of course with (1.8), seems to be in the same spirit as the rounding effect proven by Aizenman and Wehr [1] for the two-dimensional Random Field Ising Model, the physical mechanisms of smoothing are deeply different in the two cases. While [1] is based on a rigorous version of the Imry-Ma argument [20] (i.e., a comparison between the effect of boundary conditions and of disorder fluctuations in the bulk due to the random magnetic field) in our case the boundary conditions play no role at all and everything is based on an energy-entropy argument inspired by [4].

Remark 2.2. It is important to observe that, as explained in Appendix 3.2, in the pinning case the deterministic model, $\beta = 0$, has a *first order phase transition* whenever $\sum_{n \in \mathbb{N}} nK(n) < +\infty$ [2], in particular when $\alpha > 2$. Theorem 2.1 therefore shows that the disorder has really a smoothing effect on the transition. But more than that is true: for $\alpha \in (3/2, 2)$, F(0, h) at $h_c(0)$ is strictly less regular than F(β , h) at $h_c(\beta)$. In fact F(0, h) > $(h_c(0) - h)^{2-\delta}$ for $\delta \in (0, (2\alpha - 3)/(\alpha - 1))$ and small values of $h_c(0) - h > 0$ (for sharper results, see Appendix 3.2). Notice that this is in agreement with the so-called *Harris criterion* [19], which predicts that arbitrarily weak disorder modifies the nature of a second-order phase transition as soon as the critical exponent of the specific heat in the pure case is positive. In the present situation, this condition corresponds just to $\alpha > 3/2$. The Harris criterion also predicts that the critical behavior does not change if $\alpha < 3/2$, which is compatible with Theorem 2.1. Rigorous work connected to the Harris criterion, in the Ising model context, may be found in [7].

As one realizes easily from the proof of Theorem 2.1 given in Sect. 3, the constant $c(\beta)$ in (2.3) can be very large (of order $O(\beta^{-2})$) for β small. This is rather intuitive: for $\beta \rightarrow 0$ one approaches the deterministic situation, where the transition can be of first order.

Remark 2.3. In the theoretical physics literature, the (de)localization transition is claimed to be in some cases of order higher than two [28], or even of infinite order [27, 23]. The method we present here, which is rather insensitive to the details of the model, does not allow to prove more than second order in general. It is likely that finer results require model-specific techniques.

Remark 2.4. A generalized model: copolymers with adsorption. It is also possible to consider copolymer models with an additional pinning interaction [26], as

$$\mathcal{H}_{N,\omega,\tilde{\omega}}(S) = \sum_{n=1}^{N} (\beta_1 \omega_n - h_1) \mathbf{1}_{S_n = 0} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (\beta_2 \widetilde{\omega}_n - h_2) \operatorname{sign}(S_n).$$
(2.4)

Here, both ω and $\tilde{\omega}$ are sequences of IID centered random variables with unit variance and finite exponential moments. In addition, one assumes ω to be independent from $\tilde{\omega}$. This model corresponds to the situation where the interface between the two solvents is not neutral. While for simplicity we will not present details for this model, we sketch here what happens in this case. In analogy with the previous models, one can partition the phase diagram (i.e., the space of the parameters $\beta_1, h_1, \beta_2, h_2$) into a localized and a delocalized region, separated by a *critical surface*. In this case, Theorem 2.1 is easily generalized to give that the free energy $F(\beta_1, h_1, \beta_2, h_2)$ has continuous first derivatives with respect to h_1, h_2 when these parameters approach the critical surface from the localized region.

3. Proof of the Smoothing Effect

3.1. The pinning case. In this section we prove Theorem 2.1 for the pinning case, and in the next one we explain how the proof can be immediately extended to the copolymer model.

The key idea, in analogy with [17], is to introduce a new free energy where the fraction of sites where the polymer comes back to zero is fixed. In other words, recalling that

$$\mathcal{N}_N = |\{1 \le n \le N : S_n = 0\}| \tag{3.1}$$

one introduces, for $m \in [0, 1]$,

$$\begin{split} \phi(\beta,m) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \hat{Z}_{N,\omega}(\beta;m,\varepsilon) \\ &:= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \mathbf{E} \left(e^{\beta \sum_{n=1}^{N} \omega_n \mathbf{1}_{S_n=0}} \mathbf{1}_{(\mathcal{N}_N/N) \in [m-\varepsilon,m+\varepsilon]} \mathbf{1}_{S_N=0} \right). \end{split}$$
(3.2)

Note that the limit is well defined, since $\mathbb{E} \log \hat{Z}_{N,\omega}(\beta; m, \varepsilon)$ is super-additive in N, thanks to the IID assumption on the increments of the sequence of return times τ , and non-increasing for $\varepsilon \searrow 0$. Therefore the limit $\phi_{\varepsilon}(\beta, m)$ of $(1/N)\mathbb{E} \log \hat{Z}_{N,\omega}(\beta; m, \varepsilon)$, as $N \to \infty$, exists, as well as the second limit $\phi_{\varepsilon}(\beta, m) \searrow \phi(\beta, m)$ as $\varepsilon \searrow 0$. Notice moreover that (3.2) holds also without taking the expectation, as for $(1/N) \log Z_{N,\omega}$: in this case of course the limit $N \to \infty$ has to be taken in the $\mathbb{P}(d\omega)$ –a.s. sense. Moreover, it is immediate to realize that $\phi(\beta, 0) = 0$ and that

$$\phi(\beta, m) \le F(\beta, 0) \le \beta, \tag{3.3}$$

so that $\phi(\beta, m)$ is always bounded above. Finally, always thanks the IID property of the differences of successive return times to zero, it is easy to show that $\phi(\beta, \cdot)$ is concave:

$$\phi(\beta, m) \ge x\phi(\beta, m_1) + (1 - x)\phi(\beta, m_2) \tag{3.4}$$

if $0 \le x \le 1$ and $m = xm_1 + (1 - x)m_2$. By exploiting the $\mathbb{P}(d\omega)$ –a.s. convergence of $(1/N) \log \hat{Z}_{N,\omega}(\beta; m, \varepsilon)$ to the nonrandom limit $\phi_{\varepsilon}(\beta, m)$ and the subsequent convergence for $\varepsilon \searrow 0$, one deduces that $F(\beta, h)$ and $\phi(\beta, m)$ are related by a Legendre transform:

$$F(\beta, h) = \sup_{m \in [0, 1]} (\phi(\beta, m) - hm).$$
(3.5)

In turn, this allows to identify $h_c(\beta)$ in terms of $\phi(\beta, \cdot)$ as

$$h_{c}(\beta) = \inf \left\{ h : \sup_{m \in [0,1]} (\phi(\beta, m) - hm) = 0 \right\}.$$
 (3.6)

The key technical step in the proof of Theorem 2.1 is the following:

Theorem 3.1. Under Condition C1 or C2, for every $0 < \beta < \infty$ there exists $0 < C(\beta) < \infty$ such that, for every $1 \le \alpha < \infty$,

$$\phi(\beta, m) - h_c(\beta)m \le -\frac{C(\beta)}{\alpha}m^2$$
(3.7)

if $0 \le m \le 1$.

Proof of Theorem 2.1. It is an immediate consequence of Theorem 3.1 and (3.5). In fact, by (3.7) we have

$$\phi(\beta, m) - hm \le -\frac{C(\beta)}{\alpha}m^2 + (h_c(\beta) - h)m, \qquad (3.8)$$

for every $m \in [0, 1]$. Taking the supremum over *m* on both sides of (3.8), by (3.5) we obtain

$$F(\beta, h) \leq \sup_{m \in [0,1]} \left(-\frac{C(\beta)}{\alpha} m^2 + (h_c(\beta) - h)m \right)$$

$$\leq \sup_{m \geq 0} \left(-\frac{C(\beta)}{\alpha} m^2 + (h_c(\beta) - h)m \right) = \frac{\alpha}{4C(\beta)} (h_c(\beta) - h)^2. \quad (3.9)$$

We go now to the proof of Theorem 3.1. We will consider first the case in which ω_1 satisfies condition **C2**, because it technically lighter. The two cases differ only in the first part of the proof (that is, up to Remark 3.2 below), where the probability of a rare event is estimated from below by changing the law of the disorder and by evaluating the corresponding relative entropy price. In the case of **C2** it is sufficient to *shift* (i.e. to *translate*) the distribution of the disorder variables, and the relative entropy estimate implied by (2.2) fits well the rest of the proof. Under Assumption **C1**, instead, we have to *tilt* the law of ω and the arising expressions need to be re-worked, see Lemma 3.4 below, before stepping to the second part of the proof.

Proof of Theorem 3.1 under Assumption C2. Due to the concavity of $\phi(\beta, \cdot)$, it is enough to prove (3.7) for $0 < m \le c_1$, with $c_1 = c_1(\beta) > 0$, not depending on α . We define

$$\gamma(\beta,m) := -\phi(\beta,m) + h_c(\beta)m + c_2 \frac{\beta^2 m^2}{\alpha} > 0, \qquad (3.10)$$

where $c_2 > 0$ is a constant depending only on \mathbb{P} , which will be chosen later. We stress that the term containing c_2 has been added simply because a priori one knows only that $-\phi(\beta, m) + h_c(\beta)m \ge 0$, cf. (3.6), and it turns out to be technically practical to work with $\gamma(\beta, m) > 0$. For $\ell \in s\mathbb{N}$ we define also

$$A_{\ell,m,\varepsilon} = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{\ell} : \log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta;m,\varepsilon) - h_c(\beta)m\ell \ge \gamma(\beta,m)\ell \right\}.$$
 (3.11)

Moreover for $0 < m \le c_1$, we let $\widetilde{\mathbb{P}}$ be the law obtained from \mathbb{P} shifting the distribution of $\omega_1, \ldots, \omega_\ell$ so that

$$\widetilde{\mathbb{E}}[\omega_j] = 8 \frac{\gamma(\beta, m)}{\beta m}.$$
(3.12)

Note that

$$\lim_{m \to 0} \gamma(\beta, m)/m = 0, \tag{3.13}$$

since otherwise, by convexity of $\gamma(\beta, \cdot)$, one has $\gamma(\beta, m) \ge \epsilon m$ for for some $\epsilon > 0$ and every *m*, that is $F(\beta, h_c(\beta) - \epsilon) = 0$, which is in contrast with the definition of $h_c(\beta)$.

We now show that the event

$$E := \left\{ \omega : (\omega_1, \dots, \omega_\ell) \in A_{\ell, m, \varepsilon} \right\},\tag{3.14}$$

becomes $\widetilde{\mathbb{P}}$ -typical for ℓ large.

We first observe that, thanks to the constraint $N_{\ell}/\ell \ge m - \varepsilon$, and assuming that $\varepsilon \le m/2$, one has

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{1}{\ell}\log\hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta;m,\varepsilon) - h_{c}(\beta)m\right)$$

$$\geq 4\gamma(\beta,m) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{\ell}\log\hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta;m,\varepsilon) - h_{c}(\beta)m\right).$$
(3.15)

By (3.2) and (3.10), there exist $\varepsilon_0(m) > 0$ and $\ell_0(\varepsilon, m) \in s\mathbb{N}$ such that

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{1}{\ell}\log\hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta;m,\varepsilon) - h_c(\beta)m\right) \ge 2\gamma(\beta,m),\tag{3.16}$$

for $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \ell \geq \ell_0$. This in turn implies that

$$\widetilde{\mathbb{P}}(E) \ge \widetilde{\mathbb{P}}\left(\log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon) - \widetilde{\mathbb{E}}\log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon) \ge -\gamma(\beta, m)\ell\right), \quad (3.17)$$

which is greater than, say, 1/2 for ℓ sufficiently large, since $\gamma(\beta, m) > 0$ and (recall (3.2) and discussion following that formula)

$$\frac{1}{\ell} \log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon) - \frac{1}{\ell} \widetilde{\mathbb{E}} \log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon) \xrightarrow{\ell \to \infty} 0, \qquad (3.18)$$

in $\widetilde{\mathbb{P}}$ -probability.

The price of shifting \mathbb{P} to $\widetilde{\mathbb{P}}$ is directly estimated by using Assumption C2, cf. (2.2), and recalling (3.13): assuming that $m \leq c_1(\beta)$, with $c_1(\beta)$ sufficiently small, one obtains the estimate

$$H(\widetilde{\mathbb{P}}|\mathbb{P}) := \mathbb{E}\left(\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\log\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right) \le 64R\left(\frac{\gamma(\beta,m)}{\beta m}\right)^2 \ell, \qquad (3.19)$$

and by applying the relative entropy inequality

$$\log\left(\frac{\mathbb{P}(E)}{\widetilde{\mathbb{P}}(E)}\right) \ge -\frac{1}{\widetilde{\mathbb{P}}(E)} \left(\mathrm{H}(\widetilde{\mathbb{P}}|\mathbb{P}) + e^{-1}\right), \qquad (3.20)$$

we obtain

$$\widetilde{p} := \mathbb{P}(E) \ge \frac{1}{2} \exp\left(-128R\left(\gamma(\beta, m)/(\beta m)\right)^2 \ell\right), \qquad (3.21)$$

for large ℓ .

Remark 3.2. Inequality (3.20) holds whenever the measures $\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}}$ are absolutely continuous with respect to each other and for every event *E* of nonzero measure. It is a simple consequence of Jensen inequality: since $r \log r \ge -e^{-1}$ for every r > 0, one has

$$\log\left(\frac{\mathbb{P}(E)}{\widetilde{\mathbb{P}}(E)}\right) = \log\widetilde{\mathbb{E}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}\right|E\right) \ge \widetilde{\mathbb{E}}\left(\log\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}\right)\right|E\right)$$
$$= -\frac{1}{\widetilde{\mathbb{P}}(E)}\mathbb{E}\left(\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\log\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\mathbf{1}_{E}\right) \ge -\frac{1}{\widetilde{\mathbb{P}}(E)}\left(\mathbb{E}\left(\left.\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\log\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right) + e^{-1}\right),$$
(3.22)

which is just (3.20).

We now apply an energy–entropy argument similar to that of [4] which, in the present case, roughly consists in selecting only those polymer trajectories which visit the rare stretches where the disorder configuration is such to produce a sufficiently large positive fluctuation of the partition function. Of course the precise definition of these rare stretches is directly related to the event *E*. This selection strategy gives a lower bound on the free energy, which implies (3.7). More precisely, we consider a system of length $k\ell$, with $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in s\mathbb{N}$ and we divide it into blocks $B_j = \{j\ell + 1, j\ell + 2, ..., (j + 1)\ell\}$ of length ℓ , with j = 0, ..., k - 1. For a given realization of ω , we denote by $\mathcal{I}(\omega)$ the ordered set of nonnegative integers,

$$\mathcal{I}(\omega) = \{j_1, \dots, j_{|\mathcal{I}(\omega)|}\}$$

:= $\{0 \le j \le k - 1 : (\omega_{j\ell+1}, \dots, \omega_{(j+1)\ell}) \in A_{\ell,m,\varepsilon}\},$ (3.23)

where it is understood that $\varepsilon \leq \varepsilon_0(m)$, $\ell \geq \ell_0(m, \varepsilon)$ and $m \leq c_1$ as above, so that (3.21) holds. We bound the partition function $Z_{N,\omega}$ below by inserting in the average over the paths the constraint that $S_i \neq 0$ whenever $i \in B_j$ with $j \notin \mathcal{I}(\omega)$, that $S_i = 0$ whenever $i = j\ell$ or $i = (j+1)\ell$ with $j \in \mathcal{I}(\omega)$, and that, for every $j \in \mathcal{I}(\omega)$,

$$\frac{|\{i \in B_j : S_i = 0\}|}{\ell} \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon].$$
(3.24)

In this way, recalling the definition of $A_{\ell,m,\varepsilon}$ and assuming that $\varepsilon \leq \gamma(\beta, m)/(2|h_c(\beta)|)$, one obtains

$$\frac{1}{k\ell}\log Z_{k\ell,\omega}(\beta, h_c(\beta)) \ge \frac{1}{k}|\mathcal{I}(\omega)|\frac{\gamma(\beta, m)}{2} + \frac{1}{k\ell}\log \prod_{\substack{r=0,\dots,|\mathcal{I}(\omega)|:\\L_r\neq 0}} K(L_r), \quad (3.25)$$

where we recall that K(n) is the **P**-probability that first return to 0 of an excursion of the free process occurs at step n, as in (1.2), while L_r 's, the (possibly vanishing) lengths of the excursions of the process between two blocks B_i , $B_{i'}$ with $i, i' \in \mathcal{I}(\omega)$, are defined as

$$L_r = \ell |j_{r+1} - j_r - 1|, \qquad (3.26)$$

with the convention that $j_0 = -1$, $j_{|\mathcal{I}(\omega)|+1} = k$, see Fig. 1. Taking the expectation with respect to the disorder and using (1.3), one obtains then

$$\frac{1}{k\ell} \mathbb{E} \log Z_{k\ell,\omega}(\beta, h_c(\beta)) \ge \frac{\gamma(\beta, m)}{2} \widetilde{p} - \frac{2\alpha}{k\ell} \mathbb{E} \sum_{r=0}^{|\mathcal{I}(\omega)|} \mathbf{1}_{L_r \neq 0} \log L_r, \quad (3.27)$$

for ℓ sufficiently large. At this point, as in [4], one uses Jensen's inequality and the concavity of the logarithm to get

$$\frac{1}{k\ell} \mathbb{E} \log Z_{k\ell,\omega}(\beta, h_c(\beta)) \\
\geq \frac{\gamma(\beta, m)}{2} \widetilde{p} - \frac{2\alpha}{k\ell} \mathbb{E} \left[(|\mathcal{I}(\omega)| + 1) \log \left(\frac{\sum_{r=0}^{|\mathcal{I}(\omega)|} L_r}{|\mathcal{I}(\omega)| + 1} \right) \right] \\
\geq \frac{\gamma(\beta, m)}{2} \widetilde{p} - 2\alpha \mathbb{E} \left[\frac{(|\mathcal{I}(\omega)| + 1)}{k\ell} \log \left(\frac{k\ell}{|\mathcal{I}(\omega)| + 1} \right) \right].$$
(3.28)

Since the disorder variables in the distinct blocks $\{B_j\}_j$ are independent, the law of large numbers implies

$$\frac{|\mathcal{I}(\omega)|}{k} \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} \widetilde{p}, \tag{3.29}$$

 $\mathbb{P}(d\omega)$ –a.s., so that, recalling (3.21),

$$0 = F(\beta, h_{c}(\beta)) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k\ell} \mathbb{E} \log Z_{k\ell,\omega}(\beta, h_{c}(\beta))$$

$$\geq \tilde{p} \frac{\gamma(\beta, m)}{2} - \frac{2\alpha \tilde{p}}{\ell} \log \frac{\ell}{\tilde{p}}$$

$$\geq \tilde{p} \left(\frac{\gamma(\beta, m)}{2} - 256\alpha R \left(\frac{\gamma(\beta, m)}{\beta m} \right)^{2} - 2\alpha \frac{\log(2\ell)}{\ell} \right). \quad (3.30)$$

Since ℓ is arbitrary, one obtains

$$\gamma(\beta, m) \ge \frac{\beta^2 m^2}{512\alpha R},\tag{3.31}$$

which is the desired inequality and (3.7), provided that c_2 in (3.10) satisfies $c_2 < (512R)^{-1}$. \Box



Fig. 1. A typical trajectory contributing to the lower bound (3.25). In this example k = 22, $\ell = 8$, $\mathcal{I}(\omega) = \{4, 10, 17\}$. Note that $S_n \neq 0$ for *n* in a block B_j with $j \notin \{4, 10, 17\}$, except at the boundary with a block B_j with $j \in \{4, 10, 17\}$, since by construction $S_n = 0$ at the boundaries of these blocks. Inside B_j , $j \in \mathcal{I}(\omega)$, the path moves with relative freedom, but it is bound to touch the line S = 0 approximately $m\ell$ times (see the text for the choice of *m*)

Remark 3.3. It is easy to check that, in the Gaussian case $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, Theorem 2.1 holds with $c(\beta) = c_3\beta^{-2}$, c_3 a suitable positive constant. Indeed, in this case the estimate (2.2) holds for every $x \in \mathbb{R}$ (and R = 1/2) and therefore one can take $c_1 = 1$ in the proof of Lemma 3.1, so that (3.31) implies (3.7) with $C(\beta) = c_4\beta^2$. Of course, the same is true, up to constants, for every \mathbb{P} such that inequality (2.2) holds uniformly for $x \in \mathbb{R}$.

Proof of Theorem 3.1 under Assumption C1. The proof proceeds as in case C2, up to the definition of the law $\tilde{\mathbb{P}}$, but in this case the law obtained by shifting \mathbb{P} in general has an infinite entropy with respect to \mathbb{P} . Therefore, in this case we define $\tilde{\mathbb{P}}$ rather by tilting the law of the first ℓ variables:

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}(\omega) = \frac{1}{z^{\ell}} \exp\left(u \sum_{n=1}^{\ell} \omega_n\right),\tag{3.32}$$

where $u \ge 0$ will be chosen later and $z = z(u) = \mathbb{E} e^{u\omega_1}$. Let, for $\ell \in s\mathbb{N}$,

$$\psi_{\ell}(u) = \frac{1}{\ell} \widetilde{\mathbb{E}} \log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon)$$
(3.33)

and observe that

$$\psi_{\ell}(0) = \frac{1}{\ell} \mathbb{E} \log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon).$$

Then, one has

Lemma 3.4. There exist $u_0(\beta) > 0$ and $c_0(\beta) > 0$, possibly depending on \mathbb{P} , such that for every $0 < \beta < \infty$, $1 \le \alpha < \infty$ the following holds: for every $m \in (0, 1]$, if $\varepsilon \le m/2$ and $0 \le u \le u_0$ we have

$$\psi_{\ell}(u) - \psi_{\ell}(0) \ge c_0 \beta m u. \tag{3.34}$$

Lemma 3.4 will be proven below. To proceed with the proof of Theorem 3.1, we choose $u = 4\gamma(\beta, m)/(\beta m c_0)$ and notice that u is certainly smaller than u_0 if $m \le c_1(\beta)$ with c_1 sufficiently small (see (3.13)). Then, choosing $0 < m \le c_1$ and $\varepsilon \le m/2$, (3.34) implies that (3.15) is valid also in the present case. On the other hand, it is immediate to verify that (3.19) still holds, with R replaced by some $R'(\beta, M)$ and $\gamma(\beta, m)$ by $\gamma(\beta, m)/c_0$. The rest of the proof proceeds exactly as in the case **C2**.

Proof of Lemma 3.4. Note that

$$\partial_{u}\psi_{\ell}(u) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathbb{E}} \left[\omega_{i} \log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon) \right] - \ell \xi \,\psi_{\ell}(u), \qquad (3.35)$$

where $\xi = \xi(u) = \widetilde{\mathbb{E}} \omega_1$. The first term in the right-hand side of (3.35) can be rewritten (with some abuse of notation) as

$$\frac{\xi}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathbb{E}} \left[\log \hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon) \Big|_{\omega_i = 0} \right] + \frac{\beta}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathbb{E}} \left[\omega_i \int_0^{\omega_i} dy \, \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_i = 0}) \Big|_{\omega_i = y} \right]$$
$$= \ell \xi \psi_{\ell}(u) + \frac{\beta}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \widetilde{\mathbb{E}} \left[(\omega_i - \xi) \int_0^{\omega_i} dy \, \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_i = 0}) \Big|_{\omega_i = y} \right], \quad (3.36)$$

where

$$\hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\cdot) = \frac{\mathbf{E}\left[\cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\ell}} \beta \omega_{\tau_i}\right) \mathbf{1}_{S_{\ell}=0} \mathbf{1}_{(\mathcal{N}_{\ell}/\ell) \in [m-\varepsilon, m+\varepsilon]}\right]}{\hat{Z}_{\ell,\omega}(\beta; m, \varepsilon)}$$
(3.37)

and obviously the first term in (3.36) cancels the second one in the right-hand side of (3.35). Next, observe that the following identity holds:

$$\hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}=0})\Big|_{\omega_{i}=y} = \frac{e^{\beta(y-y')} \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}=0})\Big|_{\omega_{i}=y'}}{1 + (e^{\beta(y-y')} - 1) \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}=0})\Big|_{\omega_{i}=y'}}.$$
(3.38)

Now recall (2.1), so that it is sufficient to consider y and y' such that $|y - y'| \le 2M$, and from (3.38) we obtain

$$e^{-2\beta M} \left. \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_i=0}) \right|_{\omega_i=y'} \leq \left. \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_i=0}) \right|_{\omega_i=y} \\ \leq e^{+2\beta M} \left. \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_i=0}) \right|_{\omega_i=y'}.$$
(3.39)

We can use this inequality to bound below the last term in (3.36). We have in fact

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left.\omega_{i}\int_{0}^{\omega_{i}} \mathrm{d}y \; \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}=0})\right|_{\omega_{i}=y}\right] \geq e^{-2\beta M}\eta \; \widetilde{\mathbb{E}} \; \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}=0})\Big|_{\omega_{i}=0}$$
$$\geq e^{-4\beta M}\eta \; \widetilde{\mathbb{E}} \; \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}=0}),$$

where $\eta = \eta(u) = \widetilde{\mathbb{E}} \omega_1^2$, while

$$\widetilde{\mathbb{E}} \int_{0}^{\omega_{i}} \mathrm{d}y \, \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}}=0) \Big|_{\omega_{i}=y} \leq M e^{2\beta M} \widetilde{\mathbb{E}} \, \hat{\mathbf{E}}_{\ell,\omega}(\mathbf{1}_{S_{i}}=0).$$
(3.40)

Therefore, recalling the constraint $(\mathcal{N}_{\ell}/\ell) \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon]$ in the definition of $\hat{\mathbf{P}}_{\ell,\omega}(\cdot)$, one has the following lower bound:

$$\partial_u \psi_\ell(u) \ge \beta(m-\varepsilon)\eta e^{-4M\beta} - \beta(m+\varepsilon)\xi M e^{2\beta M}.$$
(3.41)

Now choose $\varepsilon \le m/2$ and notice that $\xi = u + O(u^2)$ for $u \ll 1$, while $\eta = 1 + O(u)$. Therefore, there exists $u_0(\beta, M) > 0$ such that, for $0 \le u \le u_0$ and for every *m*, the following holds:

$$\partial_u \psi_\ell(u) \ge \beta m \frac{e^{-4M\beta}}{4} - 2\beta m u M e^{2\beta M} \ge \beta m \frac{e^{-4M\beta}}{8} =: c_0 \beta m.$$
(3.42)

An integration in *u* concludes the proof of (3.34). \Box

3.2. The copolymer case. In order to prove Theorem 2.1 for the copolymer model (1.12), it is convenient to start from the observation that one can rewrite the limit free energy as

$$F(\beta, h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \mathbb{E} \left[\exp \left(-\sum_{n=1}^{N} (\beta \omega_n + h) \Delta_n \right) \mathbf{1}_{S_N = 0} \right], \quad (3.43)$$

where $\Delta_n = \mathbf{1}_{\operatorname{sign}(S_n)=-1}$. Comparing this expression for the copolymer free energy with (1.1), it is clear that in the present case the role of $\mathbf{1}_{S_n=0}$ is played by Δ_n . The proof then proceeds exactly like in the pinning case, with the only differences that in the definition (3.2) of $\phi(\beta, m)$ the constraint $(\mathcal{N}_N/N) \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon]$ has to be replaced by

$$\frac{|\{1 \le n \le N : \Delta_n = 1\}|}{N} \in [m - \varepsilon, m + \varepsilon]$$
(3.44)

and that, in the energy–entropy argument, the path is required to satisfy $S_i > 0$ (and not just $S_i \neq 0$) whenever $i \in B_j$ with $j \notin \mathcal{I}(\omega)$. This implies that K(L) in (3.25) has to be replaced by K(L)/2, which has the effect of adding a negative term of order $O(\tilde{p}/\ell)$ in the lower bound (3.30), which is negligible for ℓ sufficiently large.

Appendix A. The Non–Disordered Pinning Model

For $\beta = 0$, the free energy (1.7) may be identified explicitly with the following procedure. First we consider the equation

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) \exp(-bn) = \exp(h), \tag{A.1}$$

and we look for a solution b > 0, which exists only if $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) > \exp(h)$, in which case it is unique. Then if we set $\widetilde{K}(n) := \exp(-h - bn)K(n)$, $\widetilde{K}(\cdot)$ is a discrete probability density and one can write

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(-h\mathcal{N}_{N}\right); \tau_{\mathcal{N}_{N}}=N\right] = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{(\ell_{1},\dots,\ell_{j})\in\mathbb{N}^{j}: i=1\\\sum_{i=1}^{j}\ell_{i}=N}} \prod_{i=1}^{j} \exp(-h)K(\ell_{i})$$
$$= \exp\left(bN\right) \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{(\ell_{1},\dots,\ell_{j})\in\mathbb{N}^{j}: i=1\\\sum_{i=1}^{j}\ell_{i}=N}} \prod_{i=1}^{j} \widetilde{K}(\ell_{i}) =: \exp\left(bN\right) G_{N},$$
(A.2)

and one easily sees that G_N is the probability that the random walk which starts at 0 and takes positive integer IID jumps with law $\tilde{K}(\cdot)$ hits the site N. It is a classical fundamental result of renewal theory that $\lim_{N \to \infty} G_N = 1/\sum_{n \in \mathbb{N}} n \tilde{K}(n)$ [11, Ch. XIII]. This of course implies that b = F(0, h). On the other hand, if (A.1) admits no positive solution, by proceeding as in (A.1) and by setting simply $\tilde{K}(n) := \exp(-h)K(n)$, so that $\tilde{K}(\cdot)$ is a sub–probability density, one easily sees that F(0, h) = 0. So Eq. (A.1) contains all the information about the free energy.

Smoothing of the Depinning Transition

Let us then observe that (A.1) has a positive solution if and only if $h < \log(1 - K(\infty))$ and therefore $h_c(0) = \log(1 - K(\infty)) \le 0$ ($h_c(\beta)$ being defined before Remark 1.1). The behavior at criticality can be extracted from (A.1) in a rather straightforward way too, but of course we need to make precise the requirement on $K(\cdot)$ beyond the lower bound (1.3):

 The case Σ := ∑_{n∈ℕ} nK(n) < ∞. This is a necessary and sufficient condition for the transition to be of first order. More precisely, for Σ ∈ (0, ∞]

$$F(0,h) = \frac{\exp(h_c(0))}{\Sigma} (h_c(0) - h) + o((h_c(0) - h)), \quad \text{for } h \nearrow h_c(0).$$
(A.3)

Formula (A.3) follows since by Dominated Convergence if $\Sigma < \infty$ then

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) \exp(-bn) = \exp(h_c(0)) - b\Sigma + o(b)$$
(A.4)

for $b \searrow 0$, while by a direct estimate $\lim_{b \searrow 0} b^{-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} K(n)[1 - \exp(-bn)] = \infty$ if $\Sigma = \infty$. Note that the condition $\Sigma < \infty$ holds, in particular, in the case where

$$K(n) = L(n)/n^{\alpha} \tag{A.5}$$

for large $n \in s\mathbb{N}$, with $\alpha > 2$ and $L(\cdot)$ a function varying slowly at infinity, i.e., a positive function such that $\lim_{r\to\infty} L(xr)/L(r) = 1$ for every x > 0 (see [3] for more details on slowly varying functions).

• The case $\Sigma = \infty$. We set $\overline{K}(n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} K(n)$ (by this we mean the sum over $j \in \mathbb{N}$ such that j > n: $K(\infty)$ is not included in the sum) and assume that

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{K}(j) = \widehat{L}(N) N^{2-\alpha},$$

for some function $\widehat{L}(\cdot)$ which is slowly varying at infinity. This is true, in particular, in the case (A.5). By the easy (Abelian) part of the classical Tauberian Theorem [12, Ch.XIII.5, Theorem 2] we have that $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-bn)\overline{K}(n) = c'b^{\alpha-2}\widehat{L}(1/b)(1+o(1))$ as $b \searrow 0$, with $c' = c'(\alpha) > 0$. Therefore

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-bn} K(n) = \overline{K}(0) + \left(e^{-b} - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-bn} \overline{K}(n)$$
$$= \overline{K}(0) - c' b^{\alpha - 1} \widehat{L}(1/b)(1 + o(1)), \tag{A.6}$$

and

$$F(0,h) = (h_c(0) - h)^{1/(\alpha - 1)} \widetilde{L} (1/(h_c(0) - h)), \text{ for } h \nearrow h_c(0), \quad (A.7)$$

with $\tilde{L}(\cdot)$ a slowly varying function (see [3, (1.5.1) and Theorem 1.5.12]). It is therefore clear that the transition is of second order for $\alpha \in (3/2, 2]$ (we emphasize, for the case $\alpha = 2$, that we are assuming that $\Sigma = +\infty$) and it is of higher order for $\alpha < 3/2$. The value $\alpha = 3/2$ is borderline and the order of the transition depends then on the slowly varying function $\hat{L}(\cdot)$. In the case of one dimensional symmetric random walks with IID increments taking values in $\{-1, 0, +1\}$, $\alpha = 3/2$ and L(n) = c(1 + o(1))for *n* large, *c* a positive constant, and therefore the transition is really of second order and not higher. Acknowledgement. We would like to thank Bernard Derrida, Thomas Garel, Cécile Monthus and David Mukamel for interesting discussions. This research has been conducted in the framework of the GIP-ANR project JC05_42461 (POLINTBIO).

References

- 1. Aizenman, M., Wehr, J.: Rounding effects of quenched randomness on first-order phase transitions. Community Math. Phys. 130, 489-528, (1990)
- 2. Alexander, K. S., Sidoravicius, V.: Pinning of polymers and interfaces by random potentials. preprint (2005). http://arxiv.org/list/math.PR/0501028, 2005
- 3. Bingham, N. H., Goldie, C. M., Teugels, J. L.: Regular Variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
- 4. Bodineau, T., Giacomin, G.: On the localization transition of random copolymers near selective interfaces. J. Stat. Phys. 117, 801-818, (2004)
- 5. Bolthausen, E., den Hollander, F.: Localization transition for a polymer near an interface. Ann. Probab. 25, 1334-1366, (1997)
- 6. Bovier, A., Külske, C.: There are no nice interfaces in (2+1)-dimensional SOS models in random media. J. Stat. Phys. 83, 751-759, (1996)
- 7. Chayes, J. T., Chayes, L., Fisher, D. S., Spencer, T.: Correlation Length Bounds for Disordered Ising Ferromagnets. Commun. Math. Phys. 120, 501-523 (1989)
- 8. Coluzzi, B.: Numerical study on a disordered model for DNA denaturation transition. Phys. Rev. E. 73, 011911, (2006)
- 9. Cule, D., Hwa, T.: Denaturation of heterogeneous DNA. Phys. Rev. Lett. 79, 2375–2378, (1997)
- 10. Derrida, B., Hakim, V., Vannimenius, J.: Effect of disorder on two-dimensional wetting. J. Stat. Phys. 66, 1189–1213 (1992)
- 11. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. Vol. I, Third edition, New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1968
- 12. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. Vol. II, Second edition, New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1971
- 13. Forgacs, G., Luck, J. M., Th. Nieuwenhuizen, M., Orland, H.: Wetting of a Disordered Substrate: Exact Critical behavior in Two Dimensions. Phys. Rev. Lett. 57, 2184-2187, (1986)
- 14. Garel, T., Huse, D. A., Leibler, S., Orland, H.: Localization transition of random chains at interfaces. Europhys. Lett. 8, 9-13, (1989)
- 15. Garel, T., Monthus, C.: Numerical study of the disordered Poland–Scheraga model of DNA denaturation. J. Stat. Mech., Theory and Experiments (2005), P06004
- 16. Giacomin, G.: Localization phenomena in random polymer models. Preprint, 2004; Available online: http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/giacomin/pub/publicat.html, 2004
- 17. Giacomin, G., Toninelli, F. L.: Estimates on path delocalization for copolymers at selective interfaces. Probab. Theor. Rel. Fields 133, 464-482, (2005)
- 18. Giacomin, G., Toninelli, F. L.: The localized phase of disordered copolymers with adsorption. ALEA 1, 149-180, (2006)
- 19. Harris, A. B.: Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models. J. Phys. C 7, 1671–1692, (1974)
- 20. Imry, Y., Ma, S.-K.: Random-Field Instability of the Ordered State of Continuous Symmetry. Phys. Rev. Lett. 35, 1399-1401, (1975)
- 21. Kafri, Y., Mukamel, D., Peliti, L.: Why is the DNA denaturation transition first order? Phys. Rev. Lett. 85, 4988–4991, (2000)
- 22. Kingman, J. F. C.: Subadditive ergodic theory. Ann. Probab. 1, 882–909, (1973)
- 23. Monthus, C.: On the localization of random heteropolymers at the interface between two selective solvents. Eur. Phys. J. B 13, 111-130, (2000)
- 24. Petrelis, N.: Polymer pinning at an interface. Preprint, 2005; available on: http://arxiv.org/list/math. PR/0504464, 2005
- 25. Sinai, G., Ya.: A random walk with a random potential. Theory Probab. Appl. 38, 382–385, (1993)
- 26. Soteros, C. E., Whittington, S. G.: The statistical mechanics of random copolymers. J. Phys. A: Math. Gen. 37, R279-R325, (2004)
- 27. Tang, L.-H., Chaté, H.: Rare-Event Induced Binding Transition of Heteropolymers. Phys. Rev. Lett. 86, 830-833, (2001)
- 28. Trovato, T., Maritan, A.: A variational approach to the localization transition of heteropolymers at interfaces. Europhys. Lett. 46, 301-306, (1999)

Communicated by H. Spohn

A Replica-Coupling Approach to Disordered Pinning Models

Fabio Lucio Toninelli

Université de Lyon, Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR 5672, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon, France. E-mail: fitonine@ens-lyon.fr

Received: 5 February 2007 / Accepted: 11 October 2007 Published online: 28 March 2008 – © Springer-Verlag 2008

Abstract: We consider a renewal process $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \ldots\}$ on the integers, where the law of $\tau_i - \tau_{i-1}$ has a power-like tail $\mathbf{P}(\tau_i - \tau_{i-1} = n) = n^{-(\alpha+1)}L(n)$ with $\alpha \ge 0$ and $L(\cdot)$ slowly varying. We then assign a random, *n*-dependent reward/penalty to the occurrence of the event that the site *n* belongs to τ . In such generality this class of problems includes, among others, (1 + d)-dimensional models of pinning of directed polymers on a one-dimensional random defect, (1 + 1)-dimensional models of wetting of disordered substrates, and the Poland-Scheraga model of DNA denaturation. By varying the average of the reward, the system undergoes a transition from a *localized phase*, where τ occupies a finite fraction of \mathbb{N} to a *delocalized phase*, where the density of τ vanishes. In absence of disorder (i.e., if the reward is independent of n), the transition is of first order for $\alpha > 1$ and of higher order for $\alpha < 1$. Moreover, for α ranging from 1 to 0, the transition ranges from first to infinite order. Presence of even an arbitrarily small (but extensive) amount of disorder is known to modify the order of transition as soon as $\alpha > 1/2$ [11]. In physical terms, disorder is relevant in this situation, in agreement with the heuristic Harris criterion. On the other hand, for $0 < \alpha < 1/2$ it has been proven recently by K. Alexander [2] that, if disorder is sufficiently weak, critical exponents are not modified by randomness: disorder is irrelevant. In this work, generalizing techniques which in the framework of spin glasses are known as *replica coupling* and *interpolation*, we give a new, simpler proof of the main results of [2]. Moreover, we (partially) justify a small-disorder expansion worked out in [9] for $\alpha < 1/2$, showing that it provides a free energy upper bound which improves the annealed one.

1. Introduction

Consider a (recurrent or transient) Markov chain $\{S_n\}_{n\geq 0}$ started from a particular point, call it 0 by convention, of the state space Σ . Assume that the distribution of the interarrival times to the state 0 has a power-like tail: if $\tau := \{n \ge 0 : S_n = 0\}$, we require $\mathbf{P}(\tau_i - \tau_{i-1} = n) \simeq n^{-\alpha-1}$ for *n* large (see Eq. (2.1) below for precise definitions and conditions). This is true, for instance, if *S* is the simple random walk (SRW) in $\Sigma = \mathbb{Z}^d$, in which case $\alpha = 1/2$ for d = 1 and $\alpha = d/2 - 1$ for $d \ge 2$. One may naturally think of $\{(n, S_n)\}_{n\ge 0}$ as a directed polymer configuration in $\Sigma \times \mathbb{N}$. We want to model the situation where the polymer interacts with the one-dimensional defect line $\{0\} \times \mathbb{N}$. To this purpose, we introduce the Hamiltonian

$$\mathcal{H}_N(S) = -\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \mathbf{1}_{S_n=0},\tag{1.1}$$

which gives a reward (if $\varepsilon_n > 0$) or a penalty (if $\varepsilon_n < 0$) to the occurrence of a polymer-line contact at step *n*. Typically, we have in mind the situation where $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of IID (possibly degenerate) random variables. Let *h* and β^2 be the average and variance of ε_n , respectively. Varying *h* at β fixed, the system undergoes a phase transition: for $h > h_c(\beta)$ the Boltzmann average of the contact fraction $\ell_N := |\{1 \le n \le N : S_n = 0\}|/N$ converges almost surely to a positive constant, call it $\ell(\beta, h)$, for $N \to \infty$ (localized phase), while for $h < h_c(\beta)$ it converges to zero (delocalized phase). Models of this kind are employed in the physics literature to describe, for instance, the interaction of (1 + 1)-dimensional interfaces with disordered walls [6], of flux lines with columnar defects in type-II superconductors [17], and the DNA denaturation transition in the Poland-Scheraga approximation [5].

In absence of disorder ($\beta = 0$) it is known that the transition is of first order ($\ell(0, h)$) has a discontinuity at $h_c(0)$ if $\alpha > 1$, while for $0 \le \alpha < 1$ the transition is continuous: in particular, $\ell(0, h)$ vanishes like $(h - h_c(0))^{(1-\alpha)/\alpha}$ for $h \searrow h_c(0)$ if $0 < \alpha < 1$ and faster than any power of $(h - h_c(0))$ if $\alpha = 0$. For $\alpha = 1$, finally, transition can be either continuous or discontinuous, depending on the slowly varying function $L(\cdot)$ in (2.1). An interesting question concerns the effect of disorder on the nature of the transition. In terms of the non-rigorous Harris criterion, disorder is believed to be irrelevant for $\alpha < 1/2$ and relevant for $\alpha > 1/2$, where "relevance" refers to the property of changing the critical exponents. The question of disorder relevance in the (so called "marginal") case $\alpha = 1/2$ is not settled yet, even on heuristic grounds. Recently, rigorous methods have allowed to put this belief on firmer ground. In particular, in Refs. [11,12] it was proved that, for every $\beta > 0$, $\alpha > 0$ and h sufficiently close to (but larger than) $h_{c}(\beta)$, one has $\ell(\beta, h) \leq (1 + \alpha)c(\beta)(h - h_c(\beta))$, for some $c(\beta) < \infty$. This result, compared with the critical behavior mentioned above of the non-random model, proves relevance of disorder for $\alpha > 1/2$, since $1 > (1 - \alpha)/\alpha$. On the other hand, in a recent remarkable work K. Alexander showed [2] that the opposite is true for $0 < \alpha < 1/2$: if disorder is sufficiently weak, $\ell(\beta, h)$ vanishes like $(h - h_c(\beta))^{(1-\alpha)/\alpha}$ as in the homogeneous model. Moreover, the critical point $h_{c}(\beta)$ coincides, always for β small and $0 < \alpha < 1/2$, with the critical point $h_c^a(\beta)$ of the corresponding *annealed model* (cf. Sect. 2). Always in [2], for $1/2 \le \alpha < 1$ it was proven that the ratio $h_c(\beta)/h_c^a(\beta)$ converges to 1 for $\beta \searrow 0$. This, on the other hand, is expected to be false for $\alpha > 1$.

The purpose of this work is twofold. Firstly, we present a method which allows to re-obtain the main results of [2] in a simpler way. Secondly, we show that the well known inequality between quenched and annealed free energies is strict as soon as the annealed model is localized and $\beta > 0$. Moreover, we prove that a small-disorder expansion for the quenched free energy, worked out in [9] for $0 \le \alpha < 1/2$, provides at least a free energy upper bound.

As far as the first point is concerned, our strategy is a generalization of techniques which in the domain of mean field spin glasses are known as *replica coupling* [18,15]

and *interpolation*. These methods had a remarkable impact on the understanding of spin glasses in recent years (see, e.g., [16, 14, 1, 19]). In particular the "quadratic replica coupling" method, introduced in [15], gives a very efficient control of the Sherrington-Kirkpatrick model at high temperature (β small), i.e., for weak disorder, which is the same situation we are after here. Our method is not unrelated to that of [2]: the two share the idea that the basic object to look at is the law of the intersection of two independent copies of the renewal τ . However, our strategy allows to bypass the need of performing refined second-moment computations on a suitably truncated partition function as in [2] and gives, in the case of Gaussian disorder, particularly neat proofs.

In the rest of the paper, we will forget the polymer-like interpretation and the Markov chain structure, and define the model directly starting from the process τ of the "returns to 0".

2. Model and Results

Consider a *recurrent* renewal sequence $0 = \tau_0 < \tau_1 < ...$, where $\{\tau_i - \tau_{i-1}\}_{i\geq 0}$ are integer-valued IID random variables with law

$$K(n) := \mathbf{P}(\tau_1 = n) = \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
(2.1)

We assume that the function $L(\cdot)$ is slowly varying at infinity [4], $\alpha \ge 0$ and $\sum_{n\in\mathbb{N}} K(n) = 1$. Recall that a slowly varying function $L(\cdot)$ is a positive function $(0, \infty) \ni x \to L(x) \in (0, \infty)$ such that, for every r > 0,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(rx)}{L(x)} = 1.$$
(2.2)

We denote by **E** the expectation on $\tau := {\tau_i}_{i \ge 0}$ and we put for notational simplicity $\delta_n := \mathbf{1}_{n \in \tau}$, where $\mathbf{1}_A$ is the indicator of the event *A*.

We define, for $\beta \ge 0$ and $h \in \mathbb{R}$, the quenched free energy as

$$F(\beta, h) = \lim_{N \to \infty} F_N(\beta, h) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \mathbf{E} \left(e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega_n + h) \delta_n} \, \delta_N \right), \qquad (2.3)$$

where $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ are IID centered random variables with finite second moment, law denoted by \mathbb{P} and corresponding expectation \mathbb{E} , and normalized so that $\mathbb{E} \omega_1^2 = 1$. In this work, we restrict to the case where disorder has a Gaussian distribution: $\omega_1 \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1)$. Some degree of generalization is possible: for instance, results and proofs can be extended to the situation where ω_n are IID bounded random variables.

The existence of the $N \to \infty$ limit in (2.3) is well known, see for instance [9, Sect. 4.2]. The limit actually exists, and is almost-surely equal to $F(\beta, h)$, even omitting the disorder average \mathbb{E} in (2.3). We point out that, by superadditivity, for every $N \in \mathbb{N}$,

$$F_N(\beta, h) \le F(\beta, h) \tag{2.4}$$

and that, from Jensen's inequality,

$$F_N(\beta, h) \le F_N^a(\beta, h) := \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \mathbf{E} \left(e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega_n + h)\delta_n} \delta_N \right) = F_N(0, h + \beta^2/2).$$
(2.5)

(If disorder is not Gaussian, $\beta^2/2$ is replaced by log $\mathbb{E} \exp(\beta\omega_1)$.) $F_N^a(\beta, h)$ is known as the (finite-volume) annealed free energy which, as (2.5) shows, coincides with the free energy of the homogeneous model ($\beta = 0$) for a shifted value of h. The limit free energy $F(\beta, h)$ would not change (see, e.g., [11, Remark 1.1]) if the factor δ_N were omitted in (2.3), i.e., if the boundary condition { $N \in \tau$ } were replaced by a free boundary condition at N. However, in that case exact superadditivity, and (2.4), would not hold.

Another well-established fact is that $F(\beta, h) \ge 0$ (cf. for instance [11]), which allows the definition of the critical point, for a given $\beta \ge 0$, as $h_c(\beta) := \sup\{h \in \mathbb{R} : F(\beta, h) = 0\}$. Note that Eq. (2.5) implies $h_c(\beta) \ge h_c^a(\beta) := \sup\{h \in \mathbb{R} : F^a(\beta, h) = 0\} = h_c(0) - \beta^2/2$. For obvious reasons, $h_c^a(\beta)$ is referred to as the annealed critical point. Concerning upper bounds for $h_c(\beta)$, already before [2] it was known (see [3] and [9, Theorem 5.2]) that $h_c(\beta) < h_c(0)$ for every $\beta > 0$. To make a link with the discussion in the introduction, note that the contact fraction $\ell(\beta, h)$ is just $\partial_h F(\beta, h)$.

With the exception of Theorem 2.6, we will consider from now on only the values $0 < \alpha < 1$, as in [2], in which case τ is null-recurrent under **P**. For the homogeneous system it is known [9, Theorem 2.1] that F(0, h) = 0 if $h \le 0$, while for h > 0,

$$F(0,h) = h^{1/\alpha} \tilde{L}(1/h).$$
(2.6)

 $\widetilde{L}(\cdot)$ is a slowly varying function satisfying

$$\widetilde{L}(1/h) = \left(\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha} h^{-1/\alpha} R_{\alpha}(h), \qquad (2.7)$$

and $R_{\alpha}(\cdot)$ is asymptotically equivalent to the inverse of the map $x \mapsto x^{\alpha}L(1/x)$. The fact that $\tilde{L}(\cdot)$ is slowly varying follows from [4, Theorem 1.5.12]. In particular, notice that $h_c(0) = 0$, so that $h_c^a(\beta) = -\beta^2/2$.

We want to prove first of all that, if $0 < \alpha < 1/2$ and β is sufficiently small (i.e., if disorder is sufficiently weak), $h_c(\beta) = h_c^a(\beta)$. Keeping in mind that $F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \Delta) = F(0, \Delta)$, this is an immediate consequence of

Theorem 2.1. Assume that either $0 < \alpha < 1/2$ or that $\alpha = 1/2$ and $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1}L(n)^{-2} < \infty$. Then, for every $\epsilon > 0$ there exist $\beta_0(\epsilon) > 0$ and $\Delta_0(\epsilon) > 0$ such that, for every $\beta \leq \beta_0(\epsilon)$ and $0 < \Delta < \Delta_0(\epsilon)$, one has

$$(1-\epsilon)F(0,\Delta) \le F(\beta, h_c^a(\beta) + \Delta) \le F(0,\Delta).$$
(2.8)

In view of [11, Theorem 2.1], the same cannot hold for $\alpha > 1/2$. However, one has:

Theorem 2.2. Assume that $1/2 < \alpha < 1$. There exists a slowly varying function $\check{L}(\cdot)$ and, for every $\epsilon > 0$, constants $a_1(\epsilon) < \infty$ and $\Delta_0(\epsilon) > 0$ such that, if

- ----

$$a_1(\epsilon)\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\dot{L}(1/\beta) \le \Delta \le \Delta_0(\epsilon), \tag{2.9}$$

the inequalities (2.8) hold.

As already pointed out in [2], since $2\alpha/(2\alpha - 1) > 2$ Theorem 2.2 shows in particular that

$$\lim_{\beta \searrow 0} \frac{h_c(\beta)}{h_c^a(\beta)} = 1.$$
(2.10)

On the other hand, it is unknown whether there exist non-zero values of β such that the equality $h_c(\beta) = h_c^a(\beta)$ holds, for $1/2 < \alpha < 1$.

Remark 2.3. The lower bound we obtain for $F(\beta, h)$ (and, as a consequence, for $h_c^a(\beta) - h_c(\beta)$) in Theorem 2.2 differs from the analogous one of [2, Theorem 3] only in the form of the slowly varying function $\check{L}(\cdot)$ (an explicit choice of $\check{L}(\cdot)$ can be extracted from Eq. (3.28) below). In general, our $\check{L}(\cdot)$ is larger due to the logarithmic denominator in (3.28). However, the important point is that the exponent of β in (2.9) agrees with that in the analogous condition of [2, Theorem 3]. Indeed, with the conventions of [2] (which amount to replacing everywhere h by βh and α by c - 1), the exponent $2\alpha/(2\alpha - 1) = 1 + 1/(2\alpha - 1)$ would be instead $1/(2\alpha - 1) = 1/(2c - 3)$, as in [2, Theorem 3].

Finally, for the "marginal case" we have

Theorem 2.4. Assume that $\alpha = 1/2$ and $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1}L(n)^{-2} = \infty$. Let $\ell(\cdot)$ be the slowly varying function (diverging at infinity) defined by

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nL(n)^2} \overset{N \to \infty}{\sim} \ell(N).$$
(2.11)

For every $\epsilon > 0$ there exist constants $a_2(\epsilon) < \infty$ and $\Delta_0(\epsilon) > 0$ such that, if $0 < \Delta \le \Delta_0(\epsilon)$ and if the condition

$$\frac{1}{\beta^2} \ge a_2(\epsilon) \,\ell\left(\frac{a_2(\epsilon)|\log F(0,\,\Delta)|}{F(0,\,\Delta)}\right) \tag{2.12}$$

is verified, then Eq. (2.8) holds.

Remark 2.5. Note that, thanks to Theorem 2.4 and the property of slow variation of $\ell(\cdot)$, the difference $h_c(\beta) - h_c^a(\beta)$ vanishes faster than any power of β , for $\beta \searrow 0$. Again, it is unknown whether $h_c(\beta) = h_c^a(\beta)$ for some $\beta > 0$.

In general, our condition (2.12) is different from the one in the analogous Theorem 4 of [2], due to the presence of the factor $|\log F(0, \Delta)|$ in the argument of $\ell(\cdot)$. However, for many "reasonable" and physically interesting choices of $L(\cdot)$ in (2.1), the two results are equivalent. In particular, if **P** is the law of the returns to zero of the SRW $\{S_n\}_{n\geq 0}$ in one dimension, i.e. $\tau = \{n \geq 0 : S_{2n} = 0\}$, in which case $L(\cdot)$ and $\widetilde{L}(\cdot)$ are asymptotically constant and $\ell(N) \sim a_3 \log N$, one sees easily that (2.12) is verified as soon as

$$\Delta \ge a_4(\epsilon) e^{-\frac{a_5(\epsilon)}{\beta^2}},\tag{2.13}$$

which is the same condition which was found in [2]. Another case where Theorem 2.4 and [2, Theorem 4] are equivalent is when $L(n) \sim a_6(\log n)^{(1-\gamma)/2}$ for $\gamma > 0$, in which case $\ell(N) \sim a_7(\log N)^{\gamma}$.

While we focused up to now on free energy lower bounds, one may wonder whether it is possible to improve the Jensen upper bound (2.5). For $\alpha > 1/2$ it follows from [11] that $F(\beta, h) < F^a(\beta, h)$ as soon as β is positive and $h - h_c^a(\beta)$ is positive and small. We conclude this section with a theorem which generalizes this result to arbitrary α and $h > h_c^a(\beta)$, and which justifies (as an upper bound) a small- β expansion worked out in [9, Sect. 5.5]. **Theorem 2.6.** For every $\beta > 0$, $\alpha \ge 0$ and $\Delta > 0$,

$$F(\beta, h_c^a(\beta) + \Delta) \le \inf_{0 \le q \le \Delta/\beta^2} \left(\frac{\beta^2 q^2}{2} + F(0, \Delta - \beta^2 q) \right) < F(0, \Delta).$$
(2.14)

As a consequence, for $0 \le \alpha < 1/2$ there exist $\beta_0 > 0$ and $\Delta_0 > 0$ such that

$$F(\beta, h_c^a(\beta) + \Delta) \le F(0, \Delta) - \frac{\beta^2}{2} \left(\partial_\Delta F(0, \Delta)\right)^2 \left(1 + O(\beta^2)\right)$$
(2.15)

for $\beta \leq \beta_0$ and $\Delta \leq \Delta_0$, where $O(\beta^2)$ is independent of Δ .

The first inequality in (2.14) is somewhat reminiscent of the "replica-symmetric" free energy upper bound [13] for the Sherrington-Kirkpatrick model.

The reader who wonders why we stopped at order β^2 in the "expansion" (2.15) should look at Remark 3.1 below. Note that, in view of Eqs. (2.6) and (3.47), $(\partial_{\Delta}F(0, \Delta))^2 \ll F(0, \Delta)$ if Δ is small and $\alpha < 1/2$. Observe also that, for $\alpha > 1/2$ and β , Δ small, taking the infimum in (2.14) gives nothing substantially better than just choosing $q = \Delta/\beta^2$, from which $F(\beta, h_c^{\alpha}(\beta) + \Delta) \leq \Delta^2/(2\beta^2)$; essentially the same bound (with an extra factor (1 + α) in the right-hand side) is however already implied by [11, Theorem 2.1] (see also [9, Remark 5.7]).

Remark 2.7. As a general remark, we emphasize that the assumption of recurrence for τ , i.e., $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$ is by no means a restriction. Indeed, as has been observed several times in the literature (including [11] and [2]), if $\Sigma_K := \sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$ one can define $\widetilde{K}(n) := K(n)/\Sigma_K$, and of course the renewal τ with law $\widetilde{\mathbf{P}}(\tau_1 = n) = \widetilde{K}(n)$ is recurrent. Then, it is immediate to realize from definition (2.3) that

$$F(\beta, h) = F(\beta, h + \log \Sigma_K), \qquad (2.16)$$

 \tilde{F} being the free energy of the model defined as in (2.3) but with **P** replaced by $\tilde{\mathbf{P}}$. In particular, $h_c^a(\beta) = -\log \Sigma_K - \beta^2/2$. Theorems 2.1-2.6 are therefore transferred with obvious changes to this situation.

This observation allows to apply the results, for instance, to the case where we consider the SRW $\{S_n\}_{n\geq 0}$ in \mathbb{Z}^3 , and we let **P** be the law of $\tau := \{n \geq 0 : S_{2n} = 0\}$, i.e., the law of its returns to the origin. In this case, assumption (2.1) holds with $\alpha = 1/2$, $L(\cdot)$ asymptotically constant and, due to transience, $\Sigma_K < 1$. The same is true if $\{S_n\}_{n\geq 0}$ is the SRW on \mathbb{Z} , conditioned to be non-negative.

3. Proofs

Proof of Theorem 2.1. In view of Eq. (2.5), we have to prove only the first inequality in (2.8). This is based on an adaptation of the *quadratic replica coupling method* of [15], plus ideas suggested by [2]. Let $\Delta > 0$ and start from the identity

$$F(\beta, -\beta^2/2 + \Delta) = F(0, \Delta) + \lim_{N \to \infty} R_{N,\Delta}(\beta), \qquad (3.1)$$

where

$$R_{N,\Delta}(\beta) := \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \left\langle e^{\sum_{n=1}^{N} (\beta \omega_n - \beta^2/2) \delta_n} \right\rangle_{N,\Delta},$$

and, for a **P**-measurable function $f(\tau)$,

$$\langle f \rangle_{N,\Delta} := \frac{\mathbf{E} \left(e^{\Delta \sum_{n=1}^{N} \delta_n} f \, \delta_N \right)}{\mathbf{E} \left(e^{\Delta \sum_{n=1}^{N} \delta_n} \delta_N \right)}.$$
(3.2)

Via the Gaussian integration by parts formula

$$\mathbb{E}\left(\omega f(\omega)\right) = \mathbb{E}f'(\omega), \tag{3.3}$$

valid (if ω is a standard Gaussian random variable $\mathcal{N}(0, 1)$) for every differentiable function $f(\cdot)$ such that $\lim_{|x|\to\infty} \exp(-x^2/2) f(x) = 0$, one finds for 0 < t < 1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{N,\Delta}(\sqrt{t}\beta) = -\frac{\beta^2}{2N}\sum_{m=1}^{N}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\left\langle\delta_m e^{\sum_{n=1}^{N}(\beta\sqrt{t}\omega_n - t\beta^2/2)\delta_n}\right\rangle_{N,\Delta}}{\left\langle e^{\sum_{n=1}^{N}(\beta\sqrt{t}\omega_n - t\beta^2/2)\delta_n}\right\rangle_{N,\Delta}}\right)^2\right\}.$$
(3.4)

Define also, for $\lambda \ge 0$,

$$\begin{split} \psi_{N,\Delta}(t,\lambda,\beta) &:= \frac{1}{2N} \mathbb{E} \log \left\langle e^{H_N(t,\lambda,\beta;\tau^{(1)},\tau^{(2)})} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2} \\ &:= \frac{1}{2N} \mathbb{E} \log \left\langle e^{\sum_{n=1}^N (\beta\sqrt{t}\omega_n - t\beta^2/2)(\delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}) + \lambda\beta^2 \sum_{n=1}^N \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}, \quad (3.5) \end{split}$$

where the product measure $\langle \cdot \rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}$ acts on the pair $(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$, while $\delta_n^{(i)} := \mathbf{1}_{n \in \tau^{(i)}}$. Note that $\psi_{N,\Delta}(t, \lambda, \beta)$ actually depends on (t, λ, β) only through the two combinations $\beta^2 t$ and $\beta^2 \lambda$. We add also that the introduction of the parameter *t*, which could in principle be avoided, allows for more natural expressions in the formulas which follow. One has immediately

$$\psi_{N,\Delta}(0,\lambda,\beta) = \frac{1}{2N} \log \left\langle e^{\lambda\beta^2 \sum_{n=1}^N \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}$$
(3.6)

and

$$\psi_{N,\Delta}(t,0,\beta) = R_{N,\Delta}(\sqrt{t\beta}). \tag{3.7}$$

Again via integration by parts,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_{N,\Delta}(t,\lambda,\beta) = \frac{\beta^{2}}{2N}\sum_{m=1}^{N} \mathbb{E} \frac{\left\langle \delta_{m}^{(1)}\delta_{m}^{(2)}e^{H_{N}(t,\lambda,\beta;\tau^{(1)},\tau^{(2)})} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}}{\left\langle e^{H_{N}(t,\lambda,\beta;\tau^{(1)},\tau^{(2)})} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}} \\
-\frac{\beta^{2}}{4N}\sum_{m=1}^{N} \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{\left\langle (\delta_{m}^{(1)} + \delta_{m}^{(2)})e^{H_{N}(t,\lambda,\beta;\tau^{(1)},\tau^{(2)})} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}}{\left\langle e^{H_{N}(t,\lambda,\beta;\tau^{(1)},\tau^{(2)})} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}} \right)^{2} \right\} \\
\leq \frac{\beta^{2}}{2N} \mathbb{E} \sum_{m=1}^{N} \frac{\left\langle \delta_{m}^{(1)}\delta_{m}^{(2)}e^{H_{N}(t,\lambda,\beta;\tau^{(1)},\tau^{(2)})} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}}{\left\langle e^{H_{N}(t,\lambda,\beta;\tau^{(1)},\tau^{(2)})} \right\rangle_{N,\Delta}^{\otimes 2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\psi_{N,\Delta}(t,\lambda,\beta), \tag{3.8}$$

so that, for every $0 \le t \le 1$ and λ ,

$$\psi_{N,\Delta}(t,\lambda,\beta) \le \psi_{N,\Delta}(0,\lambda+t,\beta). \tag{3.9}$$

Going back to Eq. (3.4), using convexity and monotonicity of $\psi_{N,\Delta}(t, \lambda, \beta)$ with respect to λ and (3.7), one finds

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-R_{N,\Delta}(\sqrt{t}\beta) \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left. \psi_{N,\Delta}(t,\lambda,\beta) \right|_{\lambda=0} \\
\leq \frac{\psi_{N,\Delta}(t,2-t,\beta) - R_{N,\Delta}(\sqrt{t}\beta)}{2-t} \\
\leq \psi_{N,\Delta}(0,2,\beta) - R_{N,\Delta}(\sqrt{t}\beta),$$
(3.10)

where in the last inequality we used (3.9) and the fact that $2 - t \ge 1$. Integrating this differential inequality between 0 and 1 and observing that $R_{N,\Delta}(0) = 0$, one has

$$0 \le -R_{N,\Delta}(\beta) \le (e-1)\psi_{N,\Delta}(0,2,\beta).$$
(3.11)

Now we estimate

$$\psi_{N,\Delta}(0,2,\beta) = -F_N(0,\Delta) + \frac{1}{2N} \log \mathbf{E}^{\otimes 2} \left(e^{2\beta^2 \sum_{n=1}^N \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)} + \Delta \sum_{n=1}^N (\delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)})} \delta_N^{(1)} \delta_N^{(2)} \right)$$

$$\leq -F_N(0,\Delta) + \frac{F_N(0,q\Delta)}{q} + \frac{1}{2Np} \log \mathbf{E}^{\otimes 2} \left(e^{2p\beta^2 \sum_{n=1}^N \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}} \right),$$

(3.12)

where we used Hölder's inequality and p, q (satisfying 1/p + 1/q = 1) are to be determined. One finds then

$$\limsup_{N \to \infty} \psi_{N,\Delta}(0, 2, \beta) \leq \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{2Np} \log \mathbf{E}^{\otimes 2} \left(e^{2p\beta^2 \sum_{n=1}^{N} \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}} \right) +F(0, \Delta) \left(\frac{1}{q} \frac{F(0, q\Delta)}{F(0, \Delta)} - 1 \right).$$
(3.13)

We know from (2.6) and the property (2.2) of slow variation that, for every q > 0,

$$\lim_{\Delta \searrow 0} \frac{F(0, q\Delta)}{F(0, \Delta)} = q^{1/\alpha}.$$
(3.14)

Therefore, choosing $q = q(\epsilon)$ sufficiently close to (but not equal to) 1 and $\Delta_0(\epsilon) > 0$ sufficiently small one has, uniformly on $\beta \ge 0$ and on $0 < \Delta \le \Delta_0(\epsilon)$,

$$\limsup_{N \to \infty} \psi_{N,\Delta}(0, 2, \beta) \leq \frac{\epsilon}{e - 1} F(0, \Delta) + \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{2Np(\epsilon)} \log \mathbf{E}^{\otimes 2} \times \left(e^{2p(\epsilon)\beta^2 \sum_{n=1}^N \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}} \right).$$
(3.15)

Of course, $p(\epsilon) = q(\epsilon)/(q(\epsilon) - 1) < \infty$ as long as $\epsilon > 0$. Finally, we observe that under the assumptions of the theorem, the renewal $\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}$ is transient under the law $\mathbf{P}^{\otimes 2}$. Indeed, if $0 < \alpha < 1/2$ or if $\alpha = 1/2$ and $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1}L(n)^{-2} < \infty$ one has

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}\left(\sum_{n\geq 1}\mathbf{1}_{n\in\tau^{(1)}\cap\tau^{(2)}}\right) = \sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(n\in\tau)^2 < \infty$$
(3.16)

since, as proven in [7],

$$\mathbf{P}(n \in \tau) \stackrel{n \to \infty}{\sim} \frac{C_{\alpha}}{L(n)n^{1-\alpha}} := \frac{\alpha \sin(\pi \alpha)}{\pi} \frac{1}{L(n)n^{1-\alpha}}.$$
(3.17)

Actually, Eq. (3.17) holds more generally for $0 < \alpha < 1$.

Therefore, there exists $\beta_1 > 0$ such that

$$\sup_{N} \mathbf{E}^{\otimes 2} \left(e^{2p(\epsilon)\beta^2 \sum_{n=1}^{N} \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}} \right) < \infty$$
(3.18)

for every $\beta^2 p(\epsilon) \le \beta_1^2$. Together with (3.15) and (3.1), this implies

$$F(\beta, -\beta^2/2 + \Delta) \ge (1 - \epsilon)F(0, \Delta)$$
(3.19)

as soon as $\beta^2 \le \beta_0^2(\epsilon) := \beta_1^2/p(\epsilon)$. \Box

Proof of Theorem 2.2. In what follows we assume that Δ is sufficiently small so that $F(0, \Delta) < 1$. Let $N = N(\Delta) := c |\log F(0, \Delta)| / F(0, \Delta)$ with c > 0. By Eq. (2.4) we have, in analogy with (3.1),

$$F(\beta, -\beta^2/2 + \Delta) \ge F_{N(\Delta)}(0, \Delta) + R_{N(\Delta), \Delta}(\beta).$$
(3.20)

As follows from Proposition 2.7 of [10], there exists $a_8 \in (0, \infty)$ (depending only on the law $K(\cdot)$ of the renewal) such that

$$F_N(0,\Delta) \ge F(0,\Delta) - a_8 \frac{\log N}{N}$$
(3.21)

for every N. Choosing $c = c(\epsilon)$ large enough, Eq. (3.21) implies that

$$F_{N(\Delta)}(0,\Delta) \ge (1-\epsilon)F(0,\Delta). \tag{3.22}$$

As for $R_{N(\Delta),\Delta}(\beta)$, we have from (3.11) and (3.12),

$$(1-e)^{-1}R_{N(\Delta),\Delta}(\beta) \leq F(0,\Delta) \left(\frac{1}{q} \frac{F(0,q\Delta)}{F(0,\Delta)} - 1\right) + \epsilon F(0,\Delta) + \frac{1}{2N(\Delta)p} \log \mathbf{E}^{\otimes 2} \left(e^{2p\beta^2 \sum_{n=1}^{N(\Delta)} \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}}\right),$$
(3.23)

where we used Eqs. (3.22) and (2.4) to bound $(1/q)F_{N(\Delta)}(0, q\Delta) - F_{N(\Delta)}(0, \Delta)$ from above. Choosing again $q = q(\epsilon)$ we obtain, for $\Delta \leq \Delta_0(\epsilon)$,

$$(1-e)^{-1}R_{N(\Delta),\Delta}(\beta) \le 2\epsilon F(0,\Delta) + \frac{1}{2N(\Delta)p(\epsilon)}\log \mathbf{E}^{\otimes 2}\left(e^{2p(\epsilon)\beta^2\sum_{n=1}^{N(\Delta)}\delta_n^{(1)}\delta_n^{(2)}}\right).$$
(3.24)

Now observe that, if $1/2 < \alpha < 1$, there exists $a_9 = a_9(\alpha) \in (0, \infty)$ such that for every integers N and k,

$$\mathbf{P}^{\otimes 2} \left(\sum_{n=1}^{N} \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)} \ge k \right) \le \left(1 - a_9 \frac{L(N)^2}{N^{2\alpha - 1}} \right)^k.$$
(3.25)

This geometric bound is proven in [2, Lemma 3], but in Subsect. 3.1 we give another simple proof. Thanks to (3.25) we have

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}\left(e^{2p(\epsilon)\beta^2\sum_{n=1}^{N(\Delta)}\delta_n^{(1)}\delta_n^{(2)}}\right) \leq \left(1 - e^{2\beta^2 p(\epsilon)}\left(1 - a_9\frac{L(N(\Delta))^2}{N(\Delta)^{2\alpha - 1}}\right)\right)^{-1}, \quad (3.26)$$

whenever the right-hand side is positive, and this is of course the case under the stronger requirement

$$e^{2\beta^2 p(\epsilon)} \left(1 - a_9 \frac{L(N(\Delta))^2}{N(\Delta)^{2\alpha - 1}} \right) \le \left(1 - \frac{a_9}{2} \frac{L(N(\Delta))^2}{N(\Delta)^{2\alpha - 1}} \right).$$
(3.27)

At this point, using the definition of $N(\Delta)$, it is not difficult to see that there exists a positive constant $a_{10}(\epsilon)$ such that (3.27) holds if

$$\beta^{2} p(\epsilon) \leq a_{10}(\epsilon) \Delta^{(2\alpha-1)/\alpha} \hat{L}(1/\Delta)$$

$$:= a_{10}(\epsilon) \Delta^{(2\alpha-1)/\alpha} \left[\frac{\tilde{L}(1/\Delta)}{|\log F(0,\Delta)|} \right]^{2\alpha-1} \left(L\left(\frac{|\log F(0,\Delta)|}{F(0,\Delta)} \right) \right)^{2}.$$
(3.28)

The fact that $\hat{L}(\cdot)$ is slowly varying follows from [4, Prop. 1.5.7] and Eq. (2.6). For instance, if $L(\cdot)$ is asymptotically constant one has $\hat{L}(x) \sim a_{11} |\log x|^{1-2\alpha}$. Condition (3.28) is equivalent to the first inequality in (2.9), for suitably chosen $a_1(\epsilon)$ and $\check{L}(\cdot)$. As a consequence,

$$\frac{1}{2N(\Delta)p(\epsilon)}\log \mathbf{E}^{\otimes 2}\left(e^{2p(\epsilon)\beta^2\sum_{n=1}^{N(\Delta)}\delta_n^{(1)}\delta_n^{(2)}}\right) \leq \frac{F(0,\Delta)}{2c(\epsilon)p(\epsilon)|\log F(0,\Delta)|} \times \log\left(\frac{2N(\Delta)^{2\alpha-1}}{a_9L(N(\Delta))^2}\right).$$
(3.29)

Recalling Eq. (2.6) one sees that, if $c(\epsilon)$ is chosen large enough,

$$\frac{1}{2N(\Delta)p(\epsilon)}\log \mathbf{E}^{\otimes 2}\left(e^{2p(\epsilon)\beta^2\sum_{n=1}^{N(\Delta)}\delta_n^{(1)}\delta_n^{(2)}}\right) \le \epsilon F(0,\Delta).$$
(3.30)

Together with Eqs. (3.20), (3.22) and (3.24), this concludes the proof of the theorem. \Box

Proof of Theorem 2.4. The proof is almost identical to that of Theorem 2.2 and up to Eq. (3.24) no changes are needed. The estimate (3.25) is then replaced by

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}\left(\sum_{n=1}^{N} \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)} \ge k\right) \le \left(1 - \frac{a_{12}}{\ell(N)}\right)^k \tag{3.31}$$

for every *N*, for some $a_{12} > 0$ (see [2, Lemma 3], or the alternative argument given in Subsect. 3.1). In analogy with Eq. (3.26) one obtains then

$$\mathbf{E}^{\otimes 2}\left(e^{2p(\epsilon)\beta^2\sum_{n=1}^{N(\Delta)}\delta_n^{(1)}\delta_n^{(2)}}\right) \le \left(1 - e^{2\beta^2 p(\epsilon)}\left(1 - \frac{a_{12}}{\ell(N(\Delta))}\right)\right)^{-1}$$
(3.32)

whenever the right-hand side is positive. Choosing $a_2(\epsilon)$ large enough one sees that if condition (2.12) is fulfilled then

$$e^{2\beta^2 p(\epsilon)} \left(1 - \frac{a_{12}}{\ell(N(\Delta))} \right) \le \left(1 - \frac{a_{12}}{2\ell(N(\Delta))} \right)$$
(3.33)

and, in analogy with (3.29),

$$\frac{1}{2N(\Delta)p(\epsilon)}\log \mathbf{E}^{\otimes 2}\left(e^{2(\epsilon)\beta^{2}\sum_{n=1}^{N(\Delta)}\delta_{n}^{(1)}\delta_{n}^{(2)}}\right) \leq \frac{F(0,\Delta)}{2c(\epsilon)p(\epsilon)|\log F(0,\Delta)|} \times \log\left(\frac{2\ell(N(\Delta))}{a_{12}}\right).$$
(3.34)

From this estimate, for $c(\epsilon)$ sufficiently large one obtains again (3.30) and as a consequence the statement of Theorem 2.4. \Box

3.1. Proof of (3.25) and (3.31). For what concerns (3.25), start from the obvious bound

$$\mathbf{P}^{\otimes 2} \left(\sum_{n=1}^{N} \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)} \ge k \right) \le \left(1 - \mathbf{P}^{\otimes 2} (\inf\{n > 0 : n \in \tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}\} > N) \right)^k.$$
(3.35)

Next note that, by Eq. (3.17),

$$u_{n} := \mathbf{P}^{\otimes 2} (n \in \tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}) \overset{n \to \infty}{\sim} \frac{C_{\alpha}^{2}}{L(n)^{2} n^{2(1-\alpha)}}$$
(3.36)

and that u_n satisfies the renewal equation

$$u_n = \delta_{n,0} + \sum_{k=0}^{n-1} u_k Q(n-k), \qquad (3.37)$$

where $Q(k) := \mathbf{P}^{\otimes 2}(\inf\{n > 0 : n \in \tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}\} = k)$ is the probability we need to estimate in (3.35). $Q(\cdot)$ is a probability on \mathbb{N} since the renewal $\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}$ is recurrent for $1/2 < \alpha < 1$, as can be seen from the fact that, due to Eq. (3.17), the expectation in (3.16) diverges in this case. After a Laplace transform, one finds for s > 0,

$$\hat{Q}(s) := \sum_{n \ge 0} e^{-ns} Q(n) = 1 - \frac{1}{\hat{u}(s)}$$
(3.38)

and, by [4, Theorem 1.7.1] and the asymptotic behavior (3.36), one finds

$$\hat{u}(s) \stackrel{s \to 0^+}{\sim} \frac{C_{\alpha}^2 \Gamma(2\alpha)}{2\alpha - 1} \frac{1}{s^{2\alpha - 1} (L(1/s))^2}.$$
 (3.39)

Note that $0 < 2\alpha - 1 < 1$. By the classical Tauberian theorem (in particular, [4, Corollary 8.1.7] is enough in this case), one obtains then

$$\sum_{n \ge N} Q_n \overset{N \to \infty}{\sim} \frac{2\alpha - 1}{C_{\alpha}^2 \Gamma(2\alpha) \Gamma(2(1 - \alpha))} \frac{L(N)^2}{N^{2\alpha - 1}}$$
(3.40)

.

which, together with (3.35), completes the proof of (3.25).

We turn now to the proof of (3.31). From Eq. (3.36) with $\alpha = 1/2$ and [4, Theorem 1.7.1], one finds, in analogy with (3.39),

$$\hat{u}(s) \stackrel{s \to 0^+}{\sim} C_{1/2}^2 \ell(1/s).$$
 (3.41)

Then, Eq. (3.38) and [4, Corollary 8.1.7] imply

$$\sum_{n \ge N} \mathcal{Q}_n \overset{N \to \infty}{\sim} \frac{1}{C_{1/2}^2 \ell(N)},\tag{3.42}$$

and therefore Eq. (3.31).

3.2. Proof of Theorem 2.6. Start again from (3.1) and define, for $q \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{N,\Delta}(t,\beta) := \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \left\langle e^{\sum_{n=1}^{N} \left[\beta \sqrt{t}\omega_n - t\beta^2/2 + \beta^2 q(t-1)\right]\delta_n} \right\rangle_{N,\Delta}$$
(3.43)

so that

$$\phi_{N,\Delta}(0,\beta) = F_N(0,\Delta - \beta^2 q) - F_N(0,\Delta)$$
(3.44)

and $\phi_{N,\Delta}(1,\beta) = R_{N,\Delta}(\beta)$. In analogy with Eq. (3.4) one has

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_{N,\Delta}(t,\beta) = -\frac{\beta^2}{2N} \sum_{m=1}^{N} \mathbb{E}\left\{ \left(\frac{\left\langle \delta_m \, e^{\sum_{n=1}^{N} \left[\beta\sqrt{t}\omega_n - t\beta^2/2 + \beta^2 q(t-1)\right]\delta_n} \right\rangle_{N,\Delta}}{\left\langle e^{\sum_{n=1}^{N} \left[\beta\sqrt{t}\omega_n - t\beta^2/2 + \beta^2 q(t-1)\right]\delta_n} \right\rangle_{N,\Delta}} - q \right)^2 \right\} + \frac{\beta^2 q^2}{2} \\
\leq \frac{\beta^2 q^2}{2},$$
(3.45)

from which statement (2.14) follows after an integration on t (it is clear that taking the infimum over $q \in \mathbb{R}$ or over $0 \le q \le \Delta/\beta^2$ gives the same result.) The strict inequality in (2.14) holds since the quantity to be minimized in (2.14) has negative derivative at q = 0.

To prove (2.15) recall that $F(0, \Delta)$ satisfies for $\Delta > 0$ the identity [11, Appendix A]

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-F(0,\Delta)n} K(n) = e^{-\Delta}, \qquad (3.46)$$

(so that, in particular, $F(0, \Delta)$ is real analytic for $\Delta > 0$). An application of [4, Theorem 1.7.1] gives therefore, for $\alpha < 1/2$,

$$\partial_{\Delta} F(0, \Delta) = \Delta^{(1-\alpha)/\alpha} L^{(1)}(1/\Delta), \quad \partial_{\Delta}^2 F(0, \Delta) = \Delta^{(1-2\alpha)/\alpha} L^{(2)}(1/\Delta), \quad (3.47)$$

where the slowly varying functions $L^{(i)}(\cdot)$ can be expressed through $L(\cdot)$ (cf., for instance, [9, Sect. 2.4] for the first equality). For $\alpha = 0$, (3.47) is understood to mean that the two derivatives vanish faster than any power of Δ . This shows that $\partial_{\Delta}^2 F(0, \Delta)$ is bounded above by a constant for, say, $\Delta \le 1$ if $\alpha < 1/2$. Then, choosing $q = \partial_{\Delta} F(0, \Delta)$ in (2.14) (which is the minimizer of $\beta^2 q^2/2 + F(0, \Delta - \beta^2 q)$ at lowest order in β) yields (2.15). It is important to note that, thanks to the first equality in (3.47) and the assumption $\alpha < 1/2$, this choice is compatible with the constraint $q \le \Delta/\beta^2$, for Δ and β sufficiently small. \Box *Remark 3.1.* The reason why we stopped at order β^2 in (2.15) is that at next order the error term $O(\beta^6)$ involves $\partial_{\Delta}^3 F(0, \Delta)$, which diverges for $\Delta \searrow 0$ if $\alpha > 1/3$. In analogy with (2.15), one can however prove that, if $\alpha < 1/k$ with $2 < k \in \mathbb{N}$, the expansion (2.15) can be pushed to order $\beta^{2(k-1)}$ with a uniform control in Δ of the error term $O(\beta^{2k})$. We do not detail this point, the computations involved being straightforward.

Acknowledgments. I am extremely grateful to Giambattista Giacomin for many motivating discussions and for constructive comments on this manuscript. This research has been conducted in the framework of the GIP-ANR project JC05_42461 (POLINTBIO).

References

- Aizenman, M., Sims, R., Starr, S.L.: Extended variational principle for the Sherrington-Kirkpatrick spinglass model. Phys. Rev. B 68, 214403 (2003)
- Alexander, K.S.: The effect of disorder on polymer depinning transitions. Commun. Math. Phys. 279(1), 117–146 (2008)
- Alexander, K.S., Sidoravicius, V.: Pinning of polymers and interfaces by random potentials. Ann. Appl. Probab. 16, 636–669 (2006)
- Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L.: *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
- 5. Cule, D., Hwa, T.: Denaturation of Heterogeneous DNA. Phys. Rev. Lett. 79, 2375–2378 (1997)
- Derrida, B., Hakim, V., Vannimenus, J.: Effect of disorder on two-dimensional wetting. J. Stati. Phys. 66, 1189–1213 (1992)
- Doney, R.A.: One-sided large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. Probab. Theory Rel. Fields 107, 451–465 (1997)
- Forgacs, G., Luck, J.M., Nieuwenhuizen, Th.M., Orland, H.: Wetting of a Disordered Substrate: Exact Critical behavior in Two Dimensions. Phys. Rev. Lett. 57, 2184–2187 (1986)
- Giacomin, G.: Random Polymer Models. London-Singapore: Imperial College Press/World Scientific, 2007
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: The localized phase of disordered copolymers with adsorption. ALEA 1, 149–180 (2006)
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. Commun. Math. Phys. 266, 1–16 (2006)
- 12. Giacomin, G., Toninelli, F.L.: Smoothing of Depinning Transitions for Directed Polymers with Quenched Disorder. Phys. Rev. Lett. **96**, 060702 (2006)
- Guerra, F.: Sum rules for the free energy in the mean field spin glass model. In: *Mathematical Physics in Mathematics and Physics: Quantum and Operator Algebraic Aspects*. Fields Inst. Commun. 30, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001
- Guerra, F.: Replica Broken Bounds in the Mean Field Spin Glass Model. Commun. Math. Phys. 233, 1–12 (2003)
- Guerra, F., Toninelli, F.L.: Quadratic replica coupling for the Sherrington-Kirkpatrick mean field spin glass model. J. Math. Phys. 43, 3704–3716 (2002)
- Guerra, F., Toninelli, F.L.: The thermodynamic limit in mean field spin glass models. Commun. Math. Phys. 230, 71–79 (2002)
- Nelson, D.R., Vinokur, V.M.: Boson localization and correlated pinning of superconducting vortex arrays. Phys. Rev. B 48, 13060–13097 (1993)
- Talagrand, M.: On the high temperature region of the Sherrigton-Kirkpatrick model. Ann. Probab. 30, 364–381 (2002)
- 19. Talagrand, M.: The Parisi Formula. Ann. Math. 163, 221-263 (2006)

Communicated by M. Aizenman

DISORDERED PINNING MODELS AND COPOLYMERS: BEYOND ANNEALED BOUNDS

By Fabio Lucio Toninelli¹

École Normale Supérieure de Lyon and CNRS

We consider a general model of a disordered copolymer with adsorption. This includes, as particular cases, a generalization of the copolymer at a selective interface introduced by Garel et al. [Europhys. Lett. 8 (1989) 9-13], pinning and wetting models in various dimensions, and the Poland-Scheraga model of DNA denaturation. We prove a new variational upper bound for the free energy via an estimation of noninteger moments of the partition function. As an application, we show that for strong disorder the quenched critical point differs from the annealed one, for example, if the disorder distribution is Gaussian. In particular, for pinning models with loop exponent $0 < \alpha < 1/2$ this implies the existence of a transition from weak to strong disorder. For the copolymer model, under a (restrictive) condition on the law of the underlying renewal, we show that the critical point coincides with the one predicted via renormalization group arguments in the theoretical physics literature. A stronger result holds for a "reduced wetting model" introduced by Bodineau and Giacomin [J. Statist. Phys. 117 (2004) 801-818]: without restrictions on the law of the underlying renewal, the critical point coincides with the corresponding renormalization group prediction.

1. Introduction. We consider a rather general class of directed polymers interacting with a one-dimensional defect through a quenched disordered potential. This includes various models motivated by (bio)-physics: among others, wetting models in (1 + 1) dimensions [12, 14], pinning of (1 + d)-dimensional directed polymers on columnar defects [27], copolymers at selective interfaces [16, 25] and the Poland–Scheraga (PS) model of DNA denaturation [11, 24]. For further motivations and references, we refer to [17], Chapter 1. One of the interesting aspects of these models is that they present a nontrivial localization–delocalization phase transition due to an energy–entropy competition.

Mathematically, the model is defined in terms of a renewal sequence whose inter-arrival law has a power-like tail with exponent $\alpha + 1 \ge 1$. The model is exactly solvable in absence of disorder, and it turns out that the transition can be of any given order, from first to infinite, according to the value of α . This is therefore an ideal testing ground for physical arguments (Harris criterion, renormalization)

Received September 2007; revised September 2007.

¹Supported in part by the GIP-ANR project JC05_42461 (POLINTBIO).

AMS 2000 subject classifications. 60K35, 82B44, 60K05.

Key words and phrases. Pinning and wetting models, copolymers at selective interfaces, annealed bounds, fractional moments.

group computations) and predictions concerning the effect of disorder on the critical exponents and on the location of the critical point.

The comprehension of this model has witnessed remarkable progress on the mathematical side, as proved by the recent book [17]. In particular it has been shown that for wetting, pinning or PS models, an arbitrary amount of disorder modifies the free-energy critical exponent if $\alpha > 1/2$ [18], that is, *disorder is rele*vant in this case, in agreement with the predictions of the so-called Harris criterion [23]. On the other hand, for $0 < \alpha < 1/2$ it has been proven recently [2, 29] that if disorder is weak enough the free-energy critical exponent coincides with that of the homogeneous (i.e., nondisordered) model, and the (quenched) critical point coincides with the annealed one: disorder is irrelevant (again, in agreement with the Harris criterion). These results about "irrelevance" of disorder for $0 < \alpha < 1/2$ have been later refined and complemented in [21] with results about correlationlength critical exponents. The marginal case $\alpha = 1/2$ is strongly debated in the theoretical physics literature: Ref. [14] claims that quenched and annealed critical points coincide for disorder weak enough, while [12] concludes the opposite and gives a precise prediction for their difference. See [2] and [29] for rigorous results in the marginal case, which however do not solve the controversy.

Here we attack two major open problems:

- Do quenched and annealed critical points coincide for *strong disorder*? The Harris criterion, which is based on the analysis of the stability of the homogeneous model to the addition of weak randomness, makes no prediction about this point for pinning models with $\alpha \le 1/2$ or for the copolymer with any α . [Here and in the following, we say for brevity "pinning models" but we actually include wetting and PS models, besides pinning of (1 + d)-dimensional directed polymers on columnar defects. Mathematically all these are variants of the same model, cf. beginning of Section 3.1.]
- For the copolymer model, it is known that the critical point is bounded above by the annealed one and below by an α -dependent expression found by non-rigorous renormalization group arguments [25]. Are either of these two bounds optimal?

In this work we prove a new upper bound on the free energy of the model which in some cases is sufficient to answer these two questions. In particular, consequences of our bound include the following:

- 1. Both for pinning and copolymer models with, say, Gaussian randomness, for large disorder quenched and annealed critical points differ. We would like to emphasize that, especially for the "marginal case" of the wetting model with loop exponent $\alpha = 1/2$, this question was subject to dispute even very recently [12, 15].
- 2. We identify the strong-disorder behavior of the critical point both for Gaussian pinning models and for a "reduced" wetting model introduced by Bodineau and

Giacomin [5] (for the "reduced model," the same result was proven recently by Bolthausen, Caravenna and de Tilière [6]; their proof is however based on a very different method).

- 3. For the copolymer model we prove that, as soon as a homogeneous depinning term is present in the Hamiltonian, quenched and annealed critical points differ *for every strength of the disorder*; in particular, the much-studied *critical slope at the origin* (cf. Section 3.3) is in this case strictly smaller than 1.
- 4. Finally, again for the copolymer model we prove that, if the law of the underlying renewal sequence satisfies a certain explicit condition [cf. equation (3.43) below; in particular, the condition requires the renewal to be transient], the critical point predicted by nonrigorous renormalization group arguments is indeed the correct one. This is however believed *not* to be the case in general, that is, if (3.43) does not hold.

Our basic idea is to estimate noninteger moments $\mathbb{E}Z^{\gamma}$ of the partition function with $1/(1 + \alpha) \leq \gamma < 1$. The reason why we cannot go down to $\gamma < 1/(1 + \alpha)$ is *not just technical* and will become clear soon. The method of fractional moments has been already applied successfully to the study of other quenched disordered models: we would like to mention in particular (a) the work [1] by Aizenman and Molchanov, where bounds on small moments (of order less than 1) of the resolvent kernel of random Schrödinger operators are employed to prove the occurrence of Anderson localization for strong disorder or extreme energies; (b) Ref. [8] by Buffet, Patrick and Pulé who compute exactly the free energy of a directed polymer in random environment on a regular tree via an estimation of $\mathbb{E}Z^{\gamma}$ with $1 < \gamma < 2$; and (c) Ref. [13] where Derrida and Evans, again via an estimation of $\mathbb{E}Z^{\gamma}$ with $1 < \gamma < 2$, improve previously known estimates on the critical temperature of directed polymers in random environment on finite-dimensional lattices.

We would like to conclude this introduction with two remarks. First of all, for pinning models with $0 < \alpha < 1/2$ and Gaussian randomness our results, together with those of [2] or [29], imply that there is a nontrivial transition from a weak- to a strong-disorder regime, see Remark 3.3 below for a precise statement. Secondly, Theorem 3.6 together with the numerical simulations of Ref. [9] strongly indicates that the critical point of the copolymer depends not only on α but also on the details of the inter-arrival law of the renewal, a possibly nonintuitive fact.

2. The model and the main result. Let $\tau := \{\tau_0, \tau_1, ...\}$ be a renewal sequence on the integers, with inter-arrival law $K(\cdot)$: $\tau_0 = 0$ and $\{\tau_i - \tau_{i-1}\}_{i \ge 1}$ is a sequence of IID random variables taking values in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, with law $\mathbf{P}(\tau_1 = n) =: K(n)$. We assume that for $n \in \mathbb{N}$

(2.1)
$$K(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}}$$

with $0 < \alpha < \infty$ and $L(\cdot)$ a function varying slowly at infinity, that is, a positive function such that $\lim_{x\to\infty} L(rx)/L(x) = 1$ for every r > 0. In general $\sum_{n\in\mathbb{N}} K(n) = 1 - \mathbf{P}(\tau_1 = +\infty) \le 1$.

A very popular example in the literature is the one where $K(\cdot)$ is the law of the first return to zero of the one-dimensional simple random walk $\{S_k\}_{k\geq 0}$, that is, $K(n) = K^{SRW}(n) := \mathbf{P}(\inf\{k > 0 : S_k = 0\} = 2n|S_0 = 0)$ (in which case $\alpha = 1/2$, $\sum_{n>1} K(n) = 1$ and $L(\cdot) \sim const$).

In order to make a quick connection with the (bio)-physical systems presented in the introduction, let us mention that in the case of (1 + d)-dimensional pinning models one takes $\alpha = d/2 - 1$ if $d \ge 2$ and $\alpha = 1/2$ if d = 1, in (1 + 1)dimensional wetting models and copolymers at a selective interface usually $\alpha = 1/2$, while $\alpha \simeq 1.15$ in the case of the PS model in three dimensions [24]. Actually, for the copolymer model and the pinning model with d = 1 one usually makes the specific choice $K(\cdot) = K^{SRW}(\cdot)$.

We consider random copolymers with adsorption. The system has size $N \in \mathbb{N}$, and it is characterized by the parameters $\beta \ge 0$, $\lambda \ge 0$, $h \in \mathbb{R}$ and $\tilde{h} \ge 0$. Moreover, we let $\omega := \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ and $\tilde{\omega} := \{\tilde{\omega}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be the realizations of two IID sequences of random variables. We assume ω to be independent of $\tilde{\omega}$. The joint law of $(\omega, \tilde{\omega})$ is denoted by \mathbb{P} .

The partition function of the model is

(2.2)

$$Z_{N,\omega,\widetilde{\omega}} := \mathbf{E} \Biggl[e^{\sum_{n=1}^{N} (\beta \omega_n + h) \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}} \times \prod_{j=1}^{I_N(\tau)} \Biggl(\frac{1 + e^{-2\lambda \sum_{n=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} (\widetilde{\omega}_n + \widetilde{h})}}{2} \Biggr) \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \Biggr],$$

where $I_N(\tau) := |\tau \cap \{1, \dots, N\}| = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}$, while the free energy is

(2.3)
$$F(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N, \omega, \tilde{\omega}}.$$

We assume as usual the existence of all exponential moments of ω_1 :

(2.4)
$$M(u) := \mathbb{E}(e^{u\omega_1}) < \infty$$

for every $u \in \mathbb{R}$, and similarly for $\widetilde{M}(u) := \mathbb{E}(\exp(u\widetilde{\omega}_1))$, and we set by convention $\mathbb{E}\omega_1^2 = \mathbb{E}\widetilde{\omega}_1^2 = 1$ and $\mathbb{E}\widetilde{\omega}_1 = 0$ (this can always be achieved via a redefinition of β , λ and \widetilde{h}). For later convenience (cf. Section 3.2), we *do not* assume in general that the ω_n 's are centered, although this can always be obtained via a trivial shift of h. Under these assumptions on \mathbb{P} , it is well known that the limit in (2.3) exists almost surely and in $L^1(\mathbb{P})$, and that it is almost surely independent of $(\omega, \widetilde{\omega})$. Another well-established fact is that $F(\beta, h, \lambda, \widetilde{h}) \ge 0$, which is an immediate consequence of

(2.5)
$$Z_{N,\omega,\widetilde{\omega}} \ge \frac{e^{\beta\omega_N + h}}{2} K(N)$$

and (2.1). For a proof and a discussion of these facts, see for instance [17], Chapters 1 and 4.

It is actually one of the main questions in this context to decide when the free energy vanishes and when it is positive. The reason is the following: One usually defines the *localized region* as $\mathcal{L} := \{(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) : F(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) > 0\}$ and the *delocalized region* as $\mathcal{D} := \{(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) : F(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) = 0\}$. Then it is well known that, if $(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) \in \mathcal{L}$, the ratio $\mathbf{E}_{N,\omega,\tilde{\omega}}(I_N(\tau))/N$ converges for $N \to \infty$ to a positive limit, almost-surely independent of $(\omega, \tilde{\omega})$ (where $\mathbf{E}_{N,\omega,\tilde{\omega}}$ denotes the disorder-dependent Gibbs average), while the same limit is zero in the interior of \mathcal{D} . This explains the names given to the two regions. We refer to [19] and [17], Chapter 8, for more precise and more refined estimates on $I_N(\tau)$ in the interior of \mathcal{D} , to [4], [20] and [17], Chapter 7, for path properties of τ in \mathcal{L} and finally to [28] for estimates on $I_N(\tau)$ at the boundary between \mathcal{D} and \mathcal{L} .

A very cheap way of showing that the system is delocalized for given values of $(\beta, h, \lambda, \tilde{h})$ is via the annealed upper bound on the free energy:

$$F(\beta, h, \lambda, \widetilde{h}) \leq F^{ann}(\beta, h, \lambda, \widetilde{h})$$

$$(2.6) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \mathbf{E} \bigg[e^{I_N(\tau)(h + \log M(\beta))} \times \prod_{j=1}^{I_N(\tau)} \bigg(\frac{1 + e^{(-2\widetilde{h}\lambda + \log \widetilde{M}(-2\lambda))(\tau_j - \tau_{j-1})}}{2} \bigg) \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \bigg],$$

which is simply Jensen's inequality: $\mathbb{E} \log Z \leq \log \mathbb{E}Z$. If we define the delocalized region of the annealed model as $\mathcal{D}^{ann} := \{(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) : F^{ann}(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) = 0\}$, one has then obviously $\mathcal{D}^{ann} \subseteq \mathcal{D}$.

The point of this work is to provide an improved upper bound on F which is enough to conclude that $\mathcal{D}^{ann} \neq \mathcal{D}$. In some cases, we will even be able to identify sharply the boundary between the two regions.

Going beyond annealing has appeared so far to be a difficult task. A natural idea is to try *Morita-type bounds* [26], that is, constrained annealing. In other words, for every function $p(\omega, \tilde{\omega})$ such that $\mathbb{E}p(\omega, \tilde{\omega}) = 0$, it is easily seen that

(2.7)
$$F(\beta, h, \lambda, \widetilde{h}) \leq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(e^{p(\omega, \widetilde{\omega})} Z_{N, \omega, \widetilde{\omega}} \right)$$

This can indeed improve the upper bound (2.6) on *F* if *p* is suitably chosen but, as shown in [10], it cannot improve the estimate $\mathcal{D}^{ann} \subseteq \mathcal{D}$, as long as *p* is a sum of local functions ("finite-order Morita approximation"):

$$p(\omega, \widetilde{\omega}) = \sum_{n=1}^{N} p_0(\theta_n(\omega, \widetilde{\omega})),$$

with $p_0(\omega, \widetilde{\omega})$ a bounded function depending only on a finite number of $(\omega_i, \widetilde{\omega}_i)$, and θ being the shift operator $(\theta_n(\omega, \widetilde{\omega}))_m = (\omega_{n+m}, \widetilde{\omega}_{n+m})$. We will show that the estimation of noninteger moments of the partition function allows to bypass this difficulty.

In order to formulate our results we need a few auxiliary quantities. For $0 < \gamma \leq 1$ let

(2.8)
$$c(\gamma) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (K(n))^{\gamma} \ge c(1) = 1 - \mathbf{P}(\tau_1 = +\infty),$$

with strict inequality if $\gamma < 1$. We remark that $c(\cdot)$ is decreasing and that $c(\gamma) < \infty$ if $1/(1 + \alpha) < \gamma \le 1$. Also, observe that

$$c(1/(1+\alpha)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{L(n)^{1/(1+\alpha)}}{n}$$

can be finite or infinite according to the behavior at infinity of $L(\cdot)$.

Define also, for $n \in \mathbb{N}$ and γ such that $c(\gamma) < \infty$,

(2.9)
$$\hat{K}_{\gamma}(n) := \frac{(K(n))^{\gamma}}{c(\gamma)},$$

so that $\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{K}_{\gamma}(n) = 1$ by the definition of $c(\gamma)$. It is important to realize that $\hat{K}_{\gamma}(\cdot)$ is still of the form (2.1), just with α replaced by $(1 + \alpha)\gamma - 1 \ge 0$ and $L(\cdot)$ by $L(\cdot)^{\gamma}/c(\gamma)$ (which is still slowly varying at infinity).

Finally we need the following definitions: for $a, b, v \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ and $0 < \gamma \leq 1$,

(2.10)
$$f_{\gamma}(a,b;k) := \mathbb{E}\left[\left(\frac{1+e^{a\sum_{i=1}^{k}\widetilde{\omega}_{i}+bk}}{2}\right)^{\gamma}\right]$$

and

(2.11)

$$G_{\gamma}(\nu, a, b)$$

$$:= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\mathbf{E}}_{\gamma} \left[e^{\nu I_N(\tau)} \prod_{j=1}^{I_N(\tau)} f_{\gamma}(a, b; \tau_j - \tau_{j-1}) \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \right],$$

where $\hat{\mathbf{P}}_{\gamma}$ is the law of the (recurrent) renewal with inter-arrival law $\hat{K}_{\gamma}(\cdot)$. The limit exists by superadditivity and is nonnegative.

Our main result is the following:

THEOREM 2.1. Let
$$1/(1 + \alpha) \le \gamma \le 1$$
 be such that $c(\gamma) < \infty$. Then
(2.12) $F(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) \le \frac{1}{\gamma} G_{\gamma} (\log c(\gamma) + h\gamma + \log M(\beta\gamma), -2\lambda, -2\lambda \tilde{h}).$

Some interesting consequences of this result are worked out in Section 3.

PROOF OF THEOREM 2.1. We have the elementary:

1574

LEMMA 2.2 ([22], Chapter 2.1). Let $0 < \gamma < 1$. If $n \in \mathbb{N}$ and $a_1 > 0, ..., a_n > 0$, then

(2.13)
$$(a_1 + \dots + a_n)^{\gamma} < a_1^{\gamma} + \dots + a_n^{\gamma}.$$

We need also the identity

 $Z_{N,\omega,\widetilde{\omega}}$

$$(2.14) \qquad = \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{0=i_0 < i_1 < \dots < i_\ell = N} \left(\prod_{j=1}^{\ell} K(i_j - i_{j-1}) \right) \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{\ell} \omega_{i_j} + h\ell\right) \\ \times \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1 + \exp[-2\lambda \sum_{n=i_{j-1}+1}^{i_j} (\widetilde{\omega}_n + \widetilde{h})]}{2} \right),$$

which is just a way of rewriting the expectation in (2.2) as a sum over all possible configurations of $\tau \cap \{1, ..., N\}$. As a consequence of Lemma 2.2,

$$\mathbb{E}(Z_{N,\omega,\widetilde{\omega}})^{\gamma} \leq \mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^{N} \sum_{\substack{0=i_{0}< i_{1}<\cdots< i_{\ell}=N}} \left(\prod_{j=1}^{\ell} K(i_{j}-i_{j-1})^{\gamma}\right) \times \exp\left(\beta\gamma \sum_{j=1}^{\ell} \omega_{i_{j}} + h\gamma\ell\right) \times \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1+\exp[-2\lambda \sum_{n=i_{j-1}+1}^{i_{j}}(\widetilde{\omega}_{n}+\widetilde{h})]}{2}\right)^{\gamma}\right].$$

Performing the disorder average, one sees that the right-hand side of (2.15) equals

(2.16)
$$\sum_{\ell=1}^{N} \sum_{0=i_0 < i_1 < \dots < i_\ell = N} \left(\prod_{j=1}^{\ell} \hat{K}_{\gamma}(i_j - i_{j-1}) \right) e^{\ell [\log M(\gamma\beta) + h\gamma + \log c(\gamma)]} \times \prod_{j=1}^{\ell} f_{\gamma}(-2\lambda, -2\lambda\tilde{h}; i_j - i_{j-1}).$$

Therefore,

(2.17)
$$\lim_{N \to \infty} \sup \frac{1}{N} \log \mathbb{E}(Z_{N,\omega,\widetilde{\omega}})^{\gamma} \leq G_{\gamma} (\log c(\gamma) + h\gamma + \log M(\beta\gamma), -2\lambda, -2\lambda\widetilde{h}).$$

On the other hand for $\gamma > 0$ we have via Jensen's inequality:

(2.18)
$$F(\beta, h, \lambda, \tilde{h}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N, \omega, \tilde{\omega}} \le \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N\gamma} \log \mathbb{E} (Z_{N, \omega, \tilde{\omega}})^{\gamma}$$

which concludes the proof of Theorem 2.1. \Box
3. Applications to disordered pinning models and copolymers.

3.1. Random pinning model. In this section we assume that $\lambda = 0$, $\mathbb{E}\omega_1 = 0$ and we call for simplicity the free energy $F(\beta, h)$. Since $\lambda = 0$ the random variables $\tilde{\omega}_n$ do not play any role, and for simplicity we write $Z_{N,\omega}$ instead of $Z_{N,\omega,\tilde{\omega}}$ for the partition function.

The model thus obtained is then the one considered for instance in [2, 12, 14, 18, 29]. According to the law **P** and, especially, to the value of α , the model is interpreted in the physics literature as a pinning, or wetting, or Poland–Scheraga model in different spatial dimensions.

We observe that $F(\beta, \cdot)$ is nondecreasing and we denote as usual by $h_c(\beta)$ the (quenched) critical point of the pinning model:

(3.1)
$$h_c(\beta) := \inf\{h \in \mathbb{R} : F(\beta, h) > 0\},$$

while the function $\beta \mapsto h_c(\beta)$ will be referred to as the *critical curve*. When $\beta = 0$ (homogeneous pinning model) it is a standard fact that $h_c(0) = -\log \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)$ (cf., for instance, [17], Chapter 2): F(0, h) is positive for $h > h_c(0)$ and zero otherwise (for the detailed behavior of F(0, h) for $h \searrow h_c(0)$, cf. [17], Theorem 2.1). It is also known (see [3] and [17], Chapter 5.2) that $h_c(\beta) < h_c(0)$ for every $\beta > 0$.

The annealed bound (2.6) applied to this case shows that

(3.2)
$$h_c(\beta) \ge h_c^{ann}(\beta) := -\log M(\beta) - \log \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)$$
$$= -\log M(\beta) - \log c(1).$$

On the other hand, since $f_{\gamma}(0, 0; k) = 1$, Theorem 2.1 implies immediately

THEOREM 3.1. For every $\beta > 0$ one has

(3.3)
$$h_c(\beta) \ge \hat{h}_c(\beta) := \sup_{1/(1+\alpha) \le \gamma \le 1} -\frac{1}{\gamma} \log[M(\gamma\beta)c(\gamma)].$$

Of course, $\hat{h}_c(\cdot)$ depends on $K(\cdot)$ because $c(\gamma)$ does.

The important point is that the bound provided by Theorem 3.1 is in various cases strictly better than the annealed one. For instance:

COROLLARY 3.2. Assume that $\log M(\beta) \stackrel{\beta \to +\infty}{\sim} a\beta^{\rho}$ for some $\rho > 1$ and a > 0 [where $A(x) \stackrel{x \to \infty}{\sim} B(x)$ means $\lim_{x \to \infty} A(x)/B(x) = 1$]. Then, there exists $\beta_0 < \infty$ such that for every $\beta > \beta_0$

$$h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta).$$

This applies for instance to the centered Gaussian case $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ where $\log M(\beta) = \beta^2/2$.

PROOF OF COROLLARY 3.2. Choose a value of $\gamma \in (1/(1 + \alpha), 1)$. One has for $\beta \to \infty$:

(3.5)
$$-\frac{1}{\gamma}\log[M(\gamma\beta)c(\gamma)] \sim -a\gamma^{\rho-1}\beta^{\rho}$$

while $h_c^{ann}(\beta) \sim -a\beta^{\rho}$, and the statement is obvious from the conditions $\rho > 1$ and $\gamma < 1$. \Box

One can easily extract from Theorem 3.1 a *sufficient condition* which guarantees that $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$ for a given $\beta > 0$, that is,

(3.6)
$$\partial_{\gamma} \left(-\frac{1}{\gamma} \log[M(\gamma\beta)c(\gamma)] \right) \Big|_{\gamma=1} < 0.$$

For instance, in the case of Gaussian disorder and recurrent renewal [i.e., c(1) = 1], this condition can be re-expressed in the simple form:

(3.7)
$$\frac{\beta^2}{2} > -\sum_{n=1}^{\infty} K(n) \log K(n).$$

In the recent work [15] it is claimed, on the basis of numerical simulations, that in the case of the (1 + 1)-dimensional wetting model [which corresponds to $\alpha = 1/2$, $L(\cdot) \sim const$ and c(1) = 1/2] with ω_n taking only two values with equal probability, quenched and annealed critical points coincide even for strong disorder. Theorem 3.1 does not disprove this assertion because for symmetric two-valued ω_n 's it turns out that equation (3.3) does not improve the annealed bound, but in our opinion it makes the scenario suggested by [15] rather unlikely.

REMARK 3.3. Corollary 3.2 is particularly interesting when $0 < \alpha < 1/2$ and disorder is Gaussian. Indeed, together with the results of [2] or [29], it implies that there exist $0 < \beta_1 \le \beta_2 < \infty$ such that $h_c(\beta)$ coincides with the annealed critical point for $\beta \le \beta_1$ and differs from it for $\beta > \beta_2$. In this sense, one can say that a transition from a weak disorder regime to a strong disorder regime occurs.

3.1.1. Strong-disorder asymptotics of the critical point. It is clear that, under the assumption of Corollary 3.2 on $M(\beta)$, for β very large the supremum in (3.3) is realized by some γ very close to $1/(1 + \alpha)$. This observation, together with a generalization of ideas from [5], allows to identify the strong-disorder asymptotic behavior of the critical point. For instance, in the Gaussian case one has:

(3.8)
$$h_c(\beta) \stackrel{\beta \to \infty}{\sim} -\frac{\beta^2}{2(1+\alpha)}$$

and it is easy to obtain an analogous statement in the case $\log M(\beta) \stackrel{\beta \to \infty}{\sim} a\beta^{\rho}$.

PROOF OF EQUATION (3.8). It is immediate to see from (3.3) that

(3.9)
$$\liminf_{\beta \to \infty} \frac{h_c(\beta)}{\beta^2} \ge -\frac{1}{2(1+\alpha)}.$$

As for the opposite bound, it is based on a straightforward generalization of the *rare stretch strategy* of [5] (for this reason, we just sketch the main steps of the proof). Let $\ell \in \mathbb{N}$, assume that N is an integer multiple of ℓ and divide $\{1, 2, ..., N\}$ into blocks $I_k := \{(k - 1)\ell + 1, (k - 1)\ell + 2, ..., k\ell\}$, with $k = 1, 2, ..., (N/\ell)$. Given q > 0 and the disorder realization ω , let

(3.10)
$$\mathfrak{L}_{\omega} := \left\{ 1 \le j \le (N/\ell) : \sum_{n \in I_j} \omega_n \ge \ell q \right\} \cup \{N/\ell\}.$$

One obtains a lower bound on the partition function as follows:

(3.11)
$$Z_{N,\omega} \ge \mathbf{E} \left[e^{\sum_{n=1}^{N} (\beta \omega_n + h) \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}}; \\ I_k \subset \tau \ \forall k \in \mathbf{1}_{\omega}; \tau \cap I_k = \emptyset \ \forall k \notin \mathbf{1}_{\omega}, k < (N/\ell) \right].$$

In other words, we have constrained τ to visit each point in the last block and in each of the blocks where the empirical average of the ω_n 's is larger than q, and to skip all the others. We can now take the logarithm, divide by N and let $N \to \infty$ at ℓ fixed in (3.11) to get a lower bound on the free energy. We do not detail this step, since an essentially identical computation appears in the proofs of [5], Proposition 3.1, [18], Theorem 3.1 and [17], Theorem 6.5. The net result is that for every $\varepsilon > 0$

(3.12)
$$F(\beta, h) \ge p(\ell) \Big[\beta q + h + \log K(1) - (1 + \alpha + \varepsilon) \frac{q^2}{2} + o_\ell(1) \Big],$$

where

(3.13)
$$p(\ell) := \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\ell} \omega_n \ge \ell q\right)$$

and $o_{\ell}(1)$ is a quantity which vanishes for $\ell \to \infty$. The term $\log K(1)$ is due to $\mathbf{P}(I_1 \subset \tau) = K(1)^{\ell}$.

From (3.12) and the definition of the critical point one deduces that

(3.14)
$$h_c(\beta) \le -\beta q + (1 + \alpha + \varepsilon) \frac{q^2}{2} - \log K(1).$$

Optimizing over q and using the arbitrariness of $\varepsilon > 0$,

(3.15)
$$h_c(\beta) \le -\frac{\beta^2}{2(1+\alpha)} - \log K(1)$$

which, together with (3.9), proves equation (3.8).

3.1.2. About the size of $Z_{N,\omega}$ in the delocalized phase. For the homogeneous model, it is known [17], Theorem 2.2, that if $h < h_c(0)$ then

(3.16)
$$Z_N = \mathbf{E} \left[e^{h I_N(\tau)} \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \right]^{N \to \infty} C K(N)$$

where C > 0 depends on h and on $\mathbf{P}(\tau_1 < \infty)$. It is natural to ask whether a similar statement holds for the disordered model inside the delocalized phase. In this respect, the ideas developed in this work allow to go much beyond the statement of Theorem 3.1 that the infinite-volume free energy vanishes for $h \le \hat{h}_c(\beta)$, and prove the following: if $h < \hat{h}_c(\beta)$ there exists $1/(1 + \alpha) < \gamma \le 1$ and a constant $C := C(h, K(\cdot)) < \infty$ such that

(3.17)
$$\mathbb{P}(Z_{N,\omega} \ge uK(N)) \le Cu^{-\gamma}$$

for every u > 0. The upper bound (3.17) on the partition function should be read together with the lower bound (2.5): both are of order K(N), just like the estimate (3.16) which holds for the pure model.

PROOF OF EQUATION (3.17). Since $h < \hat{h}_c(\beta)$, there exists $1/(1 + \alpha) < \gamma \le 1$ such that

$$\Delta := -\log[M(\beta\gamma)c(\gamma)] - h\gamma > 0.$$

Then, it follows from the proof of Theorem 2.1 [cf. in particular equations (2.15) and (2.16) taken for $\lambda = 0$] and from (3.16) that

(3.18)
$$\mathbb{E}(Z_{N,\omega})^{\gamma} \leq \hat{\mathbf{E}}_{\gamma} \left[e^{-I_N(\tau)\Delta} \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \right] \leq C \hat{K}_{\gamma}(N) = \frac{C}{c(\gamma)} K(N)^{\gamma},$$

for some $C := C(h, K(\cdot))$. Equation (3.17) is then an immediate consequence of Markov's inequality. \Box

Let us remark also that one can extract from the proof of (3.17) the following almost sure statement: if $h < -(1/\gamma) \log[M(\beta\gamma)c(\gamma)]$ for some $1/(1 + \alpha) < \gamma \le 1$, then

(3.19)
$$\frac{Z_{N,\omega}}{K(N)^{\mu}} \stackrel{N \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

 $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost surely, for every $\mu < 1 - 1/(\gamma(1 + \alpha))$.

3.2. "*Reduced*" wetting model. This model, introduced in [5], Section 4 as a toy version of the copolymer model discussed in the next section, is obtained from (2.2) putting $\lambda = h = 0$ and assuming that $\mathbb{P}(\omega_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\omega_1 = 0)$, for some $p \in (0, 1)$. Moreover, one assumes here that the renewal is transient, c(1) < 1, otherwise the model is uninteresting in that no phase transition occurs. As we will see, the actual value of c(1) is irrelevant in the strong-disorder regime

we are going to consider, as long as it is strictly smaller than 1. Changing conventions with respect to the previous section, we denote the free energy as $F(\beta, p)$ in this case.

It is known that for every $\beta > 0$ there exists $p_c(\beta) \in (0, 1)$ such that the free energy $F(\beta, p)$ is zero for $p \le p_c(\beta)$ and positive for $p > p_c(\beta)$. The main question is to compute (if it exists) the limit

(3.20)
$$m_c := -\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta).$$

It was proven in [5] that for $\alpha = 1/2$

(3.21)
$$2/3 \le -\limsup_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta) \le -\liminf_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta) \le 1.$$

This result can be easily generalized to any $\alpha > 0$ and in this case the lower bound in (3.21) is replaced by $1/(1 + \alpha)$.

Here we prove the following:

THEOREM 3.4. The limit in (3.20) exists and equals $1/(1 + \alpha)$.

Recently a proof of Theorem 3.4, based on entirely different ideas, was given in [6]. While our approach is much simpler, the method of Bolthausen, Caravenna and de Tilière is more natural from a renormalization group point of view.

PROOF OF THEOREM 3.4. We start by remarking that if we apply Theorem 2.1 to the reduced model we obtain immediately

$$-\liminf_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta) < 1,$$

but not the sharper statement of Theorem 3.4. To go beyond (3.22), somehow we have to use the information that, if $p < p_c(\beta)$, the sites where $\omega_n = 1$ are very sparse for β large (their density p is indeed exponentially small in β), and that between two such sites τ has typically just a finite number of points, since it is a transient renewal under the law **P**.

Let $1/(1 + \alpha) < \gamma < 1$ and C > 1 such that

$$\frac{c(\gamma)}{C^{\gamma}} < 1.$$

The renewal τ with inter-arrival law $K(\cdot)$ being transient, that is, c(1) < 1, it is known (cf., for instance, [17], Theorem A.4) that

(3.24)
$$\mathbf{P}(n \in \tau) \stackrel{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{(1 - c(1))^2} K(n),$$

1580

and therefore there exists $C' := C'(\gamma, C) < \infty$ such that

(3.25)
$$\mathbf{P}(n \in \tau) \le C' \frac{K(n)}{C}$$

for every $n \in \mathbb{N}$.

We let now $\mathcal{Y}_{\omega} := \{1 \le n \le N : \omega_n = 1\} \cup \{N\}$ and we decompose the partition function according to the configuration of $A(\tau) := \tau \cap \mathcal{Y}_{\omega}$. If $|A(\tau)| = \ell (\ge 1)$, we write $A(\tau) = \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ with $a_i < a_{i+1}$ and, by convention, we set $a_0 := 0$. Then,

$$(3.26) Z_{N,\omega} \leq \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{\substack{A \subseteq \mathcal{Y}_{\omega}:\\|A|=\ell, a_{\ell}=N}} e^{\beta \ell} \prod_{j=1}^{\ell} \mathbf{P}(a_{j} - a_{j-1} \in \tau)$$

$$(3.27) \leq \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{\substack{A \subseteq \mathcal{Y}_{\omega}:\\|A|=\ell, a_{\ell}=N}} e^{(\beta + \log C')\ell} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{K(a_{j} - a_{j-1})}{C}$$

$$\leq e^{\beta + \log C'} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{0=a_{0} < a_{1} < \cdots < a_{\ell}=N} e^{(\beta + \log C')\sum_{j=1}^{\ell} \omega_{a_{j}}}$$

$$(3.28) \times \prod_{\ell=1}^{\ell} \frac{K(a_{j} - a_{j-1})}{C}$$

$$\times \prod_{j=1}^{\ell} \frac{K(a_j - a_{j-1})}{C}$$

where in the first inequality we used the fact that

(3.29)
$$\mathbf{P}(a_i \in \tau, \tau \cap \mathcal{Y}_{\omega} \cap \{a_{i-1} + 1, \dots, a_i - 1\} = \emptyset | a_{i-1} \in \tau)$$
$$\leq \mathbf{P}(a_i - a_{i-1} \in \tau),$$

in the second one we used (3.25) and the third one is obvious since we have just added extra positive terms to the sum. On the other hand the right-hand side of (3.28), apart from the global factor $\exp(\beta + \log C')$ which is anyway irrelevant for the computation of the infinite-volume limit of the free energy, is just the partition function of the model where β is replaced by $(\beta + \log C')$ and K(n) by K(n)/Cfor every $n \in \mathbb{N}$ [cf. equation (2.14) taken for $\lambda = 0$]. Following step by step the proof of Theorem 2.1, one finds therefore that

(3.30)
$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N,\omega}$$
$$\leq \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N\gamma} \log \mathbb{E} (Z_{N,\omega})^{\gamma}$$
$$\leq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\gamma} \log \hat{\mathbf{E}}_{\gamma} \left[e^{I_N(\tau) \log[(c(\gamma)/C^{\gamma})(pe^{\gamma(\beta + \log C')} + (1-p))]} \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \right],$$

which vanishes whenever

(3.31)
$$\log\left[pe^{\gamma(\beta+\log C')}+(1-p)\right]+\log\left(\frac{c(\gamma)}{C^{\gamma}}\right)\leq 0.$$

Thanks to the choice (3.23), it follows immediately that

(3.32)
$$-\liminf_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta} \log p_c(\beta) \le \gamma.$$

By the arbitrariness of $(1 \ge)\gamma > 1/(1 + \alpha)$, and since we already know that

$$-\limsup_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\log p_c(\beta)\geq 1/(1+\alpha),$$

we obtain the statement of the theorem. \Box

3.3. Copolymer model. In this section we set $\beta = h = 0$ and with yet another abuse of notation we call the free energy $F(\lambda, \tilde{h})$. This is just (a generalization of) the copolymer model considered for instance in [4, 5, 7].

REMARK 3.5. The results which follow can be easily generalized to the case $h \neq 0$. This is particularly evident for h < 0. Indeed, it is well known [and immediate to check from (2.14)] that the model with h < 0 is equivalent to the one with h = 0 and K(n) replaced by $K(n) \exp(-|h|)$ for every $n \in \mathbb{N}$ [so that $c(\gamma)$ becomes $c(\gamma) \exp(-\gamma |h|)$].

We observe that in view of $\lambda \ge 0$ the free energy is nonincreasing with respect to \tilde{h} and we denote by $\tilde{h}_c(\lambda)$ the quenched critical point:

(3.33)
$$\widetilde{h}_c(\lambda) := \sup\{\widetilde{h} \ge 0 : F(\lambda, \widetilde{h}) > 0\},\$$

while $\lambda \mapsto \tilde{h}_c(\lambda)$ is the critical line.

It is convenient to define for $0 < \gamma \le 1$

(3.34)
$$\widetilde{h}_{c}^{(\gamma)}(\lambda) := \frac{1}{2\lambda\gamma} \log \widetilde{M}(-2\lambda\gamma).$$

Note that $\tilde{h}_c^{(\cdot)}(\lambda)$ is increasing by Jensen's inequality and that

(3.35)
$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\tilde{h}_c^{(\gamma)}(\lambda)}{\lambda} = \gamma$$

thanks to $\mathbb{E}\tilde{\omega}_1^2 = 1$, $\mathbb{E}\tilde{\omega}_1 = 0$. For $\gamma = 1$, this is just the annealed critical line: $F^{ann}(0, 0, \lambda, \tilde{h}) = 0$ if and only if $\tilde{h} \ge \tilde{h}_c^{(1)}(\lambda)$, as it is immediate to realize from (2.6). On the other hand, $\tilde{h}_c^{(1/(1+\alpha))}(\cdot)$ is sometimes referred to as the "Monthus line." This line was proposed as the true critical line of the copolymer model in

1582

the theoretical physics literature, on the basis of renormalization group arguments [25].

In general one knows that for every $\lambda > 0$,

(3.36)
$$\widetilde{h}_c^{(1/(1+\alpha))}(\lambda) \le \widetilde{h}_c(\lambda) \le \widetilde{h}_c^{(1)}(\lambda).$$

The lower bound in (3.36) was proven in [5] in the case where $K(\cdot) = K^{SRW}(\cdot)$, the law of the first return to zero of the one-dimensional simple random walk (cf. Section 2), but the bound can be proven to hold for every $K(\cdot)$ of the form (2.1), see [17], Chapter 6. Numerical simulations (supported by solid probabilistic estimates) performed *in the particular case* $K(\cdot) = K^{SRW}(\cdot)$ strongly indicate that neither of the two bounds in (3.36) is optimal [9].

For $K(\cdot) = K^{SRW}(\cdot)$, it is also known that the limit slope $\lim_{\lambda \to 0} \tilde{h}_c(\lambda)/\lambda$ exists [7] [and is therefore bounded between 2/3 and 1 in view of (3.36) and $\alpha = 1/2$], that it coincides with the slope of the critical curve of a continuous copolymer model with Brownian disorder [7] and that it is to a large extent independent of \mathbb{P} [19].

Here we will show that (say, in the Gaussian case) the annealed upper bound $\tilde{h}_c(\lambda) \leq \tilde{h}_c^{(1)}(\lambda)$ can be improved for large λ whatever $K(\cdot)$ is [within the class (2.1)]. If the renewal is transient, $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$, then with no assumptions on the disorder distribution annealing can be improved for every $\lambda > 0$ and, in particular, the slope at the origin turns out to be strictly smaller than 1. Finally, if $K(\cdot)$ satisfies condition (3.43) below, the lower bound in (3.36) is the optimal one for every λ . This condition *is not satisfied* for $K(\cdot) = K^{SRW}(\cdot)$, in agreement with the simulations mentioned above. By the way, our results strongly indicate that the critical curve depends in general not only on the tail behavior of $K(\cdot)$ (say, on the exponent α), as one might be tempted to guess on the basis of belief in universality, but also on the details of the slowly-varying function $L(\cdot)$. Note that this is not the case for the annealed curve, which depends only on \mathbb{P} and α .

Observe first of all that, thanks to Lemma 2.2,

(3.37)
$$f_{\gamma}(a,b;k) \le 2^{1-\gamma} \frac{1 + e^{k(b\gamma + \log M(\gamma a))}}{2}.$$

Therefore,

$$G_{\gamma}(v, a, b)$$

$$(3.38) \leq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\mathbf{E}}_{\gamma} \left[e^{I_N(\tau)(\nu + (1-\gamma)\log 2)} \times \prod_{j=1}^{I_N(\tau)} \left(\frac{1 + e^{(b\gamma + \log \widetilde{M}(\gamma a))(\tau_j - \tau_{j-1})}}{2} \right) \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \right].$$

Our main result for the copolymer model is the following:

THEOREM 3.6. *Define*

(3.39) $\gamma_c := \inf\{0 < \gamma \le 1 : \log c(\gamma) < \gamma \log 2\} \in [1/(1+\alpha), 1).$ Then, one has:

1. For every $\gamma > \gamma_c$ there exists $C(\gamma) < \infty$ such that for every $\lambda > 0$

(3.40)
$$\widetilde{h}_c(\lambda) \le \widetilde{h}_c^{(\gamma)}(\lambda) + \frac{C(\gamma)}{\lambda}.$$

2. *If* $\gamma_c = 1/(1 + \alpha)$ *and*

(3.41)
$$0 < \log c \left(1/(1+\alpha) \right) + \frac{\alpha}{1+\alpha} \log 2 < \log 2$$

there exists $C < \infty$ such that for every $\lambda > 0$

(3.42)
$$\widetilde{h}_c(\lambda) \le \widetilde{h}_c^{(1/(1+\alpha))}(\lambda) + \frac{C}{\lambda}.$$

3. *If* $\gamma_c = 1/(1 + \alpha)$ *and*

(3.43)
$$\log c \left(1/(1+\alpha) \right) + \frac{\alpha}{1+\alpha} \log 2 \le 0,$$

then for every $\lambda > 0$

(3.44)
$$\widetilde{h}_c(\lambda) = \widetilde{h}_c^{(1/(1+\alpha))}(\lambda).$$

In view of Remark 3.5 above, condition (3.43) is realized for instance if $c(1/(1 + \alpha)) < \infty$ and we add a homogeneous depinning term proportional to -|h|, with |h| sufficiently large. In any case, we emphasize that a necessary (but not sufficient) condition for (3.43) to hold is that τ be transient under **P**.

REMARK 3.7. Note that in the case $L(\cdot) \sim const$, for example, if $K(\cdot) = K^{SRW}(\cdot)$, one has $\gamma_c > 1/(1 + \alpha)$ since $c(\gamma) \to \infty$ for $\gamma \searrow 1/(1 + \alpha)$. In particular, from the explicit expression of $K^{SRW}(\cdot)$ one finds numerically $\gamma_c \simeq 0.83$ in the simple random walk case. It is interesting to note that the numerical results of [9], Section 5, are compatible with $\tilde{h}_c(\lambda) = \tilde{h}_c^{(m)}(\lambda)$ with *m* somewhere between 0.8 and 0.84. Understanding whether this is more than just a coincidence requires further numerical simulations of the type [9], performed also for other choices of $K(\cdot)$.

We have also the analogue of Corollary 3.2:

COROLLARY 3.8. Assume that $\log \widetilde{M}(-\lambda) \sim a\lambda^{\rho}$ for $\lambda \to +\infty$, for some a > 0 and $\rho > 1$. Then, there exists $\lambda_0 < \infty$ such that for $\lambda > \lambda_0$

(3.45)
$$\widetilde{h}_c(\lambda) < \widetilde{h}_c^{(1)}(\lambda).$$

This is obvious from (3.40) since $\gamma_c < 1$.

Finally, as we mentioned, in the transient case (and without assumptions on \mathbb{P}) the improvement on annealing can be pushed down to $\lambda = 0$:

COROLLARY 3.9. Assume that $c(1) = \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty) < 1$. Then, for every $\lambda > 0$

(3.46)
$$\widetilde{h}_c(\lambda) \le \widetilde{h}_c^{(\bar{\gamma})}(\lambda)$$

where

(3.47)
$$\bar{\gamma} := \inf\{\gamma \le 1 : \log c(\gamma) + (1 - \gamma) \log 2 \le 0\} \in [1/(1 + \alpha), 1].$$

As a consequence of equation (3.35) we have that if $P(\tau_1 < +\infty) < 1$ (or if h < 0, see Remark 3.5) the slope of the critical curve at the origin (if it exists) is strictly smaller than 1.

PROOF OF THEOREM 3.6. One has from (3.38)

$$(3.48) \qquad G_{\gamma} \left(\log c(\gamma), -2\lambda, -2\lambda \left[\widetilde{h}_{c}^{(\gamma)}(\lambda) + \varepsilon \right] \right) \\ \times \prod_{N \to \infty}^{I} \log \hat{\mathbf{E}}_{\gamma} \left[e^{I_{N}(\tau) (\log c(\gamma) + (1-\gamma) \log 2)} \right] \\ \times \prod_{j=1}^{I_{N}(\tau)} \left(\frac{1 + e^{-2\lambda\gamma\varepsilon(\tau_{j} - \tau_{j-1})}}{2} \right) \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}} \right].$$

Let us consider first case (1). To this purpose, let $\gamma > \gamma_c$ and choose $\varepsilon = C/(\gamma \lambda)$ in (3.48). It is clear that, for every $\delta > 0$, it is possible to choose $C = C(\delta)$ sufficiently large so that

(3.49)
$$\frac{1 + e^{-2Ck}}{2} \le e^{-\log 2 + \delta}$$

for every $k \in \mathbb{N}$. Taking for instance

(3.50)
$$\delta = \delta(\gamma) = \frac{\gamma \log 2 - \log c(\gamma)}{2} > 0$$

(so that C depends on γ) one finds therefore

(3.51)

$$G_{\gamma}\left(\log c(\gamma), -2\lambda, -2\lambda\left[\widetilde{h}_{c}^{(\gamma)}(\lambda) + \frac{C(\gamma)}{\gamma\lambda}\right]\right)$$

$$\leq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\mathbf{E}}_{\gamma}\left[e^{-I_{N}(\tau)\delta(\gamma)} \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}}\right] = 0$$

[The positivity of $\delta(\gamma)$ follows from $\gamma > \gamma_c$ and from the definition of γ_c .] By Theorem 2.1 one has therefore (3.40). Equation (3.42) is proven analogously.

Finally, if condition (3.43) is verified then choosing $\gamma = 1/(1 + \alpha)$ and $\varepsilon = 0$ in equation (3.48) one has

(3.52)
$$G_{1/(1+\alpha)}\left(\log c\left(\frac{1}{1+\alpha}\right), -2\lambda, -2\lambda \widetilde{h}_{c}^{(1/(1+\alpha))}(\lambda)\right)$$
$$\leq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\mathbf{E}}_{1/(1+\alpha)} \left[e^{I_{N}(\tau)(\log c(1/(1+\alpha))+\alpha/(1+\alpha)\log 2)} \mathbf{1}_{\{N \in \tau\}}\right]$$

and the right-hand side is zero since it is the free energy of a homogeneous pinning model with nonpositive pinning strength, see assumption (3.43). This shows that $\tilde{h}_c(\lambda) \leq \tilde{h}_c^{(1/(1+\alpha))}(\lambda)$, and the opposite bound is already in (3.36). \Box

PROOF OF COROLLARY 3.9. Just take equation (3.48) for $\gamma = \overline{\gamma}$ and $\varepsilon = 0$.

Acknowledgments. I wish to thank Erwin Bolthausen, Bernard Derrida and Giambattista Giacomin for interesting discussions.

REFERENCES

- AIZENMAN, M. and MOLCHANOV, S. (1993). Localization at large disorder and at extreme energies: An elementary derivation. *Comm. Math. Phys.* 157 245–278. MR1244867
- [2] ALEXANDER, K. S. (2008). The effect of disorder on polymer depinning transitions. *Comm. Math. Phys.* 279 117–146.
- [3] ALEXANDER, K. S. and SIDORAVICIUS, V. (2006). Pinning of polymers and interfaces by random potentials. Ann. Appl. Probab. 16 636–669. MR2244428
- [4] BISKUP, M. and DEN HOLLANDER, F. (1999). A heteropolymer near a linear interface. *Ann. Appl. Probab.* **9** 668–687. MR1722277
- [5] BODINEAU, T. and GIACOMIN, G. (2004). On the localization transition of random copolymers near selective interfaces. J. Statist. Phys. 117 801–818. MR2107896
- [6] BOLTHAUSEN, E., CARAVENNA, F. and DE TILIÈRE, B. (2007). The quenched critical point of a diluted disordered polymer model. Preprint. ArXiv:math.0711.0141v1 [math.PR].
- [7] BOLTHAUSEN, E. and DEN HOLLANDER, F. (1997). Localization transition for a polymer near an interface. Ann. Probab. 25 1334–1366. MR1457622
- [8] BUFFET, E., PATRICK, A. and PULÉ, J. V. (1993). Directed polymers on trees: A martingale approach. J. Phys. A 26 1823–1834. MR1220795
- [9] CARAVENNA, F., GIACOMIN, G. and GUBINELLI, M. (2006). A numerical approach to copolymers at selective interfaces. J. Statist. Phys. 122 799–832. MR2213950
- [10] CARAVENNA, F. and GIACOMIN, G. (2005). On constrained annealed bounds for pinning and wetting models. *Electron. Comm. Probab.* 10 179–189. MR2162817
- [11] CULE, D. and HWA, T. (1997). Denaturation of heterogeneous DNA. *Phys. Rev. Lett.* **79** 2375– 2378.
- [12] DERRIDA, B., HAKIM, V. and VANNIMENIUS, J. (1992). Effect of disorder on twodimensional wetting. J. Statist. Phys. 66 1189–1213. MR1156401
- [13] EVANS, M. R. and DERRIDA, B. (1992). Improved bounds for the transition temperature of directed polymers in a finite-dimensional random medium. J. Statist. Phys. 69 427–437.
- [14] FORGACS, G., LUCK, J. M., NIEUWENHUIZEN, TH. M. and ORLAND, H. (1986). Wetting of a disordered substrate: Exact critical behavior in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.* 57 2184–2187.

- [15] GANGARDT, D. M. and NECHAEV, S. K. (2007). Wetting transition on a one-dimensional disorder. Preprint. ArXiv:math.0704.2893.
- [16] GAREL, T., HUSE, D. A., LEIBLER, S. and ORLAND, H. (1989). Localization transition of random chains at interfaces. *Europhys. Lett.* 8 9–13.
- [17] GIACOMIN, G. (2007). Random Polymer Models. Imperial College Press, World Scientific.
- [18] GIACOMIN, G. and TONINELLI, F. L. (2006). Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. *Comm. Math. Phys.* 266 1–16. MR2231963
- [19] GIACOMIN, G. and TONINELLI, F. L. (2005). Estimates on path delocalization for copolymers at selective interfaces. *Probab. Theory Related Fields* 133 464–482. MR2197110
- [20] GIACOMIN, G. and TONINELLI, F. L. (2006). The localized phase of disordered copolymers with adsorption. ALEA 1 149–180. MR2249653
- [21] GIACOMIN, G. and TONINELLI, F. L. (2007). On the irrelevant disorder regime of pinning models. Preprint. ArXiv:math.0707.3340v1 [math.PR].
- [22] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E. and PÓLYA, G. (1967). *Inequalities*, 2nd ed. Cambridge Univ. Press.
- [23] HARRIS, A. B. (1974). Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models. J. Phys. C 7 1671–1692.
- [24] KAFRI, Y., MUKAMEL, D. and PELITI, L. (2000). Why is the DNA denaturation transition first order? *Phys. Rev. Lett.* 85 4988–4991.
- [25] MONTHUS, C. (2000). On the localization of random heteropolymers at the interface between two selective solvents. *Eur. Phys. J. B* 13 111–130.
- [26] MORITA, T. (1966). Statistical mechanics of quenched solid solutions with application to magnetically dilute alloys. J. Math. Phys. 5 1401–1405. MR0169647
- [27] NELSON, D. R. and VINOKUR, V. M. (1993). Boson localization and correlated pinning of superconducting vortex arrays. *Phys. Rev. B* 48 13060–13097.
- [28] TONINELLI, F. L. (2007). Critical properties and finite-size estimates for the depinning transition of directed random polymers. J. Statist. Phys. 126 1025–1044. MR2311896
- [29] TONINELLI, F. L. (2008). A replica-coupling approach to disordered pinning models. Comm. Math. Phys. To appear.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON LABORATOIRE DE PHYSIQUE AND CNRS UMR 5672 46 Allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07 FRANCE E-MAIL: fltonine@ens-lyon.fr

Hierarchical pinning models, quadratic maps and quenched disorder

Giambattista Giacomin · Hubert Lacoin · Fabio Lucio Toninelli

Received: 21 December 2007 / Revised: 2 February 2009 © Springer-Verlag 2009

Abstract We consider a hierarchical model of polymer pinning in presence of quenched disorder, introduced by Derrida et al. (J Stat Phys 66:1189-1213, 1992), which can be re-interpreted as an infinite dimensional dynamical system with random initial condition (the disorder). It is defined through a recurrence relation for the law of a random variable $\{R_n\}_{n=1,2,...}$, which in absence of disorder (*i.e.*, when the initial condition is degenerate) reduces to a particular case of the well-known logistic map. The large-*n* limit of the sequence of random variables $2^{-n} \log R_n$, a non-random quantity which is naturally interpreted as a free energy, plays a central role in our analysis. The model depends on a parameter $\alpha \in (0, 1)$, related to the geometry of the hierarchical lattice, and has a phase transition in the sense that the free energy is positive if the expectation of R_0 is larger than a certain threshold value, and it is zero otherwise. It was conjectured in Derrida et al. (J Stat Phys 66:1189-1213, 1992) that disorder is relevant (respectively, irrelevant or marginally relevant) if $1/2 < \alpha < 1$ (respectively, $\alpha < 1/2$ or $\alpha = 1/2$), in the sense that an arbitrarily small amount of randomness in the initial condition modifies the critical point with respect to that of the pure (*i.e.*, non-disordered) model if $\alpha \ge 1/2$, but not if $\alpha < 1/2$. Our main result is a proof of these conjectures for the case $\alpha \neq 1/2$. We emphasize that for $\alpha > 1/2$ we find the *correct scaling form* (for weak disorder) of the critical point shift.

G. Giacomin (🖂) · H. Lacoin

U.F.R. Mathématiques et Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris Diderot (Paris 7), Case 7012 (site Chevaleret), 75205 Paris, France e-mail: giacomin@math.jussieu.fr

H. Lacoin e-mail: lacoin@math.jussieu.fr

F. L. Toninelli

CNRS and Laboratoire de Physique, ENS Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon, France e-mail: fabio-lucio.toninelli@ens-lyon.fr

Keywords Hierarchical models \cdot Quadratic recurrence equations \cdot Pinning models \cdot Disorder \cdot Harris criterion

Mathematics Subject Classification (2000) 60K35 · 82B44 · 37H10

1 Introduction

1.1 The model

Consider the dynamical system defined by the initial condition $R_0^{(i)} > 0, i \in \mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$ and the array of recurrence equations

$$R_{n+1}^{(i)} = \frac{R_n^{(2i-1)}R_n^{(2i)} + (B-1)}{B}, \quad i \in \mathbb{N},$$
(1.1)

for n = 0, 1, ..., and a given B > 2. Of course if $R_0^{(i)} = r_0$ for every *i*, then the problem reduces to studying the quadratic recurrence equation

$$r_{n+1} = \frac{r_n^2 + (B-1)}{B},\tag{1.2}$$

a particular case of a very classical problem, the *logistic map*, as it is clear from the fact that $z_n := 1/2 - r_n/(2(B-1))$ satisfies the recursion

$$z_{n+1} = \frac{2(B-1)}{B} z_n (1-z_n).$$
(1.3)

We are instead interested in non-constant initial data and, more precisely, in initial data that are typical realizations of a sequence of independent identically distributed (IID) random variables. In its random version, the model was first considered in [11] (see Sects. 1.2, 1.6 below for motivations in terms of pinning/wetting models and for an informal discussion of what the interesting questions are and what is expected to be true). We will consider rather general distributions, but we will assume that all the moments of $R_0^{(i)}$ are finite. As it will be clear later, for our purposes it is actually useful to write

$$R_0^{(i)} = \exp(\beta\omega_i - \log M(\beta) + h), \qquad (1.4)$$

with $\beta \ge 0, h \in \mathbb{R}, \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a sequence of exponentially integrable IID centered random variables normalized to $\mathbb{E} \omega_1^2 = 1$ and for every β

$$M(\beta) := \mathbb{E} \exp(\beta \omega_1) < \infty.$$
(1.5)

The law of $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ is denoted by \mathbb{P} and we will often alternatively denote the average $\mathbb{E}(\cdot)$ by brackets $\langle \cdot \rangle$.

Note that, for every n, $\{R_n^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ are IID random variables and therefore this dynamical system is naturally re-interpreted as the evolution of the probability law \mathcal{L}_n (the law of $R_n^{(1)}$): given \mathcal{L}_n , the law \mathcal{L}_{n+1} is obtained by constructing two IID variables distributed according to \mathcal{L}_n and applying

$$R_{n+1} = \frac{R_n^{(1)} R_n^{(2)} + (B-1)}{B}.$$
(1.6)

Of course, the iteration (1.6) is well defined for every $B \neq 0$. In particular, as detailed in Appendix A.3, the case $B \in (1, 2)$ can be mapped exactly into the case B > 2 we explicitly consider here, while for B < 1 one loses the direct statistical mechanics interpretation of the model discussed in Sect. 1.6.

1.2 Quadratic maps and pinning models

The model we are considering may be viewed as a hierarchical version of a class of statistical mechanics models that go under the name of (disordered) *pinning* or *wetting* models [13,15], that are going to be described in some detail in Sect. 1.6. It has been introduced in [11, Sect. 4.2], where the partition function $R_n = R_n^{(1)}$ is defined for B = 2, 3, ..., as

$$R_{n} = \mathbf{E}_{n}^{B} \left[\exp \left(\sum_{i=1}^{2^{n}} \left(\beta \omega_{i} - \log \mathbf{M}(\beta) + h \right) \mathbf{1}_{\{(S_{i-1}, S_{i}) = (d_{i-1}, d_{i})\}} \right) \right], \quad (1.7)$$

with $\{S_i\}_{i=0,...,2^n}$ a simple random walk (of law \mathbf{P}_n^B) on a hierarchical *diamond* lattice with growth parameter *B* and d_0, \ldots, d_{2^n} are the labels for the vertices of a particular path that has been singled out and dubbed *defect line*. The construction of diamond lattices and a graphical description of the model are detailed in Fig. 1 and its caption.

The phenomenon that one is trying to capture is the *localization at (or delocalization away from) the defect line*, that is one would like to understand whether the rewards (that could be negative, hence penalizations) *force* the trajectories to stick close to the defect line, or the trajectories *avoid* the defect line. A priori it is not clear that there is necessarily a sharp distinction between these two qualitative behaviors, but it turns out that it is the case and which of the two scenarios prevails may be read from the asymptotic behavior of R_n . The Laplace asymptotics carries already a substantial amount of information, so we define the *quenched free energy*

$$F(\beta, h) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \log R_n^{(1)},$$
(1.8)

where the limit is in the almost sure sense: the existence of such a limit and the fact that it is non-random may be found in Theorem 1.1. Note in fact that $\partial_h F(\beta, h)$ coincides with the $n \to \infty$ limit of $\mathbf{E}_{n,\omega}^B [2^{-n} \sum_i \mathbf{1}_{\{(S_{i-1},S_i)=(d_{i-1},d_i)\}}]$, where $\mathbf{P}_{n,\omega}^B$ is the probability measure associated to the partition function R_n , when $\partial_h F(\beta, h)$ exists (that



level 2

Fig. 1 Given $B = 2, 3, \ldots, (B = 3$ in the drawing) we build a diamond lattice by iterative steps (*left to* right): at each step one replaces every bond by B branches consisting of two bonds each. A trajectory of our process in a diamond lattice at *level n* is a path connecting the two *poles* d_0 and d_{2n} : two trajectories, a and b, are singled out by *thick lines*. Note that at level n, each trajectory is made of 2^n bonds and there are N_n trajectories, $N_0 := 1$ and $N_{n+1} = BN_n^2$. A simple random walk at level *n* is the uniform measure over the N_n trajectories. A special trajectory, with vertices labeled $d_0, d_1, \ldots, d_{2^n}$, is chosen (and marked by a triple line: the right-most trajectory in the drawing, but any other trajectory would lead to an equivalent model), we may call it defect line or wall boundary, and rewards $u_j := \beta \omega_j - \log M(\beta) + h$ (negative or positive) are assigned to the bonds of this trajectory. The energy of a trajectory depends on how many and which bonds it shares with the defect line: trajectory a carries no energy, while trajectory b carries energy $u_1 + u_2$. The pinning model is then built by rewarding or penalizing the trajectories according to their energy in the standard statistical mechanics fashion and the partition function of such a model is therefore given by R_n in (1.7). It is rather elementary, and fully detailed in [11], how to extract from (1.7) the recursion (1.6). But the recursion itself is well defined for arbitrary real value $B \neq 0$ and one may forget the definition of the hierarchical lattice, as we do here. The definition of \mathbf{P}_n^B can also be easily generalized to B > 1, see (A.11) of Appendix A

is for all *h* except at most a countable number of points, by convexity of $F(\beta, \cdot)$, see below). Therefore $\partial_h F(\beta, h)$ measures the density of contacts between the walk and the defect line and below we will see that $\partial_h F(\beta, h)$ is zero up to a critical value $h_c(\beta)$, and positive for $h > h_c(\beta)$: this is a clear signature of a *localization transition*.

1.3 A first look at the role of disorder

Of course if $\beta = 0$ the *disorder* ω plays no role and the model reduces to the onedimensional map (1.2) (in our language $\beta > 0$ corresponds to the model in which disorder is present). This map has two fixed points: 1, which is stable, and B - 1, which is unstable. More precisely, if $r_0 < B - 1$ then r_n converges monotonically (and exponentially fast) to 1. If $r_0 > B - 1$, r_n increases to infinity in a super-exponential fashion, namely $2^{-n} \log r_n$ converges to a positive number which is of course function of r_0 . The question is whether, and how, introducing disorder in the initial condition ($\beta > 0$) modifies this behavior.

There is also an alternative way to link (1.1) and (1.2). In fact, by taking the average we obtain

$$\langle R_{n+1} \rangle = \frac{\langle R_n \rangle^2 + (B-1)}{B}, \qquad (1.9)$$

where we have dropped the superscript in $\langle R_n^{(i)} \rangle$. Therefore the behavior of the sequence $\{\langle R_n \rangle\}_n$ is (rather) explicit, in particular such a sequence tends (monotonically) to 1 if $\langle R_0 \rangle < B - 1$, while $\langle R_n \rangle = B - 1$ for n = 1, 2, ..., if $\langle R_0 \rangle = B - 1$. This is already a strong piece of information on $R_n^{(1)}$ (the sequence $\{\mathcal{L}_n\}_n$ is tight). Less informative is instead the fact that $\langle R_n \rangle$ diverges if $\langle R_0 \rangle > B - 1$, even if we know precisely the speed of divergence: in fact the sequence of random variables can still be tight! In principle such an issue may be tackled by looking at higher moments, but while $\langle R_n \rangle$ satisfies a closed recursion, the same is not true for higher moments, in the sense that the recursions they satisfy depend on the behavior of the lower-order moments. For instance, if we set $\Delta_n := \operatorname{var}(R_n)$, we have

$$\Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n \left(2 \langle R_n \rangle^2 + \Delta_n \right)}{B^2}.$$
(1.10)

In principle such an approach can be pushed further, but most important for understanding the behavior of the system is capturing the asymptotic behavior of $\log R_n^{(i)}$, *i.e.*, (1.8).

1.4 Quenched and annealed free energies

Our first result says, in particular, that the quenched free energy (1.8) is well defined:

Theorem 1.1 The limit in (1.8) exists $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost surely and in $\mathbb{L}^1(d\mathbb{P})$, it is almostsurely constant and it is non-negative. The function $(\beta, h) \mapsto F(\beta, h + \log M(\beta))$ is convex and $F(\beta, \cdot)$ is non-decreasing (and convex). These properties are inherited from $F_N(\cdot, \cdot)$, defined by

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{2^N} \langle \log R_N \rangle.$$
 (1.11)

Moreover $F_N(\beta, h)$ converges to $F(\beta, h)$ with exponential speed, more precisely for all $N \ge 1$

$$F_N(\beta, h) - 2^{-N} \log B \le F(\beta, h) \le F_N(\beta, h) + 2^{-N} \log \left(\frac{B^2 + B - 1}{B(B - 1)}\right).$$
(1.12)

🖉 Springer

Let us also point out that $F(\beta, h) \ge 0$ is immediate in view of the fact that $R_n^{(i)} \ge (B-1)/B$ for $n \ge 1$, *cf.* (1.1). The lower bound $F(\beta, h) \ge 0$ implies that we can split the parameter space (or *phase diagram*) of the system according to $F(\beta, h) = 0$ and $F(\beta, h) > 0$ and this clearly corresponds to sharply different asymptotic behaviors of R_n . In conformity with related literature, see Sect. 1.6, we define localized and delocalized phases as $\mathcal{L} := \{(\beta, h) : F(\beta, h) > 0\}$ and $\mathcal{D} := \{(\beta, h) : F(\beta, h) = 0\}$ respectively. It is therefore natural to define, for given $\beta \ge 0$, the *critical* value $h_c(\beta)$ as

$$h_c(\beta) = \sup\{h \in \mathbb{R} : F(\beta, h) = 0\}.$$

$$(1.13)$$

Theorem 1.1 says in particular that

$$h_c(\beta) = \inf\{h \in \mathbb{R} : F(\beta, h) > 0\},$$

$$(1.14)$$

and that $F(\beta, \cdot)$ is (strictly) increasing on $(h_c(\beta), \infty)$. Note that, thanks to the properties we just mentioned, the contact fraction, defined in the end of Sect. 1.2, is zero $h < h_c(\beta)$ and is instead positive if $h > h_c(\beta)$ [define the contact fraction by taking the inferior limit for the values of h at which $F(\beta, \cdot)$ is not differentiable].

Another important observation on Theorem 1.1 is that it yields also the existence of $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \log \langle R_n \rangle$ and this limit is simply F(0, h), in fact $F_n(0, h) = 2^{-n} \log \langle R_n \rangle$ for every *n*. In statistical mechanics language $\langle R_n \rangle$ is an *annealed* quantity and $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \log \langle R_n \rangle$ is the *annealed free energy*: by Jensen inequality it follows that $F(\beta, h) \leq F(0, h)$ and $h_c(\beta) \geq h_c(0)$. It is also a consequence of Jensen inequality (see Remark A.1) the fact that $F(\beta, h + \log M(\beta)) \geq F(0, h)$, so that $h_c(\beta) \leq h_c(0) + \log M(\beta)$. Summing up:

$$h_c(0) \le h_c(\beta) \le h_c(0) + \log M(\beta).$$
 (1.15)

Therefore, by the convexity properties of $F(\cdot, \cdot)$ (Theorem 1.1) and by (1.15), we see that $h_c(\cdot) - \log M(\cdot)$ is concave and may diverge only at infinity, so that $h_c(\cdot)$ is a continuous function.

The following result on the *annealed system*, *i.e.*, just the non-disordered system, is going to play an important role:

Theorem 1.2 (Annealed system estimates). The function $h \mapsto F(0, h)$ is real analytic except at $h = h_c := h_c(0)$. Moreover $h_c = \log(B - 1)$ and there exists c = c(B) > 0 such that for all $h \in (h_c, h_c + 1)$

$$c(B)^{-1}(h-h_c)^{1/\alpha} \le F(0,h) \le c(B)(h-h_c)^{1/\alpha},$$
 (1.16)

where

$$\alpha := \frac{\log(2(B-1)/B)}{\log 2}.$$
 (1.17)

Bounds on the annealed free energy can be extracted directly from (1.12), namely that for every $n \ge 1$

$$\frac{B(B-1)}{B^2+B-1}\exp\left(2^n F(0,h)\right) \le \langle R_n \rangle \le B\exp\left(2^n F(0,h)\right).$$
(1.18)

Moreover let us note from now that $\alpha \in (0, 1)$ and that $1/\alpha > 2$ if and only if $B < B_c := 2 + \sqrt{2}$, and $1/\alpha = 2$ for $B = B_c$. It follows that $F(0, h) = o((h - h_c)^2)$ for $B < B_c (\alpha < 1/2)$, while this is not true for $B > B_c (\alpha > 1/2)$.

Remark 1.3 For models defined on hierarchical lattices, in general one does not expect the (singular part of the) free energy to have a pure power-law behavior close to the critical point h_c , but rather to behave like $H(\log(h - h_c))(h - h_c)^{\nu}$, with ν the critical exponent and $H(\cdot)$ a periodic function, see in particular [12]. Note that, unless $H(\cdot)$ is trivial (*i.e.*, constant), the oscillations it produces become more and more rapid for $h \searrow h_c$. We have observed numerically such oscillations in our case and therefore we expect that estimate (1.16) cannot be improved at a qualitative level as h approaches h_c (the problem of estimating sharply the size of the oscillations appears to be a non-trivial one, but this is not particularly important for our analysis).

1.5 Results for the disordered system

The first result we present gives information on the phase diagram: we use the definition

$$\Delta = \Delta(\beta) := (B-1)^2 \left(\frac{M(2\beta)}{M(\beta)^2} - 1 \right) \quad (\ge 0),$$
 (1.19)

so that $\operatorname{Var}(R_0) \stackrel{h=h_c}{=} \Delta$. The quantity Δ should be though of as the size of the disorder at a given β .

Theorem 1.4 *Recall that the critical value for the annealed system is* $h_c = \log(B-1)$ *. We have the following estimates on the quenched critical line:*

- (1) Choose $B \in (2, B_c)$. If $\Delta(\beta) \le B^2 2(B-1)^2$ then $h_c(\beta) = h_c$.
- (2) Choose $B > B_c$. Then $h_c(\beta) > h_c$ for every $\beta > 0$. Moreover for β small (say, $\beta \le 1$) one can find $c \in (0, 1)$ such that

$$c \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \le h_c(\beta) - h_c \le c^{-1} \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}.$$
 (1.20)

(3) If $B = B_c$ then one can find C > 0 such that, for $\beta \le 1$,

$$0 \le h_c(\beta) - h_c \le \exp(-C/\beta^2). \tag{1.21}$$

Moreover if ω_1 is such that $\mathbb{P}(\omega_1 > t) > 0$ for every t > 0, then for every B > 2 we have $h_c(\beta) - h_c > 0$ for β sufficiently large, in fact $\lim_{\beta \to \infty} h_c(\beta) = \infty$.

🖉 Springer

Of course (1.21) leaves open an evident question for $B = B_c$, that will be discussed in Sect. 1.6. We point out that the constant *C* is explicit (see Proposition 3.4) but it does not have any particular meaning. It is possible to show that *C* can be chosen arbitrarily close to the constant given in [11], but here, for the sake of simplicity, we have decided to prove a weaker result (*i.e.*, with a smaller constant). This is not a crucial issue, since the upper bound on $h_c(\beta)$ is not comforted by a suitable lower bound.

The next result is about the free energy.

Theorem 1.5 We have the following:

(1) Choose $B \in (2, B_c)$ and β such that $\Delta(\beta) < B^2 - 2(B-1)^2$. Then for every $\eta \in (0, 1)$ one can find $\epsilon > 0$ such that

$$F(\beta, h) \ge (1 - \eta)F(0, h),$$
 (1.22)

for $h \in (h_c, h_c + \epsilon)$.

(2) Choose $B > B_c$. Then for every $\eta \in (0, 1)$ one can find c > 0 and $\beta_0 > 0$ such that (1.22) holds for $\beta < \beta_0$ and $h - h_c \in (c\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}, 1)$.

While the relevance of the analysis of the free energy will be discussed in depth in the next subsection, it is natural to address the following issue: in a *sharp* sense, how does the random array $R_n^{(1)}$ behave as *n* tends to infinity? We recall that the nondisordered system displays only three possible asymptotic behaviors: $r_n \rightarrow 1$, $r_n = B - 1$ for all *n* and $r_n \nearrow \infty$ in a super-exponentially fast fashion.

What can be extracted directly from the free energy is quite satisfactory if the free energy is positive: $R_n^{(1)}$ diverges at a super-exponential speed that is determined to leading order. However, the information readily available from the fact that the free energy is zero is rather poor; this can be considerably improved, starting with the fact that, by the lower bound in (1.12), if the free energy is zero then $\sup_n \langle \log R_n \rangle \leq \log B$, which implies the tightness of the sequence.

Theorem 1.6 If $F(\beta, h) = 0$ then the sequence $\{R_n\}_n$ is tight. Moreover if $h < h_c(\beta)$ then

$$\lim_{n \to \infty} R_n^{(1)} = 1 \text{ in probability.}$$
(1.23)

Let us mention that we also establish almost sure convergence of R_n toward 1 when we are able to find $\gamma \in (0, 1)$ and $n \in \mathbb{N}$ such that $\mathbb{E}\left[([R_n - 1]^+)^{\gamma}\right]$ is smaller than an explicit constant (see Sect. 4, in particular Remark 4.4). It is interesting to compare such results with the estimates on the size of the partition function $Z_{N,\omega}$ of non-hierarchical pinning/wetting models, which are proven in [25, end of Sect. 3.1] in the delocalized phase, again via estimation of fractional moments of $Z_{N,\omega}$ (which plays the role of our R_n).

What one should expect at criticality is rather unclear to us (see however [23] for a number of predictions and numerical results on hierarchical pinning and also [6,7] for some theoretical considerations on a different class of hierarchical models).

1.6 Pinning models: the role of disorder

Hierarchical models on diamond lattices, homogeneous or disordered [4-7,9], are a powerful tool in the study of the critical behavior of statistical mechanics models, especially because real-space renormalization group transformations à *la* Migdal-Kadanoff are exact in this case. In most of the cases, hierarchical models are introduced in association with a more realistic non-hierarchical one. It should however be pointed out that hierarchical models on diamond lattices are not rough simplifications of non-hierarchical ones. They are in fact meant to retain the essential features of the associated non-hierarchical models (notably: the critical properties!). In particular, it would be definitely misleading to think of the hierarchical model as a mean field approximation of the real one.

Non-hierarchical pinning models have an extended literature (e.g., [13, 15]). They may be defined like in (1.7), with S a symmetric random walk with increment steps in $\{-1, 0, +1\}$, energetically rewarded or penalized when the bond (S_{n-1}, S_n) lies on the horizontal axis [that is $d_i = 0$ for every j in (1.7)], but they can be restated in much greater generality by considering arbitrary homogeneous Markov chains that visit a given site (say, the origin) with positive probability and that are then rewarded or penalized when passing by this site. In their non-disordered version [13], this general class of models has the remarkable property of being *exactly solvable*, while displaying a phase transition-a localization-delocalization transition-and the order of such a transition depends on a parameter of the model (the tail decay exponent of the distribution of the first return of the Markov chain to the origin: we call α such an exponent and it is the analog of the quantity α in our hierarchical context, cf. (1.17); one should however note that for non-hierarchical models values $\alpha \ge 1$ can also be considered, in contrast with the model we are studying here). As a matter of fact, transitions of all order, from first order to infinite order, can be observed in such models. They therefore constitute an ideal set-up in which to address the natural question: how does the disorder affect the transition?

Such an issue has often been considered in the physical literature and a criterion, proposed by Harris in a somewhat different context, adapted to pinning models [11,14], yields that the disorder is irrelevant if β is small and $\alpha < 1/2$, meaning by this that quenched and annealed critical points coincide and the critical behavior of the free energy is the same for annealed and quenched system (note that the annealed system is a homogeneous pinning system, and therefore exactly solvable). The disorder instead becomes relevant when $\alpha > 1/2$, with a shift in the critical point (quenched is different from annealed) and different critical behaviors (possibly expecting a smoother transition, but the Harris criterion does not really address such an issue). In the marginal case, $\alpha = 1/2$, disorder could be *marginally* relevant or *marginally* irrelevant, but this is an open issue in the physical literature, see [11, 14, 15] for further literature.

Much progress has been made very recently in the mathematical literature on nonhierarchical pinning models, in particular:

 The irrelevant disorder regime is under control [1,24] and even more detailed results on the closeness between quenched and annealed models can be established [20].

- (2) Concerning the relevant disorder regime, in [19] it has been shown that the quenched free energy is smoother than the annealed free energy if $\alpha > 1/2$. The non-coincidence of quenched and annealed critical points for *large* disorder (and for every α) has been proven in [25] via an estimation of non-integer moments of the partition function. The idea of considering non-integer moments (this time, of $R_n 1$) plays an important role also in the present paper.
- (3) A number of results on the behavior of the paths of the model have been proven addressing the question of what can be said about the trajectories of the system once we know that the free energy is zero (or positive) [17,18]. One can in fact prove that if $F(\beta, h) > 0$ then the process sticks close to the origin (in a strong sense) and it is therefore in a localized (\mathcal{L}) regime. When $F(\beta, h) = 0$, and leaving aside the critical case, one expects that the process *essentially never* visits the origin, and we say that we are in a delocalized regime (\mathcal{D}). We refer to [15] for further discussion and literature on this point.

In this work we rigorously establish the full Harris criterion picture for the hierarchical version of the model. In particular we wish to emphasize that we do show that there is a shift in the critical point of the system *for arbitrarily small disorder* if $\alpha > 1/2$ and we locate such a point in a window that has a precise scaling behavior, *cf.* (1.20) (a behavior which coincides with that predicted in [11]).

As a side remark, one can also generalize the smoothing inequality proven in [19] to the hierarchical context and show that for every B > 2 there exists $c(B) < \infty$ such that, if $\omega_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, for every $\beta > 0$ and $\delta > 0$ one has

$$F(\beta, h_c(\beta) + \delta) \le \delta^2 c(B) / \beta^2, \qquad (1.24)$$

which implies that annealed and quenched free energy critical behaviors are different for $\alpha > 1/2$, *cf.* (1.16) (as in [19], such inequality can be generalized well beyond Gaussian ω_1 , but we are not able to establish it only assuming the finiteness of the exponential moments of ω_1). The proof of (1.24) is detailed in [22].

Various intriguing issues remain open:

- (1) Is there a shift in the critical point at small disorder if $B = B_c$ (that is $\alpha = 1/2$)? We stress that in [11] is predicted that $h_c(\beta) h_c(0) \simeq \exp(-\log 2/\beta^2)$ for β small.
- (2) Can one go beyond (1.24)? That is, can one find sharp estimates on the critical behavior when the disorder is relevant?
- (3) With reference to the caption of Fig. 2, can one prove $\beta_c > \hat{\beta}$ (for $B < B_c$)?
- (4) Does the law of R_n converge to a non-trivial limit for $n \to \infty$, when $h = h_c(\beta)$?

Of course, all these issues are open also in the non-hierarchical context and, even if not every question becomes easier for the hierarchical model, it may be the right context in which to attack them first.

1.7 Some recurrent notation and organization of the subsequent sections

Aside for standard notation like $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : n \ge x\}$ and $\lfloor x \rfloor := \lceil x \rceil - 1$, or $\lfloor \cdot \rfloor^+ := \max(0, \cdot)$, we will repeatedly use Δ_n for the variance of $R_n^{(1)}$, see (1.10), and



Fig. 2 This is a sketch of the phase diagram and a graphical view of Theorems 1.4 and 1.6. The *thick line* in both graphs is $h_c(\cdot)$. The *dashed line* is instead the lower bound on $h_c(\cdot)$ which we obtain with our methods. *Below the dashed line* we can establish the a.s. convergence of $R_n^{(i)}$ to 1. We have also used $\beta_c := \sup\{\beta : h_c(\beta) = h_c\}$ and $\hat{\beta} := \sup\{\beta : \Delta(\beta) < B^2 - 2(B-1)^2\}$. We do not prove the (strict) inequality $\beta_c > \hat{\beta}$

 $Q_n := \Delta_n / \langle R_n \rangle^2$ so that from (1.9) and (1.10), one sees that

$$Q_{n+1} = 2\left(\frac{B-1}{B}\right)^2 \left(\frac{\langle R_n \rangle^4}{\langle R_{n+1} \rangle^2 (B-1)^2}\right) \left(Q_n + \frac{1}{2}Q_n^2\right), \quad (1.25)$$

and we observe that

$$Q_0 = \left(\frac{M(2\beta)}{M(\beta)^2} - 1\right) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} \beta^2.$$
(1.26)

Note that $2(B-1)^2/B^2$ is smaller than 1 if and only if $B < B_c$ and

$$\left(\frac{\langle R_n \rangle^4}{\langle R_{n+1} \rangle^2 (B-1)^2}\right) \le \left(\frac{B}{B-1}\right)^2.$$
(1.27)

We will also frequently use $P_n := \langle R_n \rangle - (B - 1)$, which satisfies

$$P_{n+1} = 2\frac{(B-1)}{B}P_n + \frac{1}{B}P_n^2, \qquad (1.28)$$

and $P_0 = \varepsilon$ in our notations [see (1.30) below]. With some effort, one can explicitly verify that for every *n*

$$\left(\frac{\langle R_n \rangle^4}{\langle R_{n+1} \rangle^2 (B-1)^2}\right) \le 1 + \frac{4P_n}{B(B-1)}.$$
(1.29)

Deringer

Finally, there is some notational convenience at times in making the change of variables

$$\varepsilon := \langle R_0 \rangle - (B-1) = e^h - (B-1),$$
 (1.30)

and

$$F(\beta,\varepsilon) := F(\beta,h(\varepsilon)), \qquad (1.31)$$

and when we write $h(\varepsilon)$ we refer to the invertible map defined by (1.30).

The work is organized as follows. Part (1) of Theorem 1.4 and of Theorem 1.5 are proven in Sect. 2. In Sect. 3 we prove part (2) of Theorem 1.5 and, as a consequence, part (2) of Theorem 1.4, except the lower bound in (1.20). Part (3) of Theorem 1.4 is proven in Sect. 3.1 and the lower bound of (1.20) in Sect. 4 (after a brief sketch of our method). The proof of Theorem 1.6 is given in Sect. 5. Finally, the proofs of Theorems 1.1 and 1.2 are based on more standard techniques and can be found in Appendix A.

2 Free energy lower bounds: $B < B_c = 2 + \sqrt{2}$

We want to give a proof of part (1) of Theorem 1.5, which in particular implies part (1) of Theorem 1.4.

The strategy goes roughly as follows: since $h > h_c$ is close to h_c , that is $\varepsilon (= P_0) > 0$ is close to 0, P_n keeps close to zero for many values of n and $P_{n+1} \approx (2(B-1)/B)P_n$ [recall (1.28) and the fact that 2(B-1)/B > 1 for B > 2]. This is going to be true up to nmuch smaller than $\log(1/\varepsilon)/\log(2(B-1)/B)$. At the same time for the normalized variance Q_n we have the approximated recursion $Q_{n+1} \approx 2((B-1)/B)^2(Q_n+(1/2)Q_n^2)$, which one derives from (1.25) by using $P_n \approx 0$. Since $2((B-1)/B)^2 < 1$ is equivalent to $B < B_c$, we easily see that (if Q_0 is not too large) Q_n shrinks at an exponential rate. This *scenario* actually breaks down when P_n is no longer small, but at that stage Q_n is already extremely small (such a value of n is precisely defined and called n_0 below). From that point onward Q_n starts growing exponentially and eventually it diverges, but after $(1 + \gamma)n_0$ steps, for some $\gamma > 0$, Q_n is still small while P_n is large, so that a second moment argument, combined with (1.12) which yields a control on $F(\beta, h)$ via $F_n(\beta, h)$, allows to conclude.

Before starting the proof we give an upper bound on the size of $Q_n (= \Delta_n / \langle R_n \rangle^2)$ in the regime in which the recursion for $\langle R_n \rangle$ can be linearized [for what follows, recall (1.25), (1.26) and (1.27)].

Lemma 2.1 Let $B \in (2, B_c)$ and β such that $\Delta = \Delta(\beta) < B^2 - 2(B-1)^2$. There exist $c := c(B, \Delta) > 0$, $c_1 := c_1(B, \Delta) > 0$ and $\delta_0 := \delta_0(B, \Delta) > 0$ with

$$2(1+\delta_0)\left(\frac{B-1}{B}\right)^2 < 1,$$
 (2.1)

such that for every ε satisfying $0 < \varepsilon/(B-1) < ((B^2 - 2(B-1)^2)/\Delta)^{1/2} - 1$ (recall the definition (1.30) of ε) and

$$n \leq n_0 := \left\lfloor \log \left(c \, \delta_0 / \varepsilon \right) / \log \left(\frac{2(B-1)}{B} \right) \right\rfloor, \tag{2.2}$$

one has

$$Q_n \leq c_1 \left(2(1+\delta_0) \left(\frac{B-1}{B} \right)^2 \right)^n Q_0.$$
 (2.3)

Note that the condition on ε simply guarantees $\Delta_0 = (1 + \varepsilon/(B - 1))^2 \Delta$ is smaller than $B^2 - 2(B - 1)^2$. *Proof of Lemma 2.1.* Recall that $P_n = \langle R_n \rangle - (B - 1)$ and that it satisfies the recursion (1.28) (and that $P_0 = \varepsilon$).

For $G_n := (P_n/P_0)(2(B-1)/B)^{-n}$ we have from (1.28) and (1.30)

$$G_{n+1} = G_n + \frac{\varepsilon}{B} \left(2\frac{(B-1)}{B}\right)^{n-1} G_n^2,$$
 (2.4)

and $G_0 = 1$. If $G_m \le 2$ for $m \le n$, then

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} \le 1 + 2\frac{\varepsilon}{B} \left(2\frac{(B-1)}{B}\right)^{n-1},\tag{2.5}$$

which entails

$$G_{n+1} \le \exp\left(2\frac{\varepsilon}{B}\sum_{j=0}^{n}\left(2\frac{(B-1)}{B}\right)^{j-1}\right) \le 1 + \varepsilon C(B)\left(\frac{2(B-1)}{B}\right)^{n+1}, \quad (2.6)$$

for a suitable constant $C(B) < \infty$.

As we have already remarked, our assumption on ε yields $\Delta_0 < B^2 - 2(B-1)^2$, so

$$Q_0 < \left(\frac{B}{B-1}\right)^2 - 2.$$
 (2.7)

Choose $\delta_0 > 0$ sufficiently small so that (2.1) is satisfied and moreover

$$2\left(\frac{B-1}{B}\right)^2 (1+\delta_0) \left(Q_0 + \frac{1}{2}Q_0^2\right) < Q_0,$$
 (2.8)

[the latter can be satisfied in view of (2.7)]. It is immediate to deduce from (2.6) that if *c* in (2.2) is chosen sufficiently small (in particular, $c \le B(B-1)/8$), then $G_n \le 2$ for $n \le n_0$ and, as an immediate consequence,

$$0 < P_n \le 2\varepsilon \left(\frac{2(B-1)}{B}\right)^n \le 2c\delta_0 \le \delta_0 \frac{B(B-1)}{4}, \tag{2.9}$$

Deringer

where the first inequality is immediate from (1.28) and $P_0 = \varepsilon > 0$. Now we apply (1.29)

$$Q_{n+1} \le 2\left(\frac{B-1}{B}\right)^2 (1+\delta_0) \left(Q_n + \frac{1}{2}Q_n^2\right).$$
 (2.10)

Notice also that $Q_1 < Q_0$ thanks to (2.8). From this it is easy to deduce that, as long as $n \le n_0$, Q_n is decreasing and satisfies (2.3) for a suitable c_1 . In particular, $c_1(B, \Delta_0)$ can be chosen such that $\lim_{\Delta_0 \searrow 0} c_1(B, \Delta_0) = 1$.

$$Q_{n+1} \leq 2\left(Q_n + \frac{1}{2}Q_n^2\right) \leq 3Q_n, \qquad (2.11)$$

where the last inequality holds as long as $Q_n \le 1$. Then we apply Lemma 2.1 (recall in particular δ_0 , n_0 in there). Combining (2.3) and (2.11) we get

$$Q_n \leq Q_{n_0} 3^{n-n_0} \leq c_1 Q_0 \left(2(1+\delta_0) \left(\frac{B-1}{B}\right)^2 \right)^{n_0} 3^{n-n_0},$$
 (2.12)

for every $n \ge n_0$ satisfying $Q_n \le 1$ (which implies $Q'_n \le 1$ for all $n' \le n$ as Q_n is increasing). Of course this boils down to requiring that the right-most term in (2.12) does not get larger than 1. Since n_0 diverges as $\varepsilon \searrow 0$, if we choose $\gamma > 0$ such that $3^{\gamma} 2(1 + \delta_0)(B - 1)^2/B^2 < 1$, then the right-most term in (2.12) is bounded above for every $n \le (1 + \gamma)n_0$ by a quantity $o_{\varepsilon}(1)$ which vanishes for $\varepsilon \to 0$. Summing all up:

$$Q_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor} = o_{\varepsilon}(1). \tag{2.13}$$

Next, note that

$$\langle \log R_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor} \rangle \geq \log \left(\frac{1}{2} \langle R_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor} \rangle \right) \mathbb{P} \left(R_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor} \geq \frac{1}{2} \langle R_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor} \rangle \right) + \log \left(\frac{B-1}{B} \right),$$

$$(2.14)$$

where we have used the fact that $R_n \ge (B-1)/B$ for $n \ge 1$. Applying the Chebyshev inequality one has

$$\mathbb{P}\left(R_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor} \ge (1/2)\langle R_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor}\rangle\right) \ge 1 - 4Q_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor} = 1 + o_{\varepsilon}(1). \quad (2.15)$$

Therefore, from (1.18), (2.14) and (2.15) one has

$$F_{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor}(\beta,h) \ge (1+o_{\varepsilon}(1))\widehat{F}(0,\varepsilon) - 2^{-\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor}c(B), \qquad (2.16)$$

for some $c(B) < \infty$ and, from (1.12) [or, equivalently, (A.5)],

$$\widehat{\mathsf{F}}(\beta,\varepsilon) \ge (1+o_{\varepsilon}(1))\,\widehat{\mathsf{F}}(0,\varepsilon) - 2^{-\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor}c_1(B).$$
(2.17)

Since $\widehat{F}(0, \varepsilon)2^{\lfloor (1+\gamma)n_0 \rfloor}$ diverges for $\varepsilon \to 0$ if $\gamma > 0$, as one may immediately check from (2.2) and (1.16), one directly extracts that for every $\eta > 0$ there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$F(\beta, h) = \widehat{F}(\beta, \varepsilon) \ge (1 - \eta)\widehat{F}(0, \varepsilon) = (1 - \eta)F(0, h), \qquad (2.18)$$

for $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, *i.e.*, $h \leq h_c(0) + \log(1 + \varepsilon/(B - 1))$, and we are done.

3 Free energy lower bounds: $B \ge B_c = 2 + \sqrt{2}$

The arguments in this section are close in spirit to the ones of the previous section. However, since $B > B_c$, the constant $2((B-1)/B)^2$ in the linear term of the recursion equation (1.25) is larger than one, so the normalized variance Q_n grows from the very beginning. Nonetheless, if Q_0 is small, it will keep small for a while. The point is to show that, if P_0 is not too small (this concept is of course related to the size of Q_0), when Q_n becomes of order one P_n is sufficiently large. Therefore, once again, a second moment argument and (1.12) yield the result we are after, that is:

Proposition 3.1 Let $B > B_c$. For every $\eta \in (0, 1)$ there exist c > 0 and $\beta_0 > 0$ such that

$$F(\beta, h) \ge (1 - \eta)F(0, h),$$
 (3.1)

for $\beta \leq \beta_0$ and $c\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \leq h - h_c(0) \leq 1$. This implies in particular that $h_c(\beta) < h_c(0) + c\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}$, for every $\beta \leq \beta_0$.

Of course this proves part (2) of Theorem 1.5 and the upper bound in (1.20).

In this section $q := 2(B-1)^2/B^2$ and $\bar{q} := 2(B-1)/B$: note that in full generality $q < \bar{q} < 2$ and $\bar{q} > 1$, while q > 1 because we assume $B > B_c$. One can easily check that

$$\frac{\alpha}{2\alpha - 1} = \frac{\log \bar{q}}{\log q}.$$
(3.2)

Moreover in what follows some expressions are in the form max $A, A \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$: also when we do not state it explicitly, we do assume that A is not empty (in all cases this boils down to choosing β sufficiently small).

We start with an upper bound on the growth of $\langle R_n \rangle = (B-1) + P_n$ [recall (1.28)] for *n* not too large.

Lemma 3.2 If $P_0 = c_1 \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}$, $c_1 > 0$, then

$$P_n \le 2c_1 \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \bar{q}^n \le 1,$$
 (3.3)

🖉 Springer

for $n \leq N_1 := \max\{n : C_1(B)c_1\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\bar{q}^n \leq 1\}$, where

$$C_1(B) := 2 \max\left(\frac{1}{(\bar{q} - 1)B \log 2}, 1\right).$$
(3.4)

The next result controls the growth of the variance of R_n in the regime when $\langle R_n \rangle$ is close to (B-1), *i.e.*, P_n is small. Let us set $N_2 := \max\{n : (2c_1/(\bar{q} - 1))\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\bar{q}^n \le (\log 2)/2\}$. Observe that $N_2 \le N_1$ and recall that $Q_0 \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} \beta^2$, cf. (1.26).

Lemma 3.3 Under the same assumptions as in Lemma 3.2, for $Q_0 \le 2\beta^2$ and assuming $c_1 \ge 20^{\log \bar{q}/\log q}$ we have

$$Q_n \le 2Q_0 q^n, \tag{3.5}$$

for $n \leq N_2$.

Proof of Proposition 3.1. Let us choose c_1 as in Lemma 3.3. Let us observe also that, thanks to (3.2), $N_2 = \lfloor \log(1/\beta^2) / \log q - \log(Cc_1) / \log \bar{q} \rfloor$ for a suitable choice of the constant C = C(B). Therefore Lemma 3.3 ensures that

$$Q_{N_2} \le 4(Cc_1)^{-\log q/\log \bar{q}}.$$
(3.6)

From the definition of Q_n we directly see that $Q_{n+1} \leq 3Q_n$ if $Q_n \leq 1$, as in (2.11). Therefore for any fixed $\delta \in (0, 1/16)$

$$Q_{N_2+n} \le 3^n 4(Cc_1)^{-\log q/\log \bar{q}} \le 4\delta,$$
(3.7)

if

$$n \leq N_3 := \left\lfloor \frac{\log q \log(Cc_1)}{\log \bar{q} \log 3} - \frac{\log(1/\delta)}{\log 3} \right\rfloor.$$
(3.8)

Since $Q_{N_2+N_3} \leq 4\delta$ (by definition of N_3), we have then

$$\mathbb{P}\left(R_{N_2+N_3} \le \frac{1}{2} \langle R_{N_2+N_3} \rangle\right) \le 16\delta.$$
(3.9)

As a consequence, applying (1.12) and (1.18) with $N = N_2 + N_3$ one finds

$$F(\beta, h) \ge (1 - 16\delta)F(0, h) - 2^{-(N_2 + N_3)}c_3(B),$$
(3.10)

of course with *h* such that $P_0 = c_1 \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}$, *i.e.*,

$$h = \log\left((B-1) + c_1 \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\right).$$
 (3.11)

🖉 Springer

The last step consists in showing that the last term in the right-hand side of (3.10) is negligible with respect to the first one. A look at (3.8) shows that N_3 can be made arbitrarily large by choosing c_1 large; moreover, by definition of N_2 we have

$$2^{N_2} c_1^{1/\alpha} \beta^{2/(2\alpha-1)} \ge \frac{1}{2} C^{-1/\alpha}, \qquad (3.12)$$

for β sufficiently small. From these two facts and from the critical behavior of F(0, ·) [cf. (1.16)] one deduces that for any given δ one may take c_1 sufficiently large so that

$$2^{-(N_2+N_3)}/\mathsf{F}(0,h) \le \delta,\tag{3.13}$$

provided that $h \le h_c(0) + 1$. For a given $\eta \in (0, 1)$ this proves (3.1) whenever β is sufficiently small and $c\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \le h - h_c(0) \le 1$, with *c* sufficiently large (when η is small) but independent of β .

Proof of Lemma 3.2. Call N_0 the largest value of *n* for which $P_n \leq 2c_1\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\bar{q}^n$ (for c_1, β such that $P_0 \leq 1$). Recalling (1.28), for $n \leq N_0$ we have

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \le \bar{q} \left(1 + \frac{2c_1}{B\bar{q}} \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \bar{q}^n \right), \tag{3.14}$$

so that for $N \le N_0$, using the properties of $\exp(\cdot)$ and the elementary bound $\sum_{n=0}^{N-1} a^n \le a^N/(a-1)$ (a > 1), we obtain

$$P_N \le P_0 \,\bar{q}^N \exp\left(\frac{2c_1}{(\bar{q}-1)B} \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \bar{q}^N\right).$$
(3.15)

The latter estimate yields a lower bound on N_0 :

$$N_0 \ge \max\left\{n : \frac{2c_1}{(\bar{q}-1)B}\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\bar{q}^n \le \log 2\right\}.$$
 (3.16)

 N_1 is found by choosing it as the minimum between the right-hand side in (3.16) and the maximal value of *n* for which the second inequality in (3.3) holds. *Proof of Lemma 3.3.* Let us call N'_0 the largest *n* such that $Q_n \leq 2Q_0q^n [N'_0$ is introduced to control the nonlinearity in (1.25)] and let us work with $n \leq \min(N'_0, N_2)$. Since $N_2 \leq N_1$, (N_1 given in Lemma 3.2), the bound (3.3) holds and $P_n \leq 1$. Therefore, by using first (1.25) and (1.29), and then (3.3), we have

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \le q(1+P_n)\left(1+2\beta^2 q^n\right) \le q\left(1+2c_1\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\bar{q}^n+4\beta^2 q^n\right), \quad (3.17)$$

which implies

$$Q_n \le Q_0 q^n \exp\left(\frac{2c_1}{\bar{q}-1}\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}\bar{q}^n + \frac{4}{q-1}\beta^2 q^n\right).$$
(3.18)

🖉 Springer

By definition of N_2 the first term in the exponent is at most $(\log 2)/2$. Moreover $n \le N_2$ implies, via (3.2),

$$n \leq \frac{\log(1/\beta^2)}{\log q} - \frac{\log\left((4/\log 2)c_1/(\bar{q}-1)\right)}{\log \bar{q}},\tag{3.19}$$

and one directly sees that for such values of *n* we have $\beta^2 q^n \leq (4c_1/(\bar{q}-1) \log 2)^{-\log q/\log \bar{q}}$. Therefore also the second term in the exponent [*cf.* (3.18)] can be made smaller than $(\log 2)/2$ by choosing c_1 larger than a number that depends only on *B*, see the statement for an explicit expression.

Summing all up, for c_1 chosen suitably large, $Q_n \le 2Q_0q^n$ for $n \le \min(N'_0, N_2)$. But, by definition of N'_0 , this just means $n \le N_2$ and the proof is complete.

3.1 The $B = B_c$ case

Proposition 3.4 Set $B = B_c$. There exists β_0 such that for all $\beta \leq \beta_0$

$$h_c(\beta) - h_c(0) < \exp\left(-\frac{(\log 2)^2}{2\beta^2}\right).$$
 (3.20)

Remark 3.5 The constant $(\log 2)^2/2$ that appears in the exponential is certainly not the best possible. In fact, one can get arbitrarily close to the optimal constant log 2 given in [11], but we made the choice to keep the proof as simple as possible.

Proof of Proposition 3.4. Choose

$$h = e^{-(\log 2)^2/(2\beta^2)} + \log(B_c - 1), \qquad (3.21)$$

so that

$$P_0 = \exp(h) - (B_c - 1) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} (B_c - 1) \exp(-(\log 2)^2 / (2\beta^2)).$$
(3.22)

Given $\delta > 0$ small (for example, $\delta = 1/70$), we let n_{δ} be the integer uniquely identified (because of the strict monotonicity of $\{P_n\}_n$) by

$$P_{n_{\delta}} < \delta \le P_{n_{\delta}+1}, \tag{3.23}$$

(we assume that $P_0 < \delta$, which just means that we take β small enough). We observe that (1.28) implies $P_{n+1}/P_n \ge \sqrt{2}$ for every *n*, from which follows immediately that (say, for β sufficiently small)

$$n_{\delta} \le \left\lceil \frac{\log 2}{\beta^2} \right\rceil. \tag{3.24}$$

We want to show first of all that $Q_{n_{\delta}}$ is of the same order of magnitude as Q_0 , and therefore much smaller than $P_{n_{\delta}}$ (for β small) in view of $Q_0 \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} \beta^2$.

From (1.25), recalling the definition of P_n [cf. (1.28)] and the bound (1.29), we derive

$$Q_{n+1} = \left(\frac{\langle R_n \rangle^4}{\langle R_{n+1} \rangle^2 (B-1)^2}\right) \left(Q_n + \frac{1}{2}Q_n^2\right) \le Q_n \left(1 + P_n\right) \left(1 + \frac{Q_n}{2}\right). \quad (3.25)$$

If we define $c(\delta)$ through

$$c(\delta) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \delta 2^{-k/2} \right) \le \exp(\delta(2 + \sqrt{2})) \le \frac{21}{20},$$
(3.26)

from (3.25) we directly obtain that, as long as $Q_n \leq 3Q_0$ and $n \leq n_{\delta}$,

$$Q_n \le Q_0 \left(1 + (3/2)Q_0\right)^n \prod_{k=0}^{n-1} (1+P_n) \le c(\delta) Q_0 e^{(3/2)Q_0 n}.$$
 (3.27)

It is then immediate to check, using (1.26), that $Q_{n_{\delta}} \leq 3Q_0$ for β small.

But, as already exploited in (2.11), $Q_{n+1}/Q_n \le 3$ for every *n* such that $Q_n \le 1$, so that $Q_{n\delta+n} \le 4\beta^2 3^n \le 1$ for $n \le n_1 := \log_3(1/(4\beta^2)) - 1$. But for such values of *n*

$$P_{n_{\delta}+n} \ge \delta 2^{(n-1)/2},$$
 (3.28)

so that we directly see that $P_{n_{\delta}+n_1}$ diverges as β tends to zero, and therefore $\langle R_{n_{\delta}+n_1} \rangle$, can be made large for β small, while $Q_{n_{\delta}+n_1}$, that is the ratio between the variance of $R_{n_{\delta}+n_1}$ and $\langle R_{n_{\delta}+n_1} \rangle^2$ is bounded by 1. By exploiting $R_n \ge (B-1)/B$ for $n \ge 1$ and using Chebyshev inequality it is now straightforward to see that $\langle \log(R_{n_{\delta}+n_1}/B) \rangle > 0$ and by (1.12) [or, equivalently, (A.5)] we have F(β , h) > 0.

4 Free energy upper bounds beyond annealing

In this section we introduce our main new idea, which we briefly sketch here. In order to show that the free energy vanishes for h larger than, but close to, $h_c(0)$, we take the system at the *n*-th step of the iteration, for some $n = n(\beta)$ that scales suitably with β [in particular, $n(\beta)$ diverges for $\beta \rightarrow 0$] and we modify (via a tilting) the distribution \mathbb{P} of the disorder. If $\alpha > 1/2$, it turns out that one can perform such tilting so to guarantee on one hand that, under the new law, $R_{n(\beta)}$ is concentrated around 1, and, on the other hand, that the two laws are very close (they have a mutual density close to 1). This in turn implies that $R_{n(\beta)}$ is concentrated around 1 also under the original law \mathbb{P} , and the conclusion that $F(\beta, h) = 0$ follows then via the fact that if some non-integer moment (of order smaller than 1) of $R_{n_0} - 1$ is sufficiently small for some integer n_0 , then it remains so for every $n \ge n_0$ (cf. Proposition 4.1).

4.1 Fractional moment bounds

The following result says that if R_{n_0} is sufficiently concentrated around 1 for some $n_0 \ge 0$, then it remains concentrated for every $n > n_0$ and the free energy vanishes. In other words, we establish a *finite-volume condition for delocalization*.

Proposition 4.1 Let B > 2 and (β, h) be given. Assume that there exists $n_0 \ge 0$ and $(\log 2/\log B) < \gamma < 1$ such that $\langle ([R_{n_0} - 1]^+)^{\gamma} \rangle < B^{\gamma} - 2$. Then, $F(\beta, h) = 0$.

Proof of Proposition 4.1. We rewrite (1.6) as

$$R_{n+1} - 1 = \frac{1}{B} \left[\left(R_n^{(1)} - 1 \right) \left(R_n^{(2)} - 1 \right) + \left(R_n^{(1)} - 1 \right) + \left(R_n^{(2)} - 1 \right) \right], \quad (4.1)$$

and we use the inequalities $[rs + r + s]^+ \leq [r]^+[s]^+ + [r]^+ + [s]^+$, that holds for $r, s \geq -1$, and $(a + b)^{\gamma} \leq a^{\gamma} + b^{\gamma}$, that holds for $\gamma \in (0, 1]$ and $a, b \geq 0$. If we set $A_n := \langle ([R_n - 1]^+)^{\gamma} \rangle$ we have

$$A_{n+1} \leq \frac{1}{B^{\gamma}} \left[A_n^2 + 2A_n \right] \tag{4.2}$$

and therefore $A_n \searrow 0$ for $n \to \infty$ under the assumptions of the Proposition. Deducing $F(\beta, h) = 0$ (and actually more than that) is then immediate:

$$\langle \log R_n \rangle = \frac{1}{\gamma} \langle \log(R_n)^{\gamma} \rangle \le \frac{1}{\gamma} \langle \log \left[([R_n - 1]^+)^{\gamma} + 1 \right] \rangle \le \frac{1}{\gamma} \log(A_n + 1) \stackrel{n \to \infty}{\searrow} 0.$$
(4.3)

Proposition 4.1 will be essential in Sect. 4 to prove that, for $B > B_c$, an arbitrarily small amount of disorder shifts the critical point. Let us also point out that it implies that, if ω_1 is an unbounded random variable, then for any B > 2 and β sufficiently large quenched and annealed critical points differ (the analogous result for non-hierarchical pinning models was proven in [25, Corollary 3.2]):

Corollary 4.2 Assume that $\mathbb{P}(\omega_1 > t) > 0$ for every t > 0. Then, for every $h \in \mathbb{R}$ and B > 2 there exists $\bar{\beta}_0 < \infty$ such that $F(\beta, h) = 0$ for $\beta \ge \bar{\beta}_0$.

Proof of Corollary 4.2 Choose some $\gamma \in (\log 2/\log B, 1)$. One has $\lim_{\beta \to \infty} R_0 = 0 \mathbb{P}(d\omega)$ -a.s. [see (1.4) and note that $\log M(\beta)/\beta \to \infty$ for $\beta \to +\infty$ under our assumption on ω_1], while $\langle (([R_0 - 1]^+)^{\gamma})^{1/\gamma} \rangle \leq 1 + \langle R_0 \rangle = 1 + \exp(h)$, so $\lim_{\beta \to \infty} A_0 = 0$.

Remark 4.3 Note moreover that if we set $X = \exp(\beta\omega_1 - \log M(\beta))$ we have (without requiring ω_1 unbounded) that $\langle ([(B-1)X-1]^+)^{\gamma} \rangle \overset{B \to \infty}{\sim} B^{\gamma} \langle X^{\gamma} \rangle$. The right-hand side is smaller than $B^{\gamma} - 2$ for X non-degenerate and B large, so that if we choose $\delta > 0$ such that $\exp(\delta\gamma) \langle X^{\gamma} \rangle < 1$ we have

$$\langle ([(B-1)\exp(\delta)X-1]^+)^{\gamma} \rangle < B^{\gamma} - 2,$$
 (4.4)

for *B* sufficiently large. Therefore, by applying Proposition 4.1, we see that for every $\beta > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $F(\beta, h_c(0) + \delta) = 0$ for *B* sufficiently large. This observation actually follows also from the much more refined Proposition 4.5 below, which by the way says precisely how large *B* has to be taken: $B > B_c$.

Remark 4.4 It follows from inequality (4.2) that, if the assumptions of Proposition 4.1 are verified, then A_n actually vanishes exponentially fast for $n \to \infty$. Therefore, for $\varepsilon > 0$ one has

$$\mathbb{P}(R_n \ge 1 + \varepsilon) = \mathbb{P}([R_n - 1]^+ \ge \varepsilon) \le \frac{A_n}{\varepsilon^{\gamma}}, \tag{4.5}$$

and from the Borel–Cantelli lemma follows the almost sure convergence of R_n to 1 when we recall that $R_n^{(i)} \ge r_n$ with $r_0 = 0$ [r_n is the solution of the iteration scheme (1.2), converges to 1].

4.2 Upper bounds on the free energy for $B > B_c$

Here we want to prove the lower bound in (1.20), plus the fact that $h_c(\beta) > h_c$ whenever $\beta > 0$ and $B > B_c$. This follows from

Proposition 4.5 Let $B > B_c$. For every $\beta > 0$ one has $h_c(\beta) > h_c(0) (= \log(B-1))$. Moreover, there exists a positive constant c (possibly depending on B) such that for every $0 \le \beta \le 1$

$$h_c(\beta) - h_c(0) \ge c\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}.$$
 (4.6)

Proposition 4.5 is proven in Sect. 4.4, but first we need to state a couple of technical facts.

4.3 Auxiliary definitions and lemmas

For $\lambda \in \mathbb{R}$ and $N \in \mathbb{N}$ let $\mathbb{P}_{N,\lambda}$ be defined by

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{N,\lambda}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{\mathrm{M}(-\lambda)^N} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^N x_i\right). \tag{4.7}$$

Lemma 4.6 There exists $1 < C < \infty$ such that for $a \in (0, 1)$, $\delta \in (0, a/C)$ and $N \in \mathbb{N}$ we have

$$\mathbb{P}_{N,\frac{\delta}{\sqrt{N}}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{N,\frac{\delta}{\sqrt{N}}}}(\omega) < \exp(-a)\right) \leq C\left(\frac{\delta}{a}\right)^{2}.$$
(4.8)

Proof of Lemma 4.6. We write

$$\mathbb{P}_{N,\frac{\delta}{\sqrt{N}}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{N,\frac{\delta}{\sqrt{N}}}}(\omega) < \exp(-a)\right) = \mathbb{P}_{N,\frac{\delta}{\sqrt{N}}}\left(\delta\frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_{i}}{\sqrt{N}} + N\log M\left(-\frac{\delta}{\sqrt{N}}\right) < -a\right).$$
(4.9)

Since all exponential moments of ω_1 are assumed to be finite, one has

$$0 \ge \log \mathcal{M}(-\lambda) - \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left[\log \mathcal{M}(-\lambda) \right] \ge -\frac{C}{2} \lambda^2, \tag{4.10}$$

for some $1 < C < \infty$ and $0 \le \lambda \le 1$ [the first inequality is due to convexity of $\lambda \mapsto \log M(-\lambda)$]. Note also that

$$\mathbb{E}_{N,\lambda}(\omega_1) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left[\log \mathrm{M}(-\lambda) \right]. \tag{4.11}$$

Therefore, the right-hand side of (4.9) is bounded above by

$$\mathbb{P}_{N,\delta/\sqrt{N}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_{i}}{\sqrt{N}} - \mathbb{E}_{N,\delta/\sqrt{N}}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_{i}}{\sqrt{N}}\right] < -\frac{a}{2\delta}\right)$$
$$\leq \frac{4\delta^{2}}{a^{2}}\mathbb{E}_{N,\delta/\sqrt{N}}\left(\omega_{1} - \mathbb{E}_{N,\delta/\sqrt{N}}(\omega_{1})\right)^{2}, \qquad (4.12)$$

where we have used Chebyshev inequality and the fact that, under the assumptions we made, $(a/\delta) - (C/2)\delta > a/(2\delta)$. The proof of (4.8) is then concluded by observing that the variance of ω_1 under $\mathbb{P}_{N,\lambda}$ is $d^2/d\lambda^2 \log M(-\lambda)$, which is bounded uniformly for $0 \le \lambda \le 1$.

We define the sequence $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$, by setting $a_0 = a > 0$ and $a_{n+1} = f(a_n)$ with

$$f(x) := \sqrt{Bx + (B-1)^2} - (B-1).$$
(4.13)

We define also the sequence $\{b_n\}_{n=0,1,...}$ by setting $b_0 = b \in (-(B-2), 0)$ and $b_{n+1} = f(b_n)$. Note that $a_n = g(a_{n+1})$ and $b_n = g(b_{n+1})$ for $g(x) = (2(B-1)x + x^2)/B$.

Lemma 4.7 There exist two constants $G_a > 0$ et $H_b > 0$ such that for $n \to \infty$

$$a_n \sim G_a \left(\frac{B}{2(B-1)}\right)^n = G_a 2^{-\alpha n} \quad and \quad b_n \sim -H_b \left(\frac{B}{2(B-1)}\right)^n = -H_b 2^{-\alpha n}.$$

(4.14)

Moreover, $G_a \overset{a \to 0}{\sim} a$ and $H_b \overset{b \to 0}{\sim} |b|$.

🖉 Springer

Proof of Lemma 4.7. In order to lighten the proof we put s := B/(2(B-1)) and we observe that 0 < s < 1 since B > 2. The function $f(\cdot)$ is concave and f'(0) = s, so a_n vanishes exponentially fast:

$$a_n \le a \, s^n. \tag{4.15}$$

Moreover,

$$\frac{a_n}{s^n} = \frac{a_{n-1}}{s^{n-1}} \frac{1}{1 + a_n/(2(B-1))} \ge \frac{a_{n-1}}{s^{n-1}} \frac{1}{1 + as^n/(2(B-1))},$$
(4.16)

so that for every n > 0

$$\frac{a_n}{s^n} \ge a \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{1 + as^{\ell}/(2(B-1))} > 0.$$
(4.17)

From (4.16) we see that $a_n s^{-n}$ is monotone increasing in *n*, so that the first statement in (4.14) holds with $G_a \in (0, a)$ by (4.15) and (4.17). The fact that $G_a \sim a$ for $a \to 0$ follows from the fact that the product in (4.17) converges to 1 in this limit.

The second relation is proven in a similar way. Since $b_n < 0$ for every *n*, one has first of all

$$\frac{b_n}{s^n} = \frac{b_{n-1}}{s^{n-1}} \frac{1}{1 + b_n/(2(B-1))} < \frac{b_{n-1}}{s^{n-1}}.$$
(4.18)

Moreover, since $|b_n|$ decreases to zero and $f(x) \ge c_1(b)x$ for $b \le x \le 0$ for some $c_1(b) < 1$ if b > -(B - 2), one sees that $|b_n|$ actually vanishes exponentially fast. Therefore, from (4.18)

$$\frac{b_n}{s^n} \ge \frac{b_{n-1}}{s^{n-1}} \frac{1}{1 - c_2(b) c_1(b)^n} \ge b \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{1 - c_2(b) c_1(b)^{\ell}}.$$
(4.19)

One has then the second statement of (4.14) with $H_b \in (|b|, \infty)$.

4.4 Proof of Proposition 4.5

In this proof C_i , i = 1, 2, ..., denote constants depending only on β_0 and (possibly) on *B*. Recall that the exponent α defined in (1.17) satisfies $1/2 < \alpha < 1$ for $B > B_c$. Fix $\beta_0 > 0$, let $0 < \beta < \beta_0$ and choose $h = h(\beta)$ such that

$$\langle R_0 \rangle = (B-1) + \eta \beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}},$$
 (4.20)

🖉 Springer

where $\eta > 0$ will be chosen sufficiently small and independent of β later. Call $n_0 := n_0(\eta, \beta)$ the integer such that

$$\langle R_{n_0} \rangle \le B \le \langle R_{n_0+1} \rangle, \tag{4.21}$$

i.e., $P_{n_0} \le 1 \le P_{n_0+1}$. Note that $n_0(\eta, \beta)$ becomes larger and larger as $\beta \searrow 0$: this can be quantified since from (1.28) one sees that $a_n := P_{n_0-n}$ satisfies for $0 \le n < n_0$ the iteration $a_{n+1} = f(a_n)$ introduced in Sect. 4.3, and therefore it follows from Lemma 4.7 that

$$\left| n_0(\eta,\beta) - \log\left(\eta^{-1}\beta^{-\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}\right) / (\alpha\log 2) \right| \le C_1, \tag{4.22}$$

for every $0 < \eta < 1/C_1$ and $\beta \in [0, \beta_0]$. With the notations of Sect. 4.3, let $\widetilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P}_{2^{n_0}, \delta 2^{-n_0/2}}$, where $\delta := \delta(\eta)$ will be chosen suitably small later. Note that, with $\lambda := \delta 2^{-n_0/2}$, one has from (4.22)

$$\frac{1}{C_2} \delta \eta^{1/(2\alpha)} \beta^{1/(2\alpha-1)} \le \lambda \le C_2 \delta \eta^{1/(2\alpha)} \beta^{1/(2\alpha-1)}.$$
(4.23)

In particular, since $\alpha < 1$, if η is small enough then $\lambda \leq \beta$ uniformly for $\beta \leq \beta_0$. Observe also that

$$\widetilde{\mathbb{E}}(R_0) = \langle R_0 \rangle \frac{\mathcal{M}(\beta - \lambda)}{\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(-\lambda)},\tag{4.24}$$

and call $\phi(\cdot) := \log M(\cdot)$. Since $\phi(\cdot)$ is strictly convex, one has

$$\phi(\beta - \lambda) - \phi(\beta) - \phi(-\lambda) = -\int_{-\lambda}^{0} dx \int_{0}^{\beta} dy \, \phi''(x+y) \in \left(-\frac{\lambda\beta}{C_{3}}, -C_{3}\lambda\beta\right),$$
(4.25)

for some $C_3 > 0$, uniformly in $\beta \le \beta_0$ and $0 \le \lambda \le \beta$ and, thanks to (4.23), if η is chosen sufficiently small,

$$1 - \frac{\beta\lambda}{C_4} \le \frac{\mathcal{M}(\beta - \lambda)}{\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(-\lambda)} \le 1 - C_4\beta\lambda.$$
(4.26)

Therefore, from (4.24) and (4.23) and choosing

$$\eta^{1-1/(2\alpha)} \ll \delta(\eta) \ll 1, \tag{4.27}$$

(which is possible with η small since $\alpha > 1/2$) one has

$$-C_{5}^{-1}\delta(\eta)\,\eta^{1/(2\alpha)}\beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}} < \widetilde{\mathbb{E}}(R_{0}) - (B-1) \le -C_{5}\delta(\eta)\,\eta^{1/(2\alpha)}\beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}, \quad (4.28)$$

always uniformly in $\beta \leq \beta_0$.

Deringer
Since $b_n := \widetilde{\mathbb{E}}(R_{n_0-n}) - (B-1)$ satisfies the recursion $b_{n+1} = f(b_n)$, from the second statement of (4.14) if follows that

$$\widetilde{\mathbb{E}}R_{n_1} \leq \frac{B}{2},\tag{4.29}$$

for some integer $n_1 := n_1(\eta, \beta)$ satisfying

$$n_1 \le \left(\log \left(\delta(\eta)^{-1} \eta^{-1/(2\alpha)} \beta^{-2\alpha/(2\alpha-1)} \right) / (\alpha \log 2) \right) + C_6.$$
(4.30)

It is immediate to see that $n_0(\eta, \beta) - n_1(\eta, \beta)$ gets large (uniformly in β) for η small, if condition (4.27) is satisfied. Therefore, since the fixed point 1 of the iteration for $\mathbb{E}R_n$ is attractive, one has that

$$\mathbb{E}R_{n_0} \le 1 + r_1(\eta),$$
 (4.31)

(here and in the following, $r_i(\eta)$ with $i \in \mathbb{N}$ denotes a positive quantity which vanishes for $\eta \searrow 0$, uniformly in $\beta \le \beta_0$). On the other hand, one has deterministically

$$\lim_{n \to \infty} [1 - R_n]^+ = 0, \tag{4.32}$$

as one sees immediately comparing the evolution of R_n with that obtained setting $R_0^{(i)} = 0$ for every *i*. In particular, $R_{n_0} \ge 1 - r_2(\eta)$. An application of Markov's inequality gives

$$\widetilde{\mathbb{P}}(R_{n_0} \ge 1 + r_3(\eta)) \le r_3(\eta).$$
 (4.33)

It is immediate to prove that, given a random variable *X* and two mutually absolutely continuous laws \mathbb{P} and $\widetilde{\mathbb{P}}$, one has for every x, y > 0

$$\mathbb{P}(X \le 1+x) \ge e^{-y} \left[\widetilde{\mathbb{P}}(X \le 1+x) - \widetilde{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}} \le e^{-y}\right) \right].$$
(4.34)

Applying this to the case $X = R_{n_0}$ and using Lemma 4.6 with $r_4(\eta) > C\delta(\eta)$ gives

$$\mathbb{P}(R_{n_0} \le 1 + r_3(\eta)) \ge e^{-r_4(\eta)} \left[1 - r_3(\eta) - C\left(\frac{\delta(\eta)}{r_4(\eta)}\right)^2 \right].$$
 (4.35)

In particular, choosing

$$\delta(\eta) \ll r_4(\eta) \ll 1,\tag{4.36}$$

one has

$$\mathbb{P}(R_{n_0} \le 1 + r_3(\eta)) \ge 1 - r_5(\eta), \tag{4.37}$$

and we emphasize that this inequality holds uniformly in $\beta \leq \beta_0$.

🖉 Springer

At this point (4.6) is essentially proven: choose some $\gamma \in (\log 2/\log B, 1)$ and observe that

$$\langle \left([R_{n_0} - 1]^+ \right)^{\gamma} \rangle \leq r_3(\eta)^{\gamma} + \left(\mathbb{E} [R_{n_0} - 1]^+ \right)^{\gamma} \left(\mathbb{P} (R_{n_0} \geq 1 + r_3(\eta)) \right)^{1-\gamma} \\ \leq r_3(\eta)^{\gamma} + B^{\gamma} r_5(\eta)^{1-\gamma},$$

$$(4.38)$$

where in the first inequality we have used Hölder inequality and in the second one we have used (4.21) and (4.37). Finally, we remark that the quantity in (4.38) can be made smaller than $B^{\gamma} - 2$ choosing η small enough. At this point, we can apply Proposition 4.1 to deduce that $F(\beta, h) = 0$ for $h = \log(B - 1) + \eta\beta^{2\alpha/(2\alpha - 1)}$ with η small but finite, which proves (4.6).

We complete the proof by observing that $h_c(\beta) > \log(B-1)$ for every $\beta > 0$ follows from the arbitrariness of β_0 .

5 The delocalized phase

Here we prove Theorem 1.6 using the representation (A.11), given in Appendix A, for R_n . With reference to (A.11), let us observe that

$$\lim_{n \to \infty} p(n, \emptyset) = 1, \tag{5.1}$$

which is just a way to interpret

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 1. \tag{5.2}$$

when $r_0 = 0$, that follows directly from (1.2).

Fix $\epsilon > 0$ arbitrarily small and consider $h < h_c(\beta)$. Let \overline{R}_n be the partition function which corresponds to $h_c(\beta)$ and R_n the one that corresponds to h. We can find K large enough such that

$$\mathbb{P}\left(\bar{R}_n \ge K\right) \le \epsilon/2 \quad \text{for all } n \ge 1.$$
(5.3)

This follows from the fact that $\bar{R}_n \ge (B-1)/B$, and from (A.4). We define $C := (\log(2K/\epsilon))/(h_c(\beta) - h)$ and we write, using (A.11),

$$R_{n} = p(n, \emptyset) + \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, 2^{n}\}\\1 \leq |\mathcal{I}| \leq C}} p(n, \mathcal{I}) \exp\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} (\beta \omega_{i} - \log M(\beta) + h)\right)$$
$$+ \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, 2^{n}\}\\|\mathcal{I}| > C}} p(n, \mathcal{I}) \exp\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} (\beta \omega_{i} - \log M(\beta) + h)\right) =: T_{1} + T_{2} + T_{3}.$$
(5.4)

Deringer

T_1 is smaller than 1 and

$$T_3 \le \exp\left(-C(h_c(\beta) - h)\right) R_n,\tag{5.5}$$

so that $T_3 \le \epsilon/2$ with probability greater than $(1 - \epsilon/2)$ [*cf.* (5.3)] for all *n*. As for T_2 , its easy to compute and bound its expectation:

$$\left\langle \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, 2^n\}\\1 \le |\mathcal{I}| \le C}} p(n, \mathcal{I}) \exp\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} (\beta \omega_i - \log M(\beta) + h) \right) \right\rangle \le \exp(Ch)[1 - p(n, \emptyset)],$$
(5.6)

and (5.1) tells us that the right-hand side tends to zero when *n* goes to infinity. In particular we can find *N* (depending on *C*) such that for all $n \ge N$ we have

$$\left\langle \sum_{\substack{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, 2^n\}\\1 \le |\mathcal{I}| \le C}} p(n, \mathcal{I}) \exp\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} (\beta \omega_i - \log M(\beta) + h) \right) \right\rangle \le \epsilon^2 / 4.$$
(5.7)

Then for $n \ge N$ we have $\mathbb{P}(T_2 \ge \epsilon/2) \le \epsilon/2$. Altogether we have

$$\mathbb{P}(R_n \ge 1 + \epsilon) \le \epsilon, \tag{5.8}$$

and since R_n is bounded from below by $p(n, \emptyset)$ which tends to 1, the proof is complete.

Acknowledgments We are very much indebted to Bernard Derrida for drawing our attention to the hierarchical pinning model and for several enlightening discussions. We acknowledge also the support of ANR grant *POLINTBIO*, and F.L.T. acknowledges the support of ANR grant *LHMSHE*.

Note added in proof After this work was completed, a number of results have been proven by developing further the ideas set forth here, solving some of questions raised at the end of Sect. 1.6. First of all we were able (in collaboration with Derrida [10]) to extend the main idea of this work to the non-hierarchical set-up and we have shown that the quenched critical point (of the non-hierarchical model) is shifted with respect to the annealed value for arbitrarily small disorder, if $\alpha > 1/2$ (this result has been sharpened in [2], taking a different approach). Then one of us [21] has been able to show the shift of the critical point for arbitrarily small disorder (the case considered here is bond disorder, *cf*. Fig. 1) by using a location-dependent shift of the disorder variables in the change-of-measure argument (in the present paper, the shift is the same for each variable). Finally, very recently [16] we have also been able to treat the case $\alpha = 1/2$ ($B = B_c$), both for the hierarchical and non-hierarchical model, by introducing long range correlations in the auxiliary measure $\tilde{\mathbb{P}}$.

Appendix A. Existence of the free energy and annealed system estimates

A.1 Proof of Theorem 1.1

Since the basic induction (1.6) gives $R_n \ge (B-1)/B$ for every $n \ge 1$, one has

$$\frac{R_{n+1}}{B} \ge \frac{R_n^{(1)}}{B} \frac{R_n^{(2)}}{B},$$
(A.1)

and

$$R_{n+1} \leq \frac{R_n^{(1)} R_n^{(2)}}{B} + \frac{B}{B-1} R_n^{(1)} R_n^{(2)}, \qquad (A.2)$$

so that

$$(K_B R_{n+1}) \le (K_B R_n^{(1)}) (K_B R_n^{(2)})$$
 with $K_B = \frac{B^2 + B - 1}{B(B - 1)}$. (A.3)

Taking the logarithm of (A.1) and (A.3), we get that

$$\left\{2^{-n}\mathbb{E}\left[\log(R_n/B)\right]\right\}_{n=1,2,\dots} \text{ is non-decreasing,}$$
(A.4)

while

$$\left\{2^{-n}\mathbb{E}\left[\log(K_B R_n)\right]\right\}_{n=1,2,\dots} \text{ is non-increasing,}$$
(A.5)

so that both sequences are converging to the same limit

$$F(\beta, h) = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} \langle \log R_n \rangle$$
 (A.6)

and (1.12) immediately follows. It remains to be proven that the limit of $2^{-n} \log R_n$ exists $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost surely and in $\mathbb{L}^1(d\mathbb{P})$. Fixing some $k \ge 1$ and iterating (A.1) one obtains for n > k

$$2^{-n}\log(R_n/B) \ge 2^{-k} \left(2^{k-n} \sum_{i=1}^{2^{n-k}} \log(R_k^{(i)}/B)\right).$$
(A.7)

Using the strong law of large numbers in the right-hand side, we get

$$\liminf_{n \to \infty} 2^{-n} \log(R_n/B) \ge 2^{-k} \langle \log(R_k/B) \rangle \quad \mathbb{P}(d\omega) - \text{a.s.}$$
(A.8)

Hence taking the limit for $k \to \infty$ in the right-hand side again we obtain

$$\liminf_{n \to \infty} 2^{-n} \log R_n = \liminf_{n \to \infty} 2^{-n} \log(R_n/B) \ge F(\beta, h) \quad \mathbb{P}(d\omega) - \text{a.s.} \quad (A.9)$$

Deringer

Doing the same computations with (A.3) we obtain

$$\limsup_{n \to \infty} 2^{-n} \log R_n = \limsup_{n \to \infty} 2^{-n} \log(K_B R_n) \le F(\beta, h) \quad \mathbb{P}(d\omega) - a.s. \quad (A.10)$$

This ends the proof for the almost sure convergence. The proof of the $\mathbb{L}^1(d\mathbb{P})$ convergence is also fairly standard, and we leave it to the reader.

The fact that $F(\beta, \cdot)$ is non-decreasing follows from the fact that the same holds for $R_n(\beta, \cdot)$, and this is easily proved by induction on *n*. Convexity of $(\beta, h) \mapsto$ $F(\beta, h + \log M(\beta))$ is immediate from (1.7) (hence for B = 2, 3, ...,). But (1.7) can be easily generalized to every B > 1: this follows by observing that from (1.6) and (1.4) one has that

$$R_n = \sum_{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, 2^n\}} p(n, \mathcal{I}) \exp\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} (\beta \omega_i - \log M(\beta) + h)\right), \quad (A.11)$$

for suitable positive values $p(n, \mathcal{I})$, which depend on *B*: by setting $\beta = h = 0$ we see that $\sum_{\mathcal{I}} p(n, \mathcal{I}) = 1$ and hence R_n can be cast in the form of the expectation of a Boltzmann factor, like (1.7). This yields the desired convexity.

Remark A.1 Another consequence of (A.11) is that $F(\beta, h + \log M(\beta)) \ge F(0, h)$ [15, Chap. 5, Proposition 5.1].

A.2. Proof of Theorem 1.2

When $\beta = 0$ the iteration (1.6) reads

$$R_{n+1} = \frac{R_n^2 + (B-1)}{B}.$$
 (A.12)

A quick study of the function $x \mapsto [x^2 + (B - 1)]/B$, gives that $R_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ if and only if $R_0 > (B - 1)$. Initial conditions $R_0 < B - 1$ are attracted by the stable fixed point 1, while the fixed point (B - 1) is unstable. The inequality (A.1) guaranties that F(0, h) > 0 when $R_N > B$ for some N. This immediately shows that that $h_c(0) = \log(B - 1)$.

Next we prove (1.16), *i.e.*, that [with the notations in (1.30) and (1.31)] there exists a constant *C* such that

$$\frac{1}{C}\varepsilon^{1/\alpha} \le \widehat{F}(0,\varepsilon) \le C\varepsilon^{1/\alpha}$$
(A.13)

for all $\varepsilon \in (0, 1)$. To that purpose take $a := a_0$ such that $\widehat{F}(0, a) = 1$ (this is possible because of the convexity of $F(\beta, \cdot + \log M(\beta))$ we obtain both continuity and $\lim_{a\to\infty} \widehat{F}(0, a) = \infty$) and note that the sequence $\{a_n\}_{n\geq 0}$ defined just before Lemma

4.7 is such that $2\widehat{F}(0, a_{n+1}) = \widehat{F}(0, a_n)$, so that $\widehat{F}(0, a_{n+1}) = 2^{-n}$. Thanks to Lemma 4.7 we have that along this sequence

$$\widehat{\mathsf{F}}(0, a_n) \sim 2G_a^{-1/\alpha} a_n^{1/\alpha}. \tag{A.14}$$

Let K_a be such that $a_n \leq K_a a_{n+1}$ for all n, and c_a such that $c_a^{-1} a_n^{1/\alpha} \leq \widehat{F}(0, a_n) \leq c_a a_n^{1/\alpha}$. Then, for all n and all $\varepsilon \in [a_{n+1}, a_n]$, since $\widehat{F}(0, \cdot)$ is increasing we have

$$\widehat{\mathbf{F}}(0,\varepsilon) \ge \widehat{\mathbf{F}}(0,a_{n+1}) \ge c_a^{-1} a_{n+1}^{1/\alpha} \ge c_a^{-1} K_a^{-1/\alpha} \varepsilon^{1/\alpha},$$
$$\widehat{\mathbf{F}}(0,\varepsilon) \le \widehat{\mathbf{F}}(0,a_n) \le c_a a_n^{1/\alpha} \le c_a K_a^{1/\alpha} \varepsilon^{1/\alpha}.$$
(A.15)

Finally, the analyticity of $F(0, \cdot)$ on (h_c, ∞) follows for example from [8, Lemma 4.1].

A.3. About models with $B \leq 2$

We have chosen to work with the model (1.1), with positive initial data and B > 2, because this is the case that is directly related to pinning models and because in this framework we had the precise aim of proving the physical conjectures formulated in [11]. But of course the model is well defined for all $B \neq 0$ and in view of the direct link with the logistic map $z \mapsto Az(1-z)$, cf. (1.3), also the case $B \leq 2$ appears to be intriguing. Recall that A = 2(B-1)/B and note that $A \in (1, 2)$ if $B \in (2, \infty)$. What we want to point out here is mainly that the case of (1.1) with positive initial data and $B \in (1, 2), i.e., A \in (0, 1)$, is already contained in our analysis. This is simply the fact that there is a duality transformation relating this new framework to the one we have considered. Namely, if we let $B \in (1, 2)$ and we set $\widehat{R}_n := R_n/(B-1)$, then \widehat{R}_n satisfies (1.1) with B replaced by $\widehat{B} := B/(B-1) > 2$. Of course the fixed points of $x \mapsto (x^2 + \widehat{B} - 1)/\widehat{B}$ are again 1 (stable) and $\widehat{B} - 1$ (unstable). This transformation allows us to generalize immediately all the theorems we have proven in the obvious way, in particular the marginal case corresponds to $\widehat{B} = \widehat{B}_c := 2 + \sqrt{2}$, *i.e.*, $B = \sqrt{2}$ and in the irrelevant case $(B \in (\sqrt{2}, 2))$ the condition on $\Delta(\beta)$ in Theorem 1.4 now reads $M(2\beta)/(M(\beta))^2 < B^2 - 1$

This discussion leaves open the cases B = 1 and B = 2 to which we cannot apply directly our theorems, but:

- (1) If B = 1 the model is exactly solvable and R_n is equal to the product of 2^n positive IID random variables distributed like R_0 , so $F(\beta, h) = h \log M(\beta)$. The model in this case is a bit anomalous, since the stable fixed point is 0 and therefore the free energy can be negative and no phase transition is present (this appears to be the analogue of the non-hierarchical case with inter-arrival probabilities that decay exponentially fast [15, Chap. 1, Sect. 9]).
- (2) If B = 2 then, with reference to (1.2), $r_n \nearrow \infty$ if $r_0 > 1$ and $r_n \nearrow 1$ if $r_0 < 1$. The basic results like Theorem 1.1 are quickly generalized to cover this case. Only slightly more involved is the generalization of the other results, notably Theorem 1.4(1). In fact we cannot apply directly our results because the iteration

for P_n , that is $\langle R_n \rangle - 1$, reads $P_{n+1} = P_n + (P_n^2/2)$ [cf. (1.28)] so that the growth of P_n , for $P_0 > 0$, is just due to the nonlinear term and it is therefore slow as long as P_n is small. However the technique still applies [note in particular that, by (1.25) and (1.29), the variance of R_n decreases exponentially if $\Delta_0 < 2$ as long as P_n is sufficiently small] and along this line one shows that the disorder is irrelevant, at least as long as $\Delta_0 < 2$.

If we now let *B* run from 1 to infinity, we simply conclude that the disorder is irrelevant if $B \in (\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, and it is instead relevant in $B \in (1, \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$. In the case B = 1 (and, by duality, $B = \infty$) there is no phase transition.

Finally, a word about the models with B < 1. Various cases should be distinguished: going back to the logistic map, we easily see that playing on the values of B one can obtain values of |A| larger than 2 and the very rich behavior of the logistic map sets in [3]: non-monotone convergence to the fixed point, oscillations in a finite set of points, chaotic behavior, unbounded trajectories for any initial value. It appears that it is still possible to generalize our approach to deal with some of these cases, but this would lead us far from our original aim. Moreover, for B < 1 the property of positivity of R_n , and therefore its statistical mechanics interpretation as a partition function, is lost.

References

- 1. Alexander, K.S.: The effect of disorder on polymer depinning transitions. Commun. Math. Phys. **279**, 117–146 (2008)
- Alexander, K.S., Zygouras, N.: Quenched and annealed critical points in polymer pinning models. arXiv:0805.1708 [Math.PR]
- Beardon, A.F.: Iteration of Rational Functions, Graduate Texts in Mathematics, vol. 132. Springer, New York (1991)
- 4. Berker, A.N., Ostlund, S.: Renormalization-group calculations of finite systems: order parameter and specific heat for epitaxial ordering. J. Phys. C Solid State Phys. **12**, 4861–4975 (1979)
- Bleher P.M.: The Renormalization Group on Hierarchical Lattices. Stochastic Methods in Mathematics and Physics (Karpacz, 1988). World Science Publication, Teaneck, pp. 171–201 (1989)
- Collet, P., Eckmann, J.-P., Glaser, V., Martin, A.: A spin glass with random couplings. J. Stat. Phys. 36, 89–106 (1984)
- Collet, P., Eckmann, J.-P., Glaser, V., Martin, A.: Study of the iterations of a mapping associated to a spin glass model. Commun. Math. Phys. 94, 353–370 (1984)
- Costin, O., Kruskal, M.: Analytic methods for obstruction to integrability in discrete dynamical systems. Commun. Pure. Appl. Math. 58, 723–749 (2005)
- 9. Derrida, B., Gardner, E.: Renormalization group study of a disordered model. J. Phys. A Math. Gen. 17, 3223–3236 (1984)
- Derrida, B., Giacomin, G., Lacoin, H., Toninelli, F.L.: Fractional moment bounds and disorder relevance for pinning models. Commun. Math. Phys. arXiv:0712.2515 [math.PR] (2009), (to appear)
- Derrida, B., Hakim, V., Vannimenus, J.: Effect of disorder on two-dimensional wetting. J. Stat. Phys. 66, 1189–1213 (1992)
- Derrida, B., Itzykson, C., Luck, J.M.: Oscillatory critical amplitudes in hierarchical models. Commun. Math. Phys. 94, 115–132 (1984)
- 13. Fisher, M.E.: Walks, walls, wetting, and melting. J. Stat. Phys. 34, 667-729 (1984)
- Forgacs, G., Luck, J.M., Nieuwenhuizen, Th.M., Orland, H.: Wetting of a disordered substrate: exact critical behavior in two dimensions. Phys. Rev. Lett. 57, 2184–2187 (1986)
- 15. Giacomin, G.: Random Polymer Models. IC Press, World Scientific, London (2007)
- Giacomin, G., Lacoin, H., Toninelli, F.L.: Marginal relevance of disorder for pinning models. arXiv:0811.0723 [math-ph]
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: Estimates on path delocalization for copolymers at selective interfaces. Probab. Theor. Rel. Fields 133, 464–482 (2005)

- 18. Giacomin, G., Toninelli, F.L.: The localized phase of disordered copolymers with adsorption. ALEA 1, 149–180 (2006)
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. Commun. Math. Phys. 266, 1–16 (2006)
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: On the irrelevant disorder regime of pinning models. Ann. Probab. arXiv:0707.3340 [math.PR] (2009), (to appear)
- 21. Lacoin, H.: Hierarchical pinning model with site disorder: disorder is marginally relevant. arXiv:0807.4864 [math.PR]
- 22. Lacoin, H., Toninelli, F.L.: A smoothing inequality for hierarchical pinning models. In: Proceedings of the Summer School "Spin Glasses" (Paris, June 2007), (to appear)
- 23. Monthus, C., Garel, T.: Critical points of quadratic renormalizations of random variables and phase transitions of disordered polymer models on diamond lattices. Phys. Rev. E **77**, 021132 (2008)
- 24. Toninelli, F.L.: A replica-coupling approach to disordered pinning models. Commun. Math. Phys. 280, 389-401 (2008)
- Toninelli, F.L.: Disordered pinning models and copolymers: beyond annealed bounds. Ann. Appl. Probab. 18, 1569–1587 (2008)

Fractional Moment Bounds and Disorder Relevance for Pinning Models

Bernard Derrida¹, Giambattista Giacomin², Hubert Lacoin², Fabio Lucio Toninelli³

- ¹ Laboratoire de Physique Statistique, Département de Physique, École Normale Supérieure, 24, Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.
 E-mail: derrida@lps.ens.fr
- ² Université Paris Diderot (Paris 7) and Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires (CNRS U.M.R. 7599), U.F.R. Mathématiques, Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.
 E-mail: giacomin@math.jussieu.fr; hlacoin@gmail.com
- ³ Laboratoire de Physique, ENS Lyon (CNRS U.M.R. 5672), 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France. E-mail: fabio-lucio.toninelli@ens-lyon.fr

Received: 11 January 2008 / Accepted: 24 November 2008 Published online: 17 February 2009 – © Springer-Verlag 2009

Abstract: We study the critical point of directed pinning/wetting models with quenched disorder. The distribution $K(\cdot)$ of the location of the first contact of the (free) polymer with the defect line is assumed to be of the form $K(n) = n^{-\alpha-1}L(n)$, with $\alpha > 0$ and $L(\cdot)$ slowly varying. The model undergoes a (de)-localization phase transition: the free energy (per unit length) is zero in the delocalized phase and positive in the localized phase. For $\alpha < 1/2$ disorder is irrelevant: quenched and annealed critical points coincide for small disorder, as well as quenched and annealed critical exponents [3,28]. The same has been proven also for $\alpha = 1/2$, but under the assumption that $L(\cdot)$ diverges sufficiently fast at infinity, a hypothesis that is not satisfied in the (1 + 1)-dimensional wetting model considered in [12,17], where $L(\cdot)$ is asymptotically constant. Here we prove that, if $1/2 < \alpha < 1$ or $\alpha > 1$, then quenched and annealed critical points differ whenever disorder is present, and we give the scaling form of their difference for small disorder. In agreement with the so-called Harris criterion, disorder is therefore relevant in this case. In the marginal case $\alpha = 1/2$, under the assumption that $L(\cdot)$ vanishes sufficiently fast at infinity, we prove that the difference between quenched and annealed critical points, which is smaller than any power of the disorder strength, is positive: disorder is *marginally relevant*. Again, the case considered in [12, 17] is out of our analysis and remains open.

The results are achieved by setting the parameters of the model so that the annealed system is localized, but close to criticality, and by first considering a quenched system of size that does not exceed the correlation length of the annealed model. In such a regime we can show that the expectation of the partition function raised to a suitably chosen power $\gamma \in (0, 1)$ is small. We then exploit such an information to prove that the expectation of the same fractional power of the partition function goes to zero with the size of the system, a fact that immediately entails that the quenched system is delocalized.

1. Introduction

Pinning/wetting models with quenched disorder describe the random interaction between a directed polymer and a one-dimensional *defect line*. In absence of interaction, a typical polymer configuration is given by $\{(n, S_n)\}_{n\geq 0}$, where $\{S_n\}_{n\geq 0}$ is a Markov Chain on some state space Σ (for instance, $\Sigma = \mathbb{Z}^d$ for (1 + d)-dimensional directed polymers), and the initial condition S_0 is some fixed element of Σ which by convention we call 0. The defect line, on the other hand, is just $\{(n, 0)\}_{n\geq 0}$. The polymer-line interaction is introduced as follows: each time $S_n = 0$ (*i.e.*, the polymer touches the line at step *n*) the polymer gets an energy reward/penalty ϵ_n , which can be either positive or negative. In the situation we consider here, the ϵ_n 's are independent and identically distributed (IID) random variables, with positive or negative mean *h* and variance $\beta^2 \ge 0$.

Up to now, we have made no assumption on the Markov Chain. The physically most interesting case is the one where the distribution $K(\cdot)$ of the first return time, call it τ_1 , of S_n to 0 has a power-law tail: $K(n) := \mathbf{P}(\tau_1 = n) \approx n^{-\alpha-1}$, with $\alpha \ge 0$. This framework allows to cover various situations motivated by (bio)-physics: for instance, (1 + 1)-dimensional wetting models [12, 17] ($\alpha = 1/2$; in this case $S_n \ge 0$, and the line represents an impenetrable wall), pinning of (1 + d)-dimensional directed polymers on a columnar defect ($\alpha = 1/2$ if d = 1 and $\alpha = d/2 - 1$ if $d \ge 2$), and the Poland-Scheraga model of DNA denaturation (here, $\alpha \simeq 1.15$ [27]). This is a very active field of research, and not only from the point of view of mathematical physics, see . *e.g.* [11] and references therein. We refer to [20, Ch. 1] and references therein for further discussion.

The model undergoes a localization/delocalization phase transition: for any given value β of the disorder strength, if the average pinning intensity *h* exceeds some critical value $h_c(\beta)$ then the polymer typically stays tightly close to the defect line and the free energy is positive. On the contrary, for $h < h_c(\beta)$ the free energy vanishes and the polymer has only few contacts with the defect: entropic effects prevail. The annealed model, obtained by averaging the Boltzmann weight with respect to disorder, is exactly solvable, and near its critical point $h_c^{ann}(\beta)$ one finds that the annealed free energy vanishes like $(h - h_c^{ann}(\beta))^{\max(1,1/\alpha)}$ [16]. In particular, the annealed phase transition is first order for $\alpha > 1$ and second order for $\alpha < 1$, and it gets smoother and smoother as α approaches 0.

A very natural and intriguing question is whether and how randomness affects critical properties. The scenario suggested by the *Harris criterion* [26] is the following: disorder should be irrelevant for $\alpha < 1/2$, meaning that quenched critical point and critical exponents should coincide with the annealed ones if β is small enough, and relevant for $\alpha > 1/2$: they should differ for every $\beta > 0$. In the marginal case $\alpha = 1/2$, the Harris criterion gives no prediction and there is no general consensus on what to expect: renormalization-group considerations led Forgacs et al. [17] to predict that disorder is irrelevant (see also the recent [18]), while Derrida et al. [12] concluded for marginal relevance: quenched and annealed critical points should differ for every $\beta > 0$, even if the difference is zero at every perturbative order in β .

The mathematical understanding of these questions witnessed remarkable progress recently, and we summarize here the state of the art (prior to the present contribution).

- (1) A lot is now known on the *irrelevant-disorder regime*. In particular, it was proven in [3] (see [28] for an alternative proof) that quenched and annealed critical points and critical exponents coincide for β small enough. Moreover, in [25] a small-disorder expansion of the free energy, worked out in [17], was rigorously justified.
- (2) In the *strong-disorder regime*, for which the Harris criterion makes no prediction, a few results were obtained recently. In particular, in [29] it was proven that

for any given $\alpha > 0$ and, say, for Gaussian randomness, $h_c(\beta) \neq h_c^{ann}(\beta)$ for β large enough, and the asymptotic behavior of $h_c(\beta)$ for $\beta \to \infty$ was computed. These results were obtained through upper bounds on fractional moments of the partition function. Let us mention by the way that the fractional moment method allowed also to compute exactly [29] the quenched critical point of a *diluted wetting model* (a model with a built-in strong-disorder limit); the same result was obtained in [8] via a rigorous implementation of renormalization-group ideas. Fractional moment methods have proven to be useful also for other classes of disordered models [1,2,9,15].

- (3) The *relevant-disorder regime* is only partly understood. In [24] it was proven that the free-energy critical exponent differs from the quenched one whenever $\beta > 0$ and $\alpha > 1/2$. However, the arguments in [24] do not imply the critical point shift. Nonetheless, the critical point shift issue has been recently solved for a *hierarchical version* of the model, introduced in [12]. The hierarchical model also depends on the parameter α , and in [21] it was shown that $h_c(\beta) h_c^{ann}(\beta) \approx \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}$ for β small (upper and lower bounds of the same order are proven).
- (4) In the *marginal case* α = 1/2 it was proven in [3,28] that the difference h_c(β) h_c^{ann}(β) vanishes faster than any power of β, for β → 0. Before discussing lower bounds on this difference, one has to be more precise on the tail behavior of K(n), the probability that the first return to zero of the Markov Chain {S_n}_n occurs at n: if K(n) = n^{-(1+1/2)}L(n) with L(·) slowly varying (say, a logarithm raised to a positive or negative power), then the two critical points coincide for β small [3,28] if L(·) diverges sufficiently fast at infinity so that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nL(n)^2} < \infty.$$

$$(1.1)$$

The case of the (1+1)-dimensional wetting model [12] corresponds however to the case where $L(\cdot)$ behaves like a constant at infinity, and the result just mentioned does not apply.

The case $\alpha = 1/2$ is open also for the hierarchical model mentioned above.

In the present work we prove that if $\alpha \in (1/2, 1)$ or $\alpha > 1$ then quenched and annealed critical points differ for every $\beta > 0$, and $h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \approx \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}$ for $\beta \searrow 0$ (*cf.* Theorem 2.3 for a more precise statement). In the case $\alpha = 1/2$, while we do not prove that $h_c(\beta) \neq h_c^{ann}(\beta)$ in all cases in which condition (1.1) fails, we do prove such a result if the function $L(\cdot)$ vanishes sufficiently fast at infinity. Of course, $h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta)$ turns out to be exponentially small for $\beta \searrow 0$.

We wish to emphasize that, although the Harris criterion is expected to be applicable to a large variety of disordered models, rigorous results are very rare: let us mention however [10,14].

Starting from the next section, we will forget the full Markov structure of the polymer, and retain only the fact that the set of points of contact with the defect line, $\tau := \{n \ge 0 : S_n = 0\}$, is a renewal process under the law **P** of the Markov Chain.

2. Model and Main Results

Let $\tau := \{\tau_0, \tau_1, ...\}$ be a renewal sequence started from $\tau_0 = 0$ and with inter-arrival law $K(\cdot)$, *i.e.*, $\{\tau_i - \tau_{i-1}\}_{i \in \mathbb{N}:=\{1,2,...\}}$ are IID integer-valued random variables with law

 $\mathbf{P}(\tau_1 = n) = K(n)$ for every $n \in \mathbb{N}$. We assume that $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$ (the renewal is recurrent) and that there exists $\alpha > 0$ such that

$$K(n) = \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}} \tag{2.1}$$

with $L(\cdot)$ a function that varies slowly at infinity, *i.e.*, $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$ is measurable and such that $L(rx)/L(x) \to 1$ when $x \to \infty$, for every r > 0. We refer to [6] for an extended treatment of slowly varying functions, recalling just that examples of L(x) include $(\log(1 + x))^b$, any $b \in \mathbb{R}$, and any (positive, measurable) function admitting a positive limit at infinity (in this case we say that $L(\cdot)$ is *trivial*). Dwelling a bit more on nomenclature, $x \mapsto x^{\rho}L(x)$ is a *regularly varying function of exponent* ρ , so $K(\cdot)$ is just the restriction to the natural numbers of a regularly varying function of exponent $-(1 + \alpha)$.

We let $\beta \ge 0$, $h \in \mathbb{R}$ and $\omega := \{\omega_n\}_{n\ge 1}$ be a sequence of IID centered random variables with unit variance and finite exponential moments. The law of ω is denoted by \mathbb{P} and the corresponding expectation by \mathbb{E} .

For $a, b \in \{0, 1, ...\}$ with $a \le b$ we let $Z_{a,b,\omega}$ be the partition function for the system on the interval $\{a, a + 1, ..., b\}$, with zero boundary conditions at both endpoints:

$$Z_{a,b,\omega} = \mathbf{E} \left(e^{\sum_{n=a+1}^{b} (\beta \omega_n + h) \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}} \mathbf{1}_{\{b \in \tau\}} \middle| a \in \tau \right),$$
(2.2)

where **E** denotes expectation with respect to the law **P** of the renewal. One may rewrite $Z_{a,b,\omega}$ more explicitly as

$$Z_{a,b,\omega} = \sum_{\ell=1}^{b-a} \sum_{i_0=a < i_1 < \dots < i_\ell = b} \prod_{j=1}^{\ell} K(i_j - i_{j-1}) e^{h\ell + \beta \sum_{j=1}^{\ell} \omega_{i_j}},$$
(2.3)

with the convention that $Z_{a,a,\omega} = 1$. Notice that, when writing $n \in \tau$, we are interpreting τ as a subset of $\mathbb{N} \cup \{0\}$ rather than as a sequence of random variables. We will write for simplicity $Z_{N,\omega}$ for $Z_{0,N,\omega}$ (and in that case the conditioning on $0 \in \tau$ in (2.2) is superfluous since $\tau_0 = 0$). In absence of disorder ($\beta = 0$), it is convenient to use the notation

$$Z_N(h) := \mathbf{E}\left(e^{h\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}} \mathbf{1}_{\{N\in\tau\}}\right) = \mathbf{E}\left(e^{h|\tau\cap\{1,\dots,N\}|} \mathbf{1}_{\{N\in\tau\}}\right),$$
(2.4)

for the partition function.

We mention that the recurrence assumption $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$ entails no loss of generality, since one can always reduce to this situation via a redefinition of *h* (*cf.* [20, Ch. 1]).

As usual the quenched free energy is defined as

$$F(\beta, h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}.$$
(2.5)

It is well known (*cf.* for instance [20, Ch. 4]) that the limit (2.5) exists $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost surely and in $\mathbb{L}^1(\mathbb{P})$, and that it is almost-surely independent of ω . Another well-established fact is that $F(\beta, h) \ge 0$, which immediately follows from $Z_{N,\omega} \ge K(N) \exp(\beta \omega_N + h)$. This allows to define, for a given $\beta \ge 0$, the critical point $h_c(\beta)$ as

$$h_c(\beta) := \sup\{h \in \mathbb{R} : F(\beta, h) = 0\}.$$

$$(2.6)$$

It is well known that $h > h_c(\beta)$ corresponds to the *localized phase* where typically τ occupies a non-zero fraction of $\{1, \ldots, N\}$ while, for $h < h_c(\beta), \tau \cap \{1, \ldots, N\}$ contains with large probability at most $O(\log N)$ points [23]. We refer to [20, Chs. 7 and 8] for further literature and discussion on this point.

In analogy with the quenched free energy, the annealed free energy is defined by

$$\mathbf{F}^{ann}(\boldsymbol{\beta},h) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_{N,\omega} = \mathbf{F}(0,h + \log \mathbf{M}(\boldsymbol{\beta})), \tag{2.7}$$

with

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}) := \mathbb{E}(e^{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\omega}_1}). \tag{2.8}$$

We see therefore that the annealed free energy is just the free energy of the pure model ($\beta = 0$) with a different value of *h*. The pure model is exactly solvable [16], and we collect here a few facts we will need in the course of the paper.

Theorem 2.1 [20, Th. 2.1]. For the pure model $h_c(0) = 0$. Moreover, there exists a slowly varying function $\widehat{L}(\cdot)$ such that for h > 0 one has

$$F(0,h) = h^{1/\min(1,\alpha)} \widehat{L}(1/h).$$
(2.9)

In particular,

- (1) if $\mathbf{E}(\tau_1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n K(n) < \infty$ (for instance, if $\alpha > 1$) then $\widehat{L}(1/h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} 1/\mathbf{E}(\tau_1)$;
- (2) if $\alpha \in (0, 1)$, then $\widehat{L}(1/h) = C_{\alpha}h^{-1/\alpha}R_{\alpha}(h)$, where C_{α} is an explicit constant and $R_{\alpha}(\cdot)$ is the function, unique up to asymptotic equivalence, that satisfies $R_{\alpha}(b^{\alpha}L(1/b)) \stackrel{b \geq 0}{\longrightarrow} b$.

As a consequence of Theorem 2.1 and (2.7), the annealed critical point is simply given by

$$h_c^{ann}(\beta) := \sup\{h : F^{ann}(\beta, h) = 0\} = -\log M(\beta).$$
 (2.10)

Via Jensen's inequality one has immediately that $F(\beta, h) \leq F^{ann}(\beta, h)$ and as a consequence $h_c(\beta) \geq h_c^{ann}(\beta)$, and the point of the present paper is to understand when this last inequality is strict. In this respect, let us recall that the following is known: if $\alpha \in (0, 1/2)$, then $h_c(\beta) = h_c^{ann}(\beta)$ for β small enough [3,28]. Also for $\alpha = 1/2$ it has been shown that $h_c(\beta) = h_c^{ann}(\beta)$ if $L(\cdot)$ diverges sufficiently fast (see below). Moreover, assuming that $\mathbb{P}(\omega_1 > t) > 0$ for every t > 0, one has that for every $\alpha > 0$ and $L(\cdot)$ there exists $\beta_0 < \infty$ such that $h_c(\beta) \neq h_c^{ann}(\beta)$ for $\beta > \beta_0$ [29]: quenched and annealed critical points differ for *strong disorder*. The strategy we develop here addresses the complementary situations: $\alpha > 1/2$ and *small disorder* (and also the case $\alpha = 1/2$ as we shall see below).

Our first result concerns the case $\alpha > 1$:

Theorem 2.2. Let $\alpha > 1$. There exists a > 0 such that for every $\beta \leq 1$,

$$h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \ge a\beta^2.$$
(2.11)

Moreover, $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$ *for every* $\beta > 0$ *.*

Since $h_c(\beta) \le h_c(0) = 0$ and $h_c^{ann}(\beta) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} -\beta^2/2$, we conclude that the inequality (2.11) is, in a sense, of the optimal order in β . Note that $h_c(\beta) \le h_c(0)$ is just a consequence of Jensen's inequality:

$$Z_{N,\omega} = Z_N(h) \frac{\mathbf{E}\left(e^{\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}}\mathbf{1}_{\{N\in\tau\}}\right)}{\mathbf{E}\left(e^{h\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}}\mathbf{1}_{\{N\in\tau\}}\right)}$$

$$\geq Z_N(h) \exp\left[\beta \sum_{n=1}^N \omega_n \frac{\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}e^{h|\tau\cap\{1,\dots,N\}|}\mathbf{1}_{\{N\in\tau\}}\right)}{\mathbf{E}\left(e^{h|\tau\cap\{1,\dots,N\}|}\mathbf{1}_{\{N\in\tau\}}\right)}\right], \qquad (2.12)$$

from which $F(\beta, h) \ge F(0, h)$ and therefore $h_c(\beta) \le h_c(0)$ immediately follows from $\mathbb{E}(\omega_n) = 0$. This can be made sharper in the sense that from the explicit bound in [20, Th. 5.2(1)] one directly extracts also that $h_c(\beta) \le -b\beta^2$ for a suitable $b \in (0, 1/2)$ and every $\beta \le 1$, so that $-h_c(\beta)/\beta^2 \in (b, 1/2-a)$. We recall also that the (strict) inequality $h_c(\beta) < h_c(0)$ has been established in great generality in [4].

In the case $\alpha \in (1/2, 1)$ we have the following:

Theorem 2.3. Let $\alpha \in (1/2, 1)$. For every $\varepsilon > 0$ there exists $a(\varepsilon) > 0$ such that

$$h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \ge a(\varepsilon) \,\beta^{(2\alpha/(2\alpha-1))+\varepsilon},\tag{2.13}$$

for $\beta \leq 1$. Moreover, $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$ for every $\beta > 0$.

To appreciate this result, recall that in [3,28] it was proven that

$$h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \le \widetilde{L}(1/\beta)\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)},$$
(2.14)

for some (rather explicit, *cf.* in particular [3]) slowly varying function $\hat{L}(\cdot)$. Notably, $\tilde{L}(\cdot)$ is trivial if $L(\cdot)$ is. The conclusion of Theorem 2.3 can actually be strengthened and we are able to replace the right-hand side of (2.13) with $\bar{L}(1/\beta)\beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}$ with $\bar{L}(\cdot)$ another slowly varying function, but on one hand $\bar{L}(\cdot)$ does not match the bound in (2.14) and on the other hand it is rather clear that it reflects more a limit of our technique than the actual behavior of the model; therefore, we decided to present the simpler argument leading to the slightly weaker result (2.13).

The case $\alpha = 1/2$ is the most delicate, and whether quenched and annealed critical points coincide or not crucially depends on the slowly varying function $L(\cdot)$. In [3,28] it was proven that, whenever

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n\,L(n)^2} < \infty,\tag{2.15}$$

there exists $\beta_0 > 0$ such that $h_c(\beta) = h_c^{ann}(\beta)$ for $\beta \le \beta_0$, and that when the same sum diverges then $h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta)$ is bounded *above* by some function of β which vanishes faster than any power for $\beta \searrow 0$. For instance, if $L(\cdot)$ is asymptotically constant then

$$h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \le c_1 e^{-c_2/\beta^2},$$
 (2.16)

for $\beta \leq 1$. While we are not able to prove that quenched and annealed critical points differ as soon as condition (2.15) fails (in particular not when $L(\cdot)$ is asymptotically constant), our method can be pushed further to prove this if $L(\cdot)$ vanishes sufficiently fast at infinity:



Fig. 1. The decomposition of the partition function is simply obtained by fixing a value of k and summing over the values of the last contact (or renewal epoch) before N - k and the first after N - k. In the drawing the two contacts are respectively N - n and N - j and arcs of course identify steps between successive contacts

Theorem 2.4. *Assume that for every* $n \in \mathbb{N}$ *,*

$$K(n) \le c \frac{n^{-3/2}}{(\log n)^{\eta}},\tag{2.17}$$

for some c > 0 and $\eta > 1/2$. Then for every $0 < \varepsilon < \eta - 1/2$ there exists $a(\varepsilon) > 0$ such that

$$h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \ge a(\varepsilon) \exp\left(-\frac{1}{\beta^{\frac{1}{\eta - 1/2 - \varepsilon}}}\right).$$
 (2.18)

Moreover, $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$ *for every* $\beta > 0$ *.*

2.1. Fractional moment method. In order to introduce our basic idea and, effectively, start the proof, we need some additional notation. We fix some $k \in \mathbb{N}$ and we set for $n \in \mathbb{N}$

$$z_n := e^{h + \beta \omega_n}. \tag{2.19}$$

Then, the following identity holds for $N \ge k$:

$$Z_{N,\omega} = \sum_{n=k}^{N} Z_{N-n,\omega} \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j) \, z_{N-j} Z_{N-j,N,\omega}.$$
(2.20)

This is simply obtained by decomposing the partition function (2.2) according to the value N - n of the last point of τ which does not exceed N - k (whence the condition $0 \le N - n \le N - k$ in the sum), and to the value N - j of the first point of τ to the right of N - k (so that $N - k < N - j \le N$). It is important to notice that $Z_{N-j,N,\omega}$ has the same law as $Z_{j,\omega}$ and that the three random variables $Z_{N-n,\omega}$, z_{N-j} and $Z_{N-j,N,\omega}$ are independent, provided that $n \ge k$ and j < k.

Let $0 < \gamma < 1$ and $A_N := \mathbb{E}[(Z_{N,\omega})^{\gamma}]$, with $A_0 := 1$. Then, from (2.20) and using the elementary inequality

$$(a_1 + \dots + a_n)^{\gamma} \le a_1^{\gamma} + \dots + a_n^{\gamma}, \qquad (2.21)$$

which holds for $a_i \ge 0$, one deduces

$$A_N \le \mathbb{E}\left[z_1^{\gamma}\right] \sum_{n=k}^N A_{N-n} \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j)^{\gamma} A_j.$$
(2.22)

The basic principle is the following:

Proposition 2.5. *Fix* β *and* h*. If there exists* $k \in \mathbb{N}$ *and* $\gamma < 1$ *such that*

$$\rho := \mathbb{E}\left[z_1^{\gamma}\right] \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j)^{\gamma} A_j \le 1,$$
(2.23)

then $F(\beta, h) = 0$. Moreover if $\rho < 1$ there exists $C = C(\rho, \gamma, k, K(\cdot)) > 0$ such that

$$A_N \leq C \left(K(N) \right)^{\gamma}, \tag{2.24}$$

for every N.

Of course, in view of the results we want to prove, the main result of Proposition 2.5 is the first one. The second one, namely (2.24), is however of independent interest and may be used to obtain path estimates on the process (using for example the techniques in [23] and [20, Ch. 8]).

Proof of Proposition 2.5. Let $\overline{A} := \max\{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$. From (2.22) it follows that for every $N \ge k$

$$A_N \leq \rho \max\{A_0, \dots, A_{N-k}\},$$
 (2.25)

from which one sees by induction that, since $\rho \le 1$, for every *n* one has $A_n \le \overline{A}$. The statement $F(\beta, h) = 0$ follows then from Jensen's inequality:

$$F(\beta, h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\gamma} \mathbb{E} \log(Z_{N,\omega})^{\gamma} \le \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\gamma} \log A_N = 0.$$
(2.26)

In order to prove (2.24) we introduce

$$Q_k(n) := \begin{cases} \mathbb{E}[z_1^{\gamma}] \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j)^{\gamma} A_j, & \text{if } n \ge k, \\ 0 & \text{if } n = 1, \dots k-1. \end{cases}$$
(2.27)

Since $\rho = \sum_{n} Q_k(n)$, the assumption $\rho < 1$ tells us that $Q_k(\cdot)$ is a sub-probability distribution and it becomes a probability distribution if we set, as we do, $Q_k(\infty) := 1 - \rho$. Therefore the renewal process $\tilde{\tau}$ with inter-arrival law $Q_k(\cdot)$ is *terminating*, that is $\tilde{\tau}$ contains, almost surely, only a finite number of points. A particularity of terminating renewals with regularly varying inter-arrival distribution is the asymptotic equivalence, up to a multiplicative factor, of inter-arrival distribution and mass renewal function ([20, Th. A.4]), namely

$$u_N \stackrel{N \to \infty}{\sim} \frac{1}{(1-\rho)^2} Q_k(N), \qquad (2.28)$$

where $u_N := \mathbf{P}(N \in \tilde{\tau})$ and it satisfies the renewal equation $u_N = \sum_{n=1}^N u_{N-n} Q_k(n)$ for $N \ge 1$ (and $u_0 = 1$). Since $Q_k(n) = 0$ for n = 1, ..., k - 1, for the same values of n we have $u_n = 0$ too. Therefore the renewal equation may be rewritten, for $N \ge k$, as

$$u_N = \sum_{n=1}^{N-k} u_{N-n} Q_k(n) + Q_k(N).$$
 (2.29)

Let us observe now that if we set $\widetilde{A}_N := A_N \mathbf{1}_{N \ge k}$ then (2.22) implies that for $N \ge k$,

$$\widetilde{A}_N \leq \sum_{n=1}^{N-k} \widetilde{A}_{N-n} Q_k(n) + P_k(N), \text{ with } P_k(N) := \sum_{n=0}^{k-1} A_n Q_k(N-n), (2.30)$$

and observe that $P_k(N) \le c Q_k(N)$, with *c* that depends on ρ , γ , *k* and $K(\cdot)$ (and on *h* and β , but these variables are kept fixed). Therefore

$$\frac{\widetilde{A}_N}{c} \le \sum_{n=1}^{N-k} \frac{\widetilde{A}_{N-n}}{c} Q_k(n) + Q_k(N), \qquad (2.31)$$

for $N \ge k$. By comparing (2.29) and (2.31), and by using (2.28) and $Q_k(N) \stackrel{N \to \infty}{\sim} K(N)^{\gamma} \mathbb{E}[z_1^{\gamma}] \sum_{i=0}^{k-1} A_j$, one directly obtains (2.24). \Box

2.2. Disorder relevance: sketch of the proof. Let us consider for instance the case $\alpha > 1$, which is technically less involved than the others, but still fully representative of our strategy. Take (β, h) such that β is small and $h = h_c^{ann}(\beta) + \Delta$, with $\Delta = a\beta^2$. We are therefore considering the system inside the annealed localized phase, but close to the annealed critical point (at a distance Δ from it), and we want to show that $F(\beta, h) = 0$. In view of Proposition 2.5, it is sufficient to show that ρ in (2.23) is sufficiently small, and we have the freedom to choose a suitable k. Specifically, we choose k to be of the order of the correlation length of the annealed system: $k = 1/F^{ann}(\beta, h) = 1/F(0, \Delta) \approx \text{const.}/(a\beta^2)$, where the last estimate holds since the phase transition of the annealed system is first order for $\alpha > 1$. Note that k diverges for β small.

For the purpose of this informal discussion, assume that $K(n) = c n^{-(1+\alpha)}$, *i.e.*, the slowly varying function $L(\cdot)$ is constant. The sum over *n* in the right-hand side of (2.23) is then immediately performed and (up to a multiplicative constant) one is left with estimating

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{A_j}{(k-j)^{(1+\alpha)\gamma-1}}.$$
(2.32)

One can choose $\gamma < 1$ such that $(1 + \alpha)\gamma - 1 > 1$ and it is actually not difficult to show that $\sup_{j < k} A_j$ is bounded by a constant uniformly in *k*. On one hand in fact $A_j \leq [\mathbb{E}Z_{j,\omega}]^{\gamma} = [Z_j(\Delta)]^{\gamma}$, where the first step follows from Jensen's inequality and the second one from the definition of the model (recall (2.4)). On the other hand for j < k, *i.e.*, for *j* smaller than the correlation length of the annealed model, one has that the annealed partition function $Z_j(\Delta)$ is bounded above by a constant, *independently of how small* Δ *is*, *i.e.*, of how large the correlation length is. This just establishes that the quantity in (2.32) is bounded, so we need to go beyond and show that A_j is small: this of course is not true unless *j* is large, but if we restrict the sum in (2.32) to $j \ll k$ what we obtain is small, since the denominator is approximately $k^{(1+\alpha)\gamma-1}$, that is *k* to a power larger than 1.

In order to control the terms for which k - j is of order 1 a new ingredient is clearly needed, and we really have to estimate the fractional moment of the partition function without resorting to Jensen's inequality. To this purpose, we apply an idea which was introduced in [21]. Specifically, we change the law \mathbb{P} of the disorder in such a way that

under the new law, \mathbb{P} , the system is delocalized and $\mathbb{E}(Z_{j,\omega})^{\gamma}$ is small. The change of measure corresponds to tilting negatively the law of ω_i , $i \leq j$, *cf.* (A.1), so that the system is more delocalized than under \mathbb{P} . The non-trivial fact is that with our choice $\Delta = a\beta^2$ and $j \leq 1/F(0, \Delta)$, one can guarantee on one hand that $Z_{j,\omega}$ is typically small under \mathbb{P} , and on the other that \mathbb{P} and \mathbb{P} are close (their mutual density is bounded, in a suitable sense), so that the same statement about $Z_{j,\omega}$ holds also under the original measure \mathbb{P} . At this point, we have that all terms in (2.32) are small: actually, as we will see, the whole sum is as small as we wish if we choose *a* small. The fact that $F(\beta, h) = 0$ then follows from Proposition 2.5.

As we have mentioned above, the case $\alpha \in [1/2, 1)$ is not much harder, at least on a conceptual level, but this time it is not sufficient to establish bounds on A_j that do not depend on j: the exponent in the denominator of the summand in (2.32) is in any case smaller than 1 and one has to exploit the decay in j of A_j : with respect to the $\alpha > 1$ case, here one can exploit the decay of $\mathbf{P}(j \in \tau)$ as j grows, while such a quantity converges to a positive constant if $\alpha > 1$. Once again the case of $j \ll k$ can be dealt with by direct annealed estimates, while when one gets close to k a finer argument, direct generalization of the one used for the $\alpha > 1$ case, is needed.

3. The Case $\alpha > 1$

In order to avoid repetitions let us establish that, in this and the next sections, R_i , i = 1, 2, ... denote (large) constants, $L_i(\cdot)$ are slowly varying functions and C_i positive constants (not necessarily large).

Proof of Theorem 2.2. Fix $\beta_0 > 0$ and let $\beta \le \beta_0$, $h = h_c^{ann}(\beta) + a\beta^2$ and $\gamma < 1$ sufficiently close to 1 so that

$$(1+\alpha)\gamma > 2. \tag{3.1}$$

It is sufficient to show that the sum in (2.23) can be made arbitrarily small (for some suitable choice of k) by choosing a small, since $\mathbb{E}[z_1^{\gamma}]$ can be bounded above by a constant independent of a (for a small).

We choose $k = k(\beta) = 1/(a\beta^2)$, so that $\beta = 1/\sqrt{ak(\beta)}$. In order to avoid a plethora of $\lfloor \cdot \rfloor$, we will assume that $k(\beta)$ is integer. Note that $k(\beta)$ is large if β or a are small.

First of all note that, thanks to Eqs. (A.21) and (A.24), the sum in the r.h.s. of (2.23) is bounded above by

$$\sum_{j=0}^{k(\beta)-1} \frac{L_1(k(\beta) - j) A_j}{(k(\beta) - j)^{(1+\alpha)\gamma - 1}}.$$
(3.2)

We split this sum as

$$S_1 + S_2 := \sum_{j=0}^{k(\beta)-1-R_1} \frac{L_1(k(\beta)-j)A_j}{(k(\beta)-j)^{(1+\alpha)\gamma-1}} + \sum_{j=k(\beta)-R_1}^{k(\beta)-1} \frac{L_1(k(\beta)-j)A_j}{(k(\beta)-j)^{(1+\alpha)\gamma-1}}.$$
 (3.3)

To estimate S_1 , note that by Jensen's inequality $A_j \leq (\mathbb{E}Z_{j,\omega})^{\gamma} \leq C_1$ with C_1 a constant independent of j as long as $j < k(\beta)$. Indeed, from (2.2) and the definition of the annealed critical point one sees that (recall (2.4))

$$\mathbb{E}Z_{j,\omega} = Z_j(a\beta^2) = \mathbf{E}\left(e^{a\beta^2|\tau \cap \{1,\dots,j\}|} \mathbf{1}_{\{j\in\tau\}}\right),\tag{3.4}$$

and the last term is clearly smaller than e. Therefore, using again (A.21)

$$S_1 \le \frac{L_2(R_1)}{R_1^{(1+\alpha)\gamma-2}},$$
(3.5)

which can be made small with R_1 large in view of the choice (3.1). As for S_2 , one has

$$S_2 \leq C_2 \max_{k(\beta)-R_1 \leq j < k(\beta)} A_j.$$
(3.6)

We apply now Lemma A.1 (note also the definition in (A.1)) with N = j and $\lambda = 1/\sqrt{j}$ so that we have

$$A_{j} \leq \left[\mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}\left(Z_{j,\omega}\right)\right]^{\gamma} \exp\left(c\gamma/(1-\gamma)\right), \qquad (3.7)$$

for $1/\sqrt{j} \le \min(1, (1-\gamma)/\gamma)$, that is for *a* sufficiently small, since we are in any case assuming $j \ge k(\beta) - R_1$.

We are therefore left with showing that $\mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}[Z_{j,\omega}]$ is small for the range of *j*'s we are considering. For such an estimate it is convenient to recall (2.10) and to observe that for any given values of β , *h* and λ and for any *j*,

$$\mathbb{E}_{j,\lambda}[Z_{j,\omega}] = \mathbb{E}\left[\left(\exp\left(h - h_c^{ann}(\beta)\right) \frac{\mathcal{M}(\beta - \lambda)}{\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(-\lambda)}\right)^{|\tau \cap \{1,\dots,j\}|} \mathbf{1}_{\{j \in \tau\}}\right].$$
 (3.8)

In order to exploit such a formula let us observe that

$$\frac{\mathcal{M}(\beta-\lambda)}{\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(-\lambda)} = \exp\left[-\int_0^\beta dx \int_{-\lambda}^0 dy \left.\frac{d^2}{dt^2}\log\mathcal{M}(t)\right|_{t=x+y}\right] \le e^{-C_3\beta\lambda}, \quad (3.9)$$

which holds for $0 < \lambda \le \beta \le \beta_0$ and $C_3 := \min_{t \in [-\beta_0, \beta_0]} d^2 (\log M(t)) / dt^2 > 0$. If *a* is sufficiently small, for $j \le k(\beta) = 1/(a\beta^2)$ we have

$$a\beta^2 - \frac{C_3\beta}{\sqrt{j}} \le \frac{1}{k(\beta)} \left[1 - \frac{C_3}{\sqrt{a}} \right] \le -\frac{C_3}{2k(\beta)\sqrt{a}}.$$
(3.10)

As a consequence,

$$\max_{\substack{k(\beta)-R_1 \le j < k(\beta)}} \mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}(Z_{j,\omega})$$

$$\leq e^{C_3\sqrt{a}\beta^2 R_1/2} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{C_3}{2\sqrt{a}k(\beta)} \left|\tau \cap \{1,\ldots,k(\beta)\}\right|\right)\right]. \quad (3.11)$$

The right-hand side in (3.11) can be made small by choosing *a* small (and this is uniform on $\beta \leq \beta_0$) because of

$$\lim_{c \to +\infty} \limsup_{N \to \infty} \mathbf{E}\left(e^{-(c/N)|\tau \cap \{1, \dots, N\}|}\right) = 0, \tag{3.12}$$

that we are going to prove just below. Putting everything together, we have shown that both S_1 and S_2 can be made small via a suitable choice of R_1 and a, and the theorem is proven.

To prove (3.12), since the function under expectation is bounded by 1 it is sufficient to observe that

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{\sum_{n\in\mathbb{N}} nK(n)} = \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1)} > 0, \qquad (3.13)$$

almost surely (with respect to \mathbf{P}) by the classical Renewal Theorem (or by the strong law of large numbers).

The claim $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$ for every β follows from the arbitrariness of β_0 . \Box

4. The Case $1/2 < \alpha < 1$

Proof of Theorem 2.3. To make things clear, we fix now $\varepsilon > 0$ small and $0 < \gamma < 1$ such that

$$\gamma \left\{ (1+\alpha) + (1-\varepsilon^2) \left[1 - \alpha + (\varepsilon/2)(\alpha - 1/2) \right] \right\} > 2, \tag{4.1}$$

and

$$\gamma \left[(1+\alpha) + (1-\varepsilon^2)(1-\alpha) \right] > 2-\varepsilon^2.$$
(4.2)

Moreover we take $\beta \leq \beta_0$ and

$$h = h_c^{ann}(\beta) + \Delta := h_c^{ann}(\beta) + a\beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}(1+\varepsilon)}.$$
(4.3)

We notice that it is crucial that $(\alpha - 1/2) > 0$ for (4.1) to be satisfied. We will take ε sufficiently small (so that (4.1) and (4.2) can occur) and then, once ε and γ are fixed, a also small. We set moreover

$$k(\beta) := \frac{1}{F(0, \Delta)} \tag{4.4}$$

and we notice that $k(\beta)$ can be made large by choosing *a* small, uniformly for $\beta \leq \beta_0$. As in the previous section, we assume for ease of notation that $k(\beta) \in \mathbb{N}$ (and we write just *k* for $k(\beta)$).

Our aim is to show that $F(\beta, h) = 0$ if *a* is chosen sufficiently small in (4.3). We recall that, thanks to Proposition 2.5, the result is proven if we show that (3.2) is o(1) for *k* large. In order to estimate this sum, we need a couple of technical estimates which are proven at the end of this section (Lemma 4.2) and in Appendix 5 (Lemma 4.1).

Lemma 4.1. Let $\alpha \in (0, 1)$. There exists a constant C_4 such that for every 0 < h < 1 and every $j \leq 1/F(0, h)$,

$$Z_j(h) \le \frac{C_4}{j^{1-\alpha}L(j)}.$$
(4.5)

In view of $Z_j(h_c(0)) = Z_j(0) = \mathbf{P}(j \in \tau)$ and (A.8), this means that as long as $j \le 1/F(0, h)$ the partition function of the homogeneous model behaves essentially like in the (homogeneous) critical case.

Lemma 4.2. There exists $\varepsilon_0 > 0$ such that, if $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (ε being the same one which appears in (4.3)),

$$\mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}[Z_{j,\omega}] \le \frac{C_5}{j^{1-\alpha+(\varepsilon/2)(\alpha-1/2)}}$$
(4.6)

for some constant C_5 (depending on ε but not on β or a), uniformly in $0 \le \beta \le \beta_0$ and in $k^{(1-\varepsilon^2)} \le j < k$.

In order to bound above (3.2), we split it as

$$S_3 + S_4 := \sum_{j=0}^{\lfloor k^{(1-\varepsilon^2)} \rfloor} \frac{L_1(k-j)A_j}{(k-j)^{(1+\alpha)\gamma-1}} + \sum_{j=\lfloor k^{(1-\varepsilon^2)} \rfloor+1}^{k-1} \frac{L_1(k-j)A_j}{(k-j)^{(1+\alpha)\gamma-1}}.$$
 (4.7)

For S_3 we use simply $A_j \leq (\mathbb{E}Z_{j,\omega})^{\gamma} = [Z_j(\Delta)]^{\gamma}$ and Lemma 4.1, together with (A.21) and (A.24):

$$S_3 \le \frac{L_3(k)}{k^{[(1+\alpha)\gamma-1]}} \frac{1}{k^{(1-\varepsilon^2)((1-\alpha)\gamma-1)}},$$
(4.8)

where $L_3(\cdot)$ can depend on ε but not on a. The second condition (4.2) imposed on γ guarantees that S_3 is arbitrarily small for k large, *i.e.*, for a small.

As for S_4 , we use Lemma A.1 with N = j and $\lambda = 1/\sqrt{j}$ to estimate A_j (recall the definition in (A.1)). We get

$$A_j \le \left[\mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}(Z_{j,\omega})\right]^{\gamma} \exp(c\gamma/(1-\gamma)),\tag{4.9}$$

provided that $1/\sqrt{j} \le \min(1, (1 - \gamma)/\gamma)$, which is true for all $j \ge k^{1-\varepsilon^2}$ if *a* is small. Then, provided we have chosen $\varepsilon \le \varepsilon_0$, Lemma 4.2 gives for every $k^{(1-\varepsilon^2)} < j < k$,

$$A_j \le \frac{C_6}{j^{[1-\alpha+(\epsilon/2)(\alpha-1/2)]\gamma}}.$$
 (4.10)

Note that C_6 is large for ε small (since from (4.1)–(4.2) it is clear that γ must be close to 1 for ε small) but it is independent of *a*. As a consequence, using (A.22),

$$S_{4} \leq \max_{k^{(1-\varepsilon^{2})} \leq j < k} A_{j} \times \sum_{r=1}^{k} \frac{L_{1}(r)}{r^{(1+\alpha)\gamma-1}} \leq \max_{k^{(1-\varepsilon^{2})} \leq j < k} A_{j} \times \frac{L_{4}(k)}{k^{(1+\alpha)\gamma-2}}$$
$$\leq C_{6} L_{4}(k) k^{2-(1+\alpha)\gamma-(1-\varepsilon^{2})[1-\alpha+(\varepsilon/2)(\alpha-1/2)]\gamma}.$$
(4.11)

Then, the first condition (4.1) imposed on γ guarantees that S_4 tends to zero when k tends to infinity. \Box

Proof of Lemma 4.2. Using (3.8) together with the observation (3.9), the definition of Δ and of $k = k(\beta)$ in terms of F(0, Δ) (plus the behavior of F(0, Δ) for Δ small described in Theorem 2.1 (2)) one sees that for $j \le k(\beta)$,

$$\mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}[Z_{j,\omega}] \le \mathbf{E}\left(e^{-C_7 \frac{\beta}{\sqrt{j}}|\tau \cap \{1,\dots,j\}|} \mathbf{1}_{\{j \in \tau\}}\right),\tag{4.12}$$

uniformly for $0 \le \beta \le \beta_0$. If moreover $j \ge k^{(1-\varepsilon^2)}$ one has

$$\frac{\beta}{\sqrt{j}} \ge \frac{C_8}{j^{1/2 + (\alpha - 1/2)(1 + 2\varepsilon^2)/(1 + \varepsilon)}} \ge \frac{C_8}{j^{\alpha - (\varepsilon/2)(\alpha - 1/2)}},$$
(4.13)

with C_8 independent of *a* for *a* small. The condition that ε is small has been used, say, to neglect ε^2 with respect to ε . Going back to (4.12) and using Proposition A.2 one has then

$$\mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}[Z_{j,\omega}] \le \frac{C_9}{j^{1-\alpha+(\varepsilon/2)(\alpha-1/2)}}$$
(4.14)

with C_9 depending on ε but not on a.

5. The Case $\alpha = 1/2$

Proof of Theorem 2.4. The proof is not conceptually different from that of Theorem 2.3, but here we have to carefully keep track of the slowly varying functions, and we have to choose γ (< 1) as a function of *k*. Under our assumption (2.17) on *L*(·), it is easy to deduce from Theorem 2.1 (2) that (say, for $0 < \Delta < 1$)

$$F(0, \Delta) = \Delta^2 \widehat{L}(1/\Delta) \ge C(c, \eta) \Delta^2 |\log \Delta|^{2\eta}.$$
(5.1)

We take $\beta \leq \beta_0$ and

$$h = h_c^{ann}(\beta) + \Delta := h_c^{ann}(\beta) + a \exp\left(-\beta^{-1/(\eta - 1/2 - \varepsilon)}\right),$$
(5.2)

and, as in the last section, $k = 1/F(0, \Delta) = \Delta^{-2}/\widehat{L}(1/\Delta)$. We note also that (for a < 1)

$$\beta \ge |\log \Delta|^{-\eta + 1/2 + \varepsilon}.$$
(5.3)

We set $\gamma = \gamma(k) = 1 - 1/(\log k)$. As γ is *k*-dependent one cannot use (A.21) and (A.24) without care to pass from (2.23) to (3.2), since one could in principle have γ -dependent (and therefore *k*-dependent) constants in front. Therefore, our first aim will be to (partly) get rid of γ in (2.23). We notice that for any $j \le k - 1$, for *k* such that $\gamma(k) \ge 5/6$,

$$\sum_{n=k}^{\infty} K(n-j)^{\gamma} \le \sum_{n=k-j}^{k^{6}} K(n) \exp\left[(3/2\log n - \log L(n))/\log k\right] + \sum_{n=k^{6}+1}^{\infty} [K(n)]^{5/6}.$$
(5.4)

Now, properties of slowly varying functions guarantee that the quantity in the exponential in the first sum is bounded (uniformly in *j* and *k*). As for the second sum, (A.21) guarantees it is smaller than $k^{-6/5}$ for *k* large. Since by Lemma 4.1 the A_j are bounded by a constant in the regime we are considering, when we reinsert this term in (2.23) and we sum over j < k we obtain a contribution which vanishes at least like $k^{-1/5}$ for $k \to \infty$. We will therefore forget from now on the second sum in (5.4). Therefore one has

$$\rho \le C_{10} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} K(n-j) A_j \le C_{11} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{L(k-j) A_j}{(k-j)^{1/2}},$$
(5.5)

where we have safely used (A.21) to get the second expression and now γ appears only (implicitly) in the fractional moment A_i but not in the constants C_i .

Once again, it is convenient to split this sum into

$$S_5 + S_6 := \sum_{j=0}^{k/R_2} \frac{A_j L(k-j)}{(k-j)^{1/2}} + \sum_{j=(k/R_2)+1}^{k-1} \frac{A_j L(k-j)}{(k-j)^{1/2}},$$
(5.6)

with R_2 a large constant. To bound S_5 we simply use Jensen inequality to estimate A_j . Lemma 4.1 gives that for all $j \le k$,

$$A_j \le \frac{C_{12}}{j^{\gamma/2}L(j)^{\gamma}} \le \frac{C_{13}}{\sqrt{j}L(j)},$$
(5.7)

where the second inequality comes from our choice $\gamma = 1 - 1/(\log k)$. Knowing this, we can use (A.21) to compute S_5 and get

$$S_5 \le \frac{C_{14}}{\sqrt{R_2}} \frac{L(k(1-1/R_2))}{L(k/R_2)}.$$
(5.8)

We see that S_5 can be made small choosing R_2 large. It is important for the following to note that it is sufficient to choose R_2 large but independent of k; in particular, for k large at R_2 fixed the last factor in (5.8) approaches 1 by the property of slow variation of $L(\cdot)$. As for S_6 ,

$$S_6 \le C_{15} \max_{k/R_2 < j < k} A_j \times \sqrt{k} L(k).$$
(5.9)

In order to estimate this maximum, we need to refine Lemma 4.2:

Lemma 5.1. There exists a constant $C_{16} := C_{16}(R_2)$ such that for $\gamma = 1 - 1/(\log k)$ and $k/R_2 < j < k$,

$$A_j \le C_{16} \left(L(j) \sqrt{j} \left(\log j \right)^{2\varepsilon} \right)^{-1}.$$
(5.10)

Given this, we obtain immediately

$$S_6 \leq C_{17}(R_2) \left[\log\left(\frac{k}{R_2}\right) \right]^{-2\varepsilon}.$$
(5.11)

It is then clear that S_6 can be made arbitrarily small with k large, *i.e.*, with a small. \Box

Proof of Lemma 5.1. Once again, we use Lemma A.1 with N = j but this time $\lambda = (j \log j)^{-1/2}$. Recalling that $\gamma = 1 - 1/(\log k)$ we obtain

$$A_j \le \left[\mathbb{E}_{j,(j\log j)^{-1/2}}(Z_{j,\omega})\right]^{\gamma} \exp\left(c\frac{\log k}{\log j}\right),\tag{5.12}$$

for all j such that $(j \log j)^{1/2} \ge \log k$. The latter condition is satisfied for all $k/R_2 < j < k$ if k is large enough. Note that, since $j > k/R_2$, the exponential factor in (5.12) is bounded by a constant $C_{18} := C_{18}(R_2)$.

Furthermore, for $j \le k$, Eqs. (3.8), (3.9) combined give

$$\mathbb{E}_{j,(j\log j)^{-1/2}}[Z_{j,\omega}] \le Z_j\left(-C_{19}\beta(j\log j)^{-1/2}\right),\tag{5.13}$$

for some positive constant C_{19} , provided *a* is small (here we have used (5.1) and the definition $k = 1/F(0, \Delta)$).

In view of $j \ge k/R_2$, the definition of k in terms of β and assumption (2.17), we see that

$$\beta \ge C_{20}(\log j)^{(-\eta+1/2+\varepsilon)} \ge \frac{C_{21}}{c} L(j)(\log j)^{1/2+\varepsilon},$$
(5.14)

so that the r.h.s. of (5.13) is bounded above by

$$Z_j\left(-C_{21}\frac{L(j)}{c\sqrt{j}}(\log j)^\varepsilon\right) \le C_{22}\frac{(\log j)^{-2\varepsilon}}{L(j)\sqrt{j}},\tag{5.15}$$

where in the last inequality we used Lemma A.2. The result is obtained by re-injecting this in (5.12), and using the value of $\gamma(k)$. \Box

Appendix A. Frequently Used Bounds

A.1. Bounding the partition function via tilting. For $\lambda \in \mathbb{R}$ and $N \in \mathbb{N}$ consider the probability measure $\mathbb{P}_{N,\lambda}$ defined by

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{N,\lambda}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{M}(-\lambda)^N} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^N \omega_i\right),\tag{A.1}$$

where $M(\cdot)$ was defined in (2.8). Note that under $\mathbb{P}_{N,\lambda}$ the random variables ω_i are still independent but no longer identically distributed: the law of ω_i , $i \leq N$ is tilted while ω_i , i > N are distributed exactly like under \mathbb{P} .

Lemma A.1. There exists c > 0 such that, for every $N \in \mathbb{N}$ and $\gamma \in (0, 1)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{N,\omega}\right)^{\gamma}\right] \leq \left[\mathbb{E}_{N,\lambda}\left(Z_{N,\omega}\right)\right]^{\gamma} \exp\left(c\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\lambda^{2}N\right),\tag{A.2}$$

for $|\lambda| \leq \min(1, (1 - \gamma)/\gamma)$.

Proof. We have

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{N,\omega}\right)^{\gamma}\right] = \mathbb{E}_{N,\lambda}\left[\left(Z_{N,\omega}\right)^{\gamma} \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{N,\lambda}}(\omega)\right]$$
$$\leq \left[\mathbb{E}_{N,\lambda}\left(Z_{N,\omega}\right)\right]^{\gamma} \left(\mathbb{E}_{N,\lambda}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{N,\lambda}}(\omega)\right)^{1/(1-\gamma)}\right]\right)^{1-\gamma}$$
$$= \left[\mathbb{E}_{N,\lambda}\left(Z_{N,\omega}\right)\right]^{\gamma} \left(\mathrm{M}(-\lambda)^{\gamma}\mathrm{M}\left(\lambda\gamma/(1-\gamma)\right)^{1-\gamma}\right)^{N}, \quad (A.3)$$

where in the second step we have used Hölder inequality and the last step is a direct computation. The proof is complete once we observe that $0 \le \log M(x) \le cx^2$ for $|x| \le 1$ if *c* is the maximum of the second derivative of $(1/2) \log M(\cdot)$ over [-1, 1]. \Box

A.2. Estimates on the renewal process. With the notation (2.4) one has

Proposition A.2. Let $\alpha \in (0, 1)$ and $r(\cdot)$ be a function diverging at infinity and such that

$$\lim_{N \to \infty} \frac{r(N)L(N)}{N^{\alpha}} = 0.$$
 (A.4)

For the homogeneous pinning model,

$$Z_N(-N^{-\alpha}L(N)r(N)) \stackrel{N \to \infty}{\sim} \frac{N^{\alpha-1}}{L(N)r(N)^2}.$$
 (A.5)

To prove this result we use:

Proposition A.3 ([13, Theorems A & B]). Let $\alpha \in (0, 1)$. There exists a function $\sigma(\cdot)$ satisfying

$$\lim_{x \to +\infty} \sigma(x) = 0, \tag{A.6}$$

and such that for all $n, N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{\mathbf{P}(\tau_n = N)}{nK(N)} - 1\right| \le \sigma\left(\frac{N}{a(n)}\right),\tag{A.7}$$

where $a(\cdot)$ is an asymptotic inverse of $x \mapsto x^{\alpha}/L(x)$. Moreover,

$$\mathbf{P}(N \in \tau) \stackrel{N \to \infty}{\sim} \left(\frac{\alpha \sin(\pi \alpha)}{\pi} \right) \frac{N^{\alpha - 1}}{L(N)}.$$
(A.8)

We observe that by [6, Th. 1.5.12] we have that $a(\cdot)$ is regularly varying of exponent $1/\alpha$, in particular $\lim_{n\to\infty} a(n)/n^b = 0$ if $b > 1/\alpha$. We point out also that (A.8) has been first established for $\alpha \in (1/2, 1)$ in [19].

Proof of Proposition A.2. We put for simplicity of notation $v(N) := N^{\alpha}/L(N)$. Decomposing Z_N with respect to the cardinality of $\tau \cap \{1, ..., N\}$,

$$Z_{N}(-r(N)/v(N)) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(|\tau \cap \{1, ..., N\}| = n, N \in \tau) e^{-n r(N)/v(N)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(\tau_{n} = N) e^{-n r(N)/v(N)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{v(N)}{\sqrt{r(N)}}} \mathbf{P}(\tau_{n} = N) e^{-n \frac{r(N)}{v(N)}} + \sum_{n=\frac{v(N)}{\sqrt{r(N)}}+1}^{N} \mathbf{P}(\tau_{n} = N) e^{-n \frac{r(N)}{v(N)}}.$$
(A.9)

Observe now that one can rewrite the first term in the last line of (A.9) as

$$(1+o(1))K(N)\sum_{n=1}^{\nu(N)/\sqrt{r(N)}} n \, e^{-n \, r(N)/\nu(N)},\tag{A.10}$$

and o(1) is a quantity which vanishes for $N \to \infty$ (this follows from Proposition A.3, which applies uniformly over all terms of the sum in view of $\lim_N r(N) = \infty$). Thanks to condition (A.4), one can estimate this sum by an integral:

$$\sum_{n=1}^{\nu(N)/\sqrt{r(N)}} n \, e^{-n \, r(N)/\nu(N)} = \frac{\nu(N)^2}{r(N)^2} (1 + o(1)) \int_0^\infty \, \mathrm{d}x \, x \, e^{-x} = \frac{\nu(N)^2}{r(N)^2} (1 + o(1)).$$

As for the second sum in (A.9), observing that $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\tau_n = N) = \mathbf{P}(N \in \tau)$, we can bound it above by

$$\mathbf{P}(N \in \tau)e^{-\sqrt{r(N)}}.\tag{A.11}$$

In view of (A.8), the last term is negligible with respect to $N^{\alpha-1}/(L(N) r(N)^2)$ and our result is proved. \Box

Proof of Lemma 4.1. Recalling the notation (2.4), point (2) of Theorem 2.1 (see in particular the definition of $\widehat{L}(\cdot)$) and (A.8), we see that the result we are looking for follows if we can show that for every c > 0 there exists $C_{23} = C_{23}(c) > 0$ such that

$$\mathbf{E}\left[e^{c|\tau \cap \{1,...,N\}|L(N)/N^{\alpha}} \mid N \in \tau\right] \le C_{23},\tag{A.12}$$

uniformly in N. Let us assume that $N/4 \in \mathbb{N}$; by Cauchy-Schwarz inequality the result follows if we can show that

$$\mathbf{E}\left[e^{2c|\tau \cap \{1,...,N/2\}|L(N)/N^{\alpha}} \mid N \in \tau\right] \le C_{24}.$$
(A.13)

Let us define $X_N := \max\{n = 0, 1, ..., N/2 : n \in \tau\}$ (last renewal epoch up to N/2). By the renewal property we have

$$\mathbf{E}\left[e^{2c|\tau \cap \{1,...,N/2\}|L(N)/N^{\alpha}} \mid N \in \tau\right]$$

= $\sum_{n=0}^{N/2} \mathbf{E}\left[e^{2c|\tau \cap \{1,...,N/2\}|L(N)/N^{\alpha}} \mid X_N = n\right] \mathbf{P}(X_N = n \mid N \in \tau).$ (A.14)

If we can show that for every n = 0, 1, ..., N/2,

$$\mathbf{P}\left(X_N = n \mid N \in \tau\right) \le C_{25} \mathbf{P}\left(X_N = n\right),\tag{A.15}$$

then we are reduced to proving (A.13) with $\mathbf{E}[\cdot|N \in \tau]$ replaced by $\mathbf{E}[\cdot]$.

Let us then observe that

$$\mathbf{P}(X_N = n, N \in \tau) = \mathbf{P}(n \in \tau) \mathbf{P}(\tau_1 > (N/2) - n, N - n \in \tau)$$

= $\mathbf{P}(n \in \tau) \sum_{j=(N/2)-n+1}^{N-n} \mathbf{P}(\tau_1 = j) \mathbf{P}(N - n - j \in \tau).$ (A.16)

We are done if we can show that

$$\sum_{j=(N/2)-n+1}^{N-n} \mathbf{P}(\tau_1 = j) \mathbf{P}(N - n - j \in \tau) \le C_{26} \mathbf{P}(N \in \tau) \sum_{j=(N/2)-n+1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau_1 = j),$$
(A.17)

because the mass renewal function $\mathbf{P}(N \in \tau)$ cancels when we consider the conditioned probability and, recovering $\mathbf{P}(n \in \tau)$ from (A.16) we rebuild $\mathbf{P}(X_N = n)$. We split the sum in the left-hand side of (A.17) in two terms. By using (A.8) (but just as upper bound) and the fact that the inter-arrival distribution is regularly varying we obtain

$$\sum_{j=(3N/4)-n+1}^{N-n} \mathbf{P}(\tau_1 = j) \mathbf{P}(N - n - j \in \tau)$$

$$\leq C_{27} \frac{L(N)}{N^{1+\alpha}} \sum_{j=(3N/4)-n+1}^{N-n} \frac{1}{(N - n - j + 1)^{1-\alpha} L(N - n - j + 1)}$$

$$= C_{27} \frac{L(N)}{N^{1+\alpha}} \sum_{j=1}^{N/4} \frac{1}{j^{1-\alpha} L(j)} \leq \frac{C_{28}}{N}.$$
(A.18)

Since the right-hand side of (A.17) is bounded below by 1/N times a suitable constant (of course if *n* is close to N/2 this quantity is sensibly larger) this first term of the splitting is under control. Now the other term: since the renewal function is regularly varying

$$\sum_{j=(N/2)-n+1}^{(3N/4)-n} \mathbf{P}(\tau_1 = j) \mathbf{P}(N - n - j \in \tau) \le C_{29} \mathbf{P}(N \in \tau) \sum_{j=(N/2)-n+1}^{(3N/4)-n} \mathbf{P}(\tau_1 = j),$$
(A.19)

that gives what we wanted.

It remains to show that (A.13) holds without conditioning. For this we use the asymptotic estimate $-\log \mathbf{E}[\exp(-\lambda\tau_1)] \stackrel{\lambda \searrow 0}{\sim} c_{\alpha} \lambda^{\alpha} L(1/\lambda)$, with $c_{\alpha} = \int_0^{\infty} r^{-1-\alpha} (1 - \exp(-r)) dr = \Gamma(1-\alpha)/\alpha$, and the Markov inequality to get that if x > 0,

$$\mathbf{P}\left(|\tau \cap \{1, \dots, N\}|L(N)/N^{\alpha} > x\right) = \mathbf{P}\left(\tau_n < N\right) \le \exp\left(-\frac{1}{2}c_{\alpha}\lambda^{\alpha}L(1/\lambda)n + \lambda N\right),$$
(A.20)

with *n* the integer part of $xN^{\alpha}/L(N)$ and $\lambda \in (0, \lambda_0)$ for some $\lambda_0 > 0$. If one chooses $\lambda = y/N$, *y* a positive number, then for $x \ge 1$ and *N* sufficiently large (depending on λ_0 and *y*) we have that the quantity at the exponent in the right-most term in (A.20) is bounded above by $-(c_{\alpha}/3)y^{\alpha}x + y$. The proof is then complete if we select *y* such that $(c_{\alpha}/3)y^{\alpha} > 2c$ (*c* appears in (A.13)) since if *X* is a non-negative random variable and *q* is a real number $\mathbf{E}[\exp(qX)] = 1 + q \int_0^{\infty} e^{qx} \mathbf{P}(X > x) dx$.

A.3. Some basic facts about slowly varying functions. We recall here some of the elementary properties of slowly varying functions which we repeatedly use, and we refer to [6] for a complete treatment of slow variation.

The first two well-known facts are that, if $U(\cdot)$ is slowly varying at infinity,

$$\sum_{n\geq N} \frac{U(n)}{n^m} \overset{N\to\infty}{\sim} U(N) \frac{N^{1-m}}{m-1},\tag{A.21}$$

if m > 1 and

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{U(n)}{n^m} \overset{N \to \infty}{\sim} U(N) \frac{N^{1-m}}{1-m},\tag{A.22}$$

if m < 1 (cf. for instance [20, Sect. A.4]). The second two facts are that (cf. [6, Th. 1.5.3])

$$\inf_{n \ge N} U(n) n^m \stackrel{N \to \infty}{\sim} U(N) N^m, \tag{A.23}$$

if m > 0, and

$$\sup_{n \ge N} U(n) n^m \stackrel{N \to \infty}{\sim} U(N) N^m, \tag{A.24}$$

if m < 0. \Box

Acknowledgements. G.G. and F.L.T. acknowledge the support of the ANR grant *POLINTBIO*. B.D. and F.L.T. acknowledge the support of the ANR grant *LHMSHE*.

Note added in proof. After this work appeared in preprint form (arXiv:0712.2515 [math.PR]), several new results have been proven. In [5] it has been shown in particular that when $L(\cdot)$ is trivial, then ε in Theorem 2.3 can be chosen equal to zero, with a(0) > 0. The case $\alpha = 1$ is also treated in [5]. The fractional moment method we have developed here may be adapted to deal with the $\alpha = 1$ case too: this has been done in [7], where a related model is treated. Finally, the controversy concerning the case $\alpha = 1/2$ and $L(\cdot)$ asymptotically constant has been solved in [22], where it was shown that $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$ for every $\beta > 0$.

References

- Aizenman, M., Molchanov, S.: Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation. Commun. Math. Phys. 157, 245–278 (1993)
- Aizenman, M., Schenker, J.H., Friedrich, R.M., Hundertmark, D.: Finite-volume fractional-moment criteria for Anderson localization. Commun. Math. Phys. 224, 219–253 (2001)
- Alexander, K.S.: The effect of disorder on polymer depinning transitions. Commun. Math. Phys. 279, 117–146 (2008)

- Alexander, K.S., Sidoravicius, V.: Pinning of polymers and interfaces by random potentials. Ann. Appl. Probab. 16, 636–669 (2006)
- Alexander, K.S., Zygouras, N.: Quenched and annealed critical points in polymer pinning models. http:// arxiv.org/abs0805.1708V1[math.PR], 2008
- Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L.: *Regular variation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
- 7. Birkner, M., Sun, R.: Annealed vs quenched critical points for a random walk pinning model. http://arxiv. org/abs:0807.2752V1[math.PR], 2008
- Bolthausen, E., Caravenna, F., de Tilière, B.: *The quenched critical point of a diluted disordered polymer model*. Stochastic Process. Appl. (to appear), http://arxiv.org/abs/0711.0141V2[math.PR], 2007
- Buffet, E., Patrick, A., Pulé, J.V.: Directed polymers on trees: a martingale approach. J. Phys. A Math. Gen. 26, 1823–1834 (1993)
- Chayes, J.T., Chayes, L., Fisher, D.S., Spencer, T.: Finite-size scaling and correlation lengths for disordered systems. Phys. Rev. Lett. 57, 2999–3002 (1986)
- Coluzzi, B., Yeramian, E.: Numerical evidence for relevance of disorder in a Poland-Scheraga DNA denaturation model with self-avoidance: Scaling behavior of average quantities. Eur. Phys. J. B 56, 349–365 (2007)
- Derrida, B., Hakim, V., Vannimenus, J.: Effect of disorder on two-dimensional wetting. J. Stat. Phys. 66, 1189–1213 (1992)
- Doney, R.A.: One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. Probab. Theory Rel. Fields 107, 451–465 (1997)
- von Dreifus, H.: Bounds on the critical exponents of disordered ferromagnetic models. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 55, 657–669 (1991)
- Evans, M.R., Derrida, B.: Improved bounds for the transition temperature of directed polymers in a finite-dimensional random medium. J. Stat. Phys. 69, 427–437 (1992)
- 16. Fisher, M.E.: Walks, walls, wetting, and melting. J. Stat. Phys. 34, 667-729 (1984)
- Forgacs, G., Luck, J.M., Nieuwenhuizen, Th.M., Orland, H.: Wetting of a disordered substrate: exact critical behavior in two dimensions. Phys. Rev. Lett. 57, 2184–2187 (1986)
- Gangardt, D.M., Nechaev, S.K.: Wetting transition on a one-dimensional disorder. J. Stat. Phys. 130, 483–502 (2008)
- Garsia, A., Lamperti, J.: A discrete renewal theorem with infinite mean. Comment. Math. Helv. 37, 221–234 (1963)
- 20. Giacomin, G.: Random Polymer Models. River Edge, NJ: Imperial College Press/World Scientific, 2007
- Giacomin, G., Lacoin, H., Toninelli, F.L.: *Hierarchical pinning models, quadratic maps and quenched disorder*. Probab. Theory Rel. Fields (to appear), http://arxiv.org/abs/0711.4649V2[math.PR], 2007
- Giacomin, G., Lacoin, H., Toninelli, F.L.: Marginal relevance of disorder for pinning models. http://arxiv. org/abs/0811.0723V1[math-ph], 2008
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: Estimates on path delocalization for copolymers at selective interfaces. Probab. Theor. Rel. Fields 133, 464–482 (2005)
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. Commun. Math. Phys. 266, 1–16 (2006)
- Giacomin, G., Toninelli, F.L.: On the irrelevant disorder regime of pinning models. preprint (2007). http://arxiv.org/abs/0707.3340V1[math.PR]
- 26. Harris, A.B.: Effect of Random Defects on the Critical Behaviour of Ising Models. J. Phys. C 7, 1671–1692 (1974)
- Kafri, Y., Mukamel, D., Peliti, L.: Why is the DNA denaturation transition first order? Phys. Rev. Lett. 85, 4988–4991 (2000)
- Toninelli, F.L.: A replica-coupling approach to disordered pinning models. Commun. Math. Phys. 280, 389–401 (2008)
- Toninelli, F.L.: Disordered pinning models and copolymers: beyond annealed bounds. Ann. Appl. Probab. 18, 1569–1587 (2008)

Communicated by M. Aizenman

Marginal Relevance of Disorder for Pinning Models

GIAMBATTISTA GIACOMIN Université Paris Diderot

HUBERT LACOIN Université Paris Diderot

AND

FABIO TONINELLI CNRS, Laboratoire de Physique ENS Lyon

Abstract

The effect of disorder on pinning and wetting models has attracted much attention in theoretical physics. In particular, it has been predicted on the basis of the Harris criterion that disorder is relevant (annealed and quenched models have different critical points and critical exponents) if the return probability exponent α , a positive number that characterizes the model, is larger than $\frac{1}{2}$. Weak disorder has been predicted to be irrelevant (i.e., coinciding critical points and exponents) if $\alpha < \frac{1}{2}$. Recent mathematical work has put these predictions on firm ground. In *renormalization group* terms, the case $\alpha = \frac{1}{2}$ is a *marginal* case, and there is no agreement in the literature as to whether one should expect disorder relevance or irrelevance at marginality. The question is also particularly intriguing because the case $\alpha = \frac{1}{2}$ includes the classical models of two-dimensional wetting of a rough substrate, of pinning of directed polymers on a defect line in dimension (3 + 1) or (1 + 1), and of pinning of an heteropolymer by a point potential in three-dimensional space. Here we prove disorder relevance both for the general $\alpha = \frac{1}{2}$ pinning model and for the hierarchical pinning model proposed by Derrida, Hakim, and Vannimenus, in the sense that we prove a shift of the quenched critical point with respect to the annealed one. In both cases we work with Gaussian disorder and we show that the shift is at least of order $\exp(-1/\beta^4)$ for β small, if β^2 is the disorder variance. © 2009 Wiley Periodicals, Inc.

1 Introduction

1.1 Wetting and Pinning on a Defect Line in (1 + 1) Dimensions

The intense activity aiming at understanding phenomena like wetting in two dimensions [1] and pinning of polymers by a defect line [15] has led several people to focus on a class of simplified models based on random walks. In order to describe more realistic, spatially inhomogeneous situations, these models include disordered interactions. While a very substantial amount of work has been done,

Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. LXIII, 0233–0265 (2010) © 2009 Wiley Periodicals, Inc.

it is quite remarkable that some crucial issues are not only mathematically open (which is not surprising given the presence of disorder), but also controversial in the physics literature.

Let us start by introducing the most basic, and most studied, model in the class we consider (it is the case considered in [11, 16], but also in [6, 17, 23, 24, 29, 30], up to some inessential details, although the notation used by the various authors are quite different). Let $S = \{S_0, S_1, ...\}$ be a simple symmetric random walk on \mathbb{Z} ; i.e., $S_0 = 0$ and $\{S_n - S_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ is an IID sequence (with law **P**) of random variables taking values ± 1 with probability $\frac{1}{2}$. It is better to take a directed walk viewpoint, that is, to consider the process $\{(n, S_n)\}_{n=0,1,...}$. This random walk is the *free model*, and we want to understand the situation where the walk interacts with a substrate or with a defect line that provides *disordered* (e.g., random) rewards/penalties each time the walk hits it (see Figure 1.1). The walk may or may not be allowed to take negative values: we call *pinning on a defect line* the first case and *wetting of a substrate* the second one. It is by now well understood that these two cases are equivalent, and we briefly discuss the wetting case only in the caption of Figure 1.1: the general model we will consider covers both wetting and pinning cases. The interaction is introduced via the Hamiltonian

(1.1)
$$H_{N,\omega}(S) := -\sum_{n=1}^{N} \left(\beta \omega_n + h - \log \mathbb{E}(\exp(\beta \omega_1))\right) \mathbb{1}_{\{S_n = 0\}}$$

where $N \in 2\mathbb{N}$ is the system size, h (homogeneous pinning potential) is a real number, $\omega := \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ is a sequence of IID centered random variables with finite exponential moments (in this work, we will restrict to the Gaussian case), $\beta \ge 0$ is the disorder strength, and \mathbb{E} denotes the average with respect to ω . The notational convenience in introducing the nonrandom term log $\mathbb{E}(\exp(\beta\omega_1))$ (which could be absorbed into h anyway) will soon become clear.

The Gibbs measure $\mathbf{P}_{N,\omega}$ for the pinning model is then defined as

(1.2)
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) = \frac{e^{-H_{N,\omega}(S)}\mathbb{1}_{\{S_N=0\}}}{Z_{N,\omega}},$$

and of course $Z_{N,\omega} := \mathbf{E}[\exp(-H_{N,\omega}(S))\mathbb{1}_{\{S_N=0\}}]$, where **E** denotes expectation with respect to the simple random walk measure **P**. Note that we imposed the boundary condition $S_N = 0 = S_0$ (just to be consistent with the rest of the paper). It is well known that the model undergoes a localization/delocalization transition as *h* varies: if *h* is larger than a certain threshold value $h_c(\beta)$ (quenched critical point) then, under the Gibbs measure, the system is *localized*: the contact fraction, defined as

(1.3)
$$\frac{1}{N} \mathbf{E}_{N,\omega} \left[\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} \right],$$



FIGURE 1.1. The top of the figure shows a random walk trajectory, pinned at N, which is not allowed to enter the lower half-plane (the shadowed region should be regarded as a wall). The trajectory collects the charges $\tilde{\omega}_n$ when it hits the wall. The question is whether the rewards/penalties collected pin the walk to the wall or not. The precise definition of the wetting model is obtained by multiplying the numerator in the right-hand side of (1.2) by the indicator function of the event $\{S_i \geq 0, j = 1, \dots, N\}$ (and consequently modifying the partition function $Z_{N,\omega}$). This model is actually equivalent to the model (1.2) without a wall, whose trajectories (dashed line) can visit the lower halfplane, provided that h is replaced by $h - \log 2$ (see [18, chap. 1]). The bottom part of the figure illustrates the simple but crucial point that the energy of the model depends only on the location of the points of contact between walk and wall (or defect line); such points form a renewal process, giving thus a natural generalized framework in which to tackle the problem. In order to circumvent the annoying periodicity two of the simple random walk we set $\tau_0 = 0$ and $\tau_{j+1} := \inf\{\frac{n}{2} \ge \tau_j : S_n = 0\}$. From the renewal process standpoint, introducing a wall just leads to a terminating renewal (see text).

tends to a positive limit for $N \to \infty$. On the other hand, for $h < h_c(\beta)$ the system is *delocalized*, i.e., the limit is 0.

The result we just stated is also true in the absence of disorder ($\beta = 0$), and a remarkable fact for the homogeneous (i.e., nondisordered) model is that it is exactly solvable ([14, 18] and references therein). In particular, we know that $h_c(0) = 0$, i.e., an arbitrarily small reward, is necessary and sufficient for pinning, and that the free energy behaves quadratically close to criticality. If we now consider the *annealed measure* corresponding to (1.2), that is, the model in which one replaces both $\exp(-H_{N,\omega}(S))$ and $Z_{N,\omega}$ by their averages with respect to ω , one readily realizes that the annealed model is a homogeneous model, and precisely the one

we obtain by setting $\beta = 0$ in (1.2). Therefore one finds that the *annealed critical point* $h_c^a(\beta)$ equals 0 for every β , and that the *annealed free energy* $F^a(\beta, h)$ behaves, for $h \searrow 0$, like $F^a(\beta, h) \sim \text{const} \times h^2$, while it is 0 for $h \le 0$.

Very natural questions are: does $h_c(\beta)$ differ from $h_c^a(\beta)$? Are quenched and annealed critical exponents different? As we are going to explain, the first question finds contradictory answers in the literature, while no clear-cut statement can really be found about the second. Below we are going to argue that these two questions are intimately related, but first we make a short detour in order to define a more general class of models. It is in this more general context that the role of the disorder and the specificity of the simple random walk case can best be appreciated.

1.2 Reduction to Renewal-Based Models

As argued in the caption of Figure 1.1, the basic underlying process is the *point* process $\tau := {\tau_0, \tau_1, \ldots}$, which is a renewal process (that is, ${\tau_n - \tau_{n-1}}_{n \in \mathbb{N}}$ is an IID sequence of integer-valued random variables). We set $K(n) := \mathbf{P}(\tau_1 = n)$. It is well known that, for the simple random walk case, $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$ (the walk is recurrent) and $K(n) \stackrel{n \to \infty}{\sim} 1/(\sqrt{4\pi} n^{3/2})$. This suggests the natural generalized framework of models based on discrete renewal processes such that

(1.4)
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) \le 1 \quad \text{and} \quad K(n) \stackrel{n \to \infty}{\sim} \frac{C_K}{n^{1+\alpha}}$$

with $C_K > 0$ and $\alpha > 0$. We are of course employing the standard notation $a_n \sim b_n$ for $\lim a_n/b_n = 1$. The case $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$ refers to transient (or *terminating*) renewals (of which the wetting case is an example); see also Remark 3.2 below. This framework includes, for example, the simple random walk in $d \ge 3$, for which $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$ and $\alpha = (\frac{d}{2}) - 1$, but it is of course much more general. We will come back with more details on this model, but let us just say now that the definition of the Gibbs measure is given in this case by (1.1)–(1.2), with S replaced by τ in the left-hand side and with the event { $S_n = 0$ } replaced by the event {there is j such that $\tau_j = n$ }.

1.3 Harris Criterion and Disorder Relevance: State of the Art

The questions mentioned at the end of Section 1.1 are typical questions of disorder relevance, i.e., of stability of critical properties with respect to (weak) disorder. In renormalization group language, one is asking whether disorder drives the system towards a new fixed point. A heuristic tool that was devised to give an answer to such questions is the *Harris criterion* [25], originally proposed for random ferromagnetic Ising models. The Harris criterion states that disorder is relevant if the specific heat exponent of the pure system is positive, and irrelevant if it is negative. In the case where such critical exponent is 0 (this is called a *marginal case*), the Harris criterion gives no prediction and a case-by-case delicate analysis is needed. Now, it turns out that the random pinning model described above is a marginal case, and from this point of view it is not surprising that the question of disorder relevance is not solved yet, even on heuristic grounds: in particular, the authors of [16] (and then also [23, 24] and, very recently, [17]) claimed that for small β the quenched critical point coincides with the annealed one (with our conventions, this means that both are 0), while in [11] it was concluded that they differ for every $\beta > 0$, and that their difference is of order exp($-const/\beta^2$) for β small (we mention [6, 29, 30], which support this second possibility). Note that such a quantity is smaller than any power of β , and therefore vanishes at all orders in weak-disorder perturbation theory (this is also typical of marginal cases).

In an effort to reduce the problem to its core, beyond the difficulties connected to the random walk or renewal structure, a *hierarchical pinning model*, defined on a diamond lattice, was introduced in [11]. In this case, the laws of the partition functions for the systems of size N and 2N are linked by a simple recursion. The role of α is played here by a real parameter $B \in (1, 2)$, which is related to the geometry of the hierarchical lattice. Also in this case, the Harris criterion predicts that disorder is relevant in a certain regime (here, $B < B_c := \sqrt{2}$) and irrelevant in another ($B > B_c$), while $B = B_c$ is the marginal case where the specific heat critical exponent of the pure model vanishes. Again, the authors of [11] predicted that disorder is marginally relevant for $B = B_c$, and that the difference between annealed and quenched critical points behaves like $\exp(-\cosh/\beta^2)$ for β small (they also gave numerical evidence that the critical exponent is modified by disorder).

Let us mention that hierarchical models based on diamond lattices have played an important role in elucidating the effect of disorder on various statistical mechanics models: we mention for instance [9].

Lately remarkable progress has been made in the mathematical comprehension of the question of disorder relevance in pinning models. First of all, it was proven in [21] that an arbitrarily weak (but extensive) disorder changes the critical exponent if $\alpha > \frac{1}{2}$ (the analogous result for the hierarchical model was proven in [28]). Results concerning the critical points came later: in [3, 32] it was proven that if $\alpha < \frac{1}{2}$ then $h_c(\beta) = 0$ (and the quenched critical exponent coincides with the annealed one) for β sufficiently small (the analogous result for the hierarchical model was given in [19]). Finally, the fact that $h_c(\beta) > 0$ for every $\beta > 0$ (together with the correct small- β behavior) in the regime where the Harris criterion predicts disorder relevance was proven in [19] in the hierarchical setup, and then in [5, 10] in the nonhierarchical one. One can therefore safely say that the understanding of the relevance question is by now rather solid *except in the marginal case*. (Of course, some problems remain open, for instance, how to determine the value of the quenched critical exponent in the relevant disorder regime beyond the bounds proved in [21].)

1.4 Marginal Relevance of Disorder

In this work, we solve the question of disorder relevance for the marginal case $\alpha = \frac{1}{2}$ (or $B = B_c$ in the hierarchical situation), showing that *quenched and annealed critical points differ for every disorder strength* $\beta > 0$. We also give a

quantitative bound, $h_c(\beta) \ge \exp(-\operatorname{const}/\beta^4)$ for β small, which is, however, presumably not optimal. The method we use is a nontrivial extension of the *fractional moment-change-of-measure method*, which already allowed us to prove disorder relevance for $B < B_c$ in [19] and for $\alpha > \frac{1}{2}$ in [10].

A few words about the evolution of this method may be useful to the reader. The idea of estimating noninteger moments of the partition function of disordered systems is not new: consider, for instance, [7] in the context of directed polymers in a random environment or [2] in the context of Anderson localization (in the latter case, one deals with noninteger moments of the propagator). However, the power of noninteger moments in pinning/wetting models was not appreciated until [31], where it was employed to prove, among other facts, that quenched and annealed critical points differ for large β , irrespective of the value of $\alpha \in (0, \infty)$.

The new idea that was needed to treat the case of weak disorder (small β) was instead introduced in [10, 19], and it is a change-of-measure idea, coupled with an *iteration procedure*: one changes the law of the disorder ω in such a way that the new and the old laws are very close in a certain sense, but under the new one it is easier to prove that the fractional moments of the partition function are small. In the relevant disorder regime, $\alpha > \frac{1}{2}$ or $B < B_c$, it turns out that it is possible to choose the new law so that the ω_n 's are still IID random variables whose law is simply tilted with respect to the original one. This tilting procedure is bound to fail if applied for arbitrarily large volumes, but having such bounds for sufficiently large, but finite, system sizes is actually sufficient because of an iteration argument (which appears very cleanly in the hierarchical setup).

In order to deal with the marginal case we will instead introduce a long-range anticorrelation structure for the ω -variables. Such correlations are carefully chosen in order to reflect the structure of the two-point function of the annealed model and, in the nonhierarchical case, they are restricted, via a coarse-graining procedure inspired by [33], only to suitable *disorder pockets*.

We also mention that one of us [27] recently proved that disorder is marginally relevant in a different version of the hierarchical pinning model. What simplifies the task in that case is that the Green function of the model is spatially inhomogeneous and one can take advantage of that by tilting the ω -distributions in a inhomogeneous way (keeping the ω 's independent). The Green function of the hierarchical model proposed in [11] is instead constant throughout the system, and inhomogeneous tilting does not seem to be of help (as it does not seem to be useful in the nonhierarchical case, since it does not match with the coarse graining procedure).

The paper is organized as follows: the hierarchical and nonhierarchical pinning models are precisely defined in Sections 2 and Section 3, respectively, where we also state our result concerning marginal relevance of disorder. This result is proven in Section 4 for the hierarchical case and in Section 5 for the nonhierarchical one.

In order not to hide the novelty of the idea with technicalities, we restrict ourselves to Gaussian disorder and, in the case of the nonhierarchical model, we do not treat the natural generalization where $K(\cdot)$ is of the form $K(n) = L(n)/n^{3/2}$ with $L(\cdot)$ a slowly varying function [13, VIII.8]. We plan to come back to both issues in a forthcoming paper [20].

2 The Hierarchical Model

Let 1 < B < 2. We study the following iteration, which transforms a vector $\{R_n^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ into a new vector $\{R_{n+1}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$:

(2.1)
$$R_{n+1}^{(i)} = \frac{R_n^{(2i-1)}R_n^{(2i)} + (B-1)}{B}$$

for $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $i \in \mathbb{N}$. In particular, we are interested in the case in which the initial condition is random and given by $R_0^{(i)} = e^{\beta \omega_i - \beta^2/2 + h}$, with $\omega := \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a sequence of IID standard Gaussian random variables and $h \in \mathbb{R}$, $\beta \ge 0$. We denote by \mathbb{P} the law of ω and by \mathbb{E} the corresponding average. In this case, it is immediate to realize that for every given *n* the random variables $\{R_n^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ are IID. We will study the behavior for large *n* of $X_n := R_n^{(1)}$.

It is easy to see that the average of X_n satisfies the iteration

(2.2)
$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{(\mathbb{E}X_n)^2 + (B-1)}{B}$$

with initial condition $\mathbb{E}(X_0) = e^h$. The map (2.2) has two fixed points: a stable one, $\mathbb{E}X_n = (B-1)$, and an unstable one, $\mathbb{E}X_n = 1$. This means that if $0 \le \mathbb{E}X_0 < 1$, then $\mathbb{E}X_n$ tends to (B-1) when $n \to \infty$, while if $\mathbb{E}X_0 > 1$, then $\mathbb{E}X_n$ tends to $+\infty$.

Remark 2.1. In [11] and [19], the model with B > 2 was considered. However, the cases $B \in (1, 2)$ and $B \in (2, \infty)$ are equivalent. Indeed, if $R_n^{(i)}$ satisfies (2.1) with B > 2, it is immediate to see that $\hat{R}_n^{(i)} := R_n^{(i)}/(B-1)$ satisfies the same iteration but with B replaced by $\hat{B} := B/(B-1) \in (1, 2)$. In this work, we prefer to work with $B \in (1, 2)$ because things turn out to be notationally simpler; e.g., the annealed critical point (defined in the next section) turns out to be 0 rather than $\log(B-1)$. In the following, whenever we refer to results from [19], we give them for $B \in (1, 2)$.

2.1 Quenched and Annealed Free Energy and Critical Point

The random variable X_n is interpreted as the partition function of the hierarchical random pinning model on a diamond lattice of generation n (we refer to [11] for a clear discussion of this connection). The *quenched free energy* is then defined as

(2.3)
$$F(\beta, h) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{E} \log X_n.$$
In [19, theorem 1.1] it was proven, among other facts, that for every $\beta \ge 0$, $h \in \mathbb{R}$, the limit (2.3) exists and is nonnegative. Moreover, $F(\beta, \cdot)$ is convex and nondecreasing. On the other hand, the *annealed free energy* is by definition

(2.4)
$$F^{a}(\beta,h) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n}} \log \mathbb{E} X_{n}.$$

Since the initial condition of (2.1) was normalized so that $\mathbb{E}X_0 = e^h$, it is easy to see that the annealed free energy is nothing but the free energy of the nondisordered model,

(2.5)
$$F^{a}(\beta,h) = F(0,h).$$

Nonnegativity of the free energy allows us to define the *quenched critical* point in a natural way, as

(2.6)
$$h_c(\beta) := \inf\{h \in \mathbb{R} : F(\beta, h) > 0\}$$

and analogously one defines the *annealed critical point* $h_c^a(\beta)$. In view of observation (2.5), one sees that $h_c^a(\beta) = h_c(0)$. Monotonicity and convexity of $F(\beta, \cdot)$ imply that $F(\beta, h) = 0$ for $h \le h_c(\beta)$.

For the annealed system, the critical point and the critical behavior of the free energy around it are known (see [11] or [19, theorem 1.2]). What one finds is that for every $B \in (1, 2)$ one has $h_c(0) = 0$, and there exists c := c(B) > 0 such that for all $0 \le h \le 1$

(2.7)
$$c(B)^{-1}h^{1/\alpha} \le F(0,h) \le c(B)h^{1/\alpha}$$

where

(2.8)
$$\alpha := \frac{\log(2/B)}{\log 2} \in (0, 1).$$

Observe that α is decreasing as a function of B and equals $\frac{1}{2}$ for $B = B_c := \sqrt{2}$.

2.2 Disorder Relevance or Irrelevance

The main question we are interested in is whether quenched and annealed critical points differ, and if so, how does their difference behave for a small disorder. Jensen's inequality, $\mathbb{E} \log X_n \leq \log \mathbb{E} X_n$, implies in particular that $F(\beta, h) \leq$ F(0, h) so that $h_c(\beta) \geq h_c(0) = 0$. Is this inequality strict?

In [19] a quite complete picture was given, except in the marginal case $B = B_c$, which was left open:

THEOREM 2.2 [19, theorem 1.4] If $1 < B < B_c$, $h_c(\beta) > 0$ for every $\beta > 0$, and there exists $c_1 > 0$ such that for $0 \le \beta \le 1$

(2.9)
$$c_1 \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} \le h_c(\beta) \le c_1^{-1} \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)}.$$

If $B = B_c$ there exists $c_2 > 0$ such that for $0 \le \beta \le 1$

(2.10)
$$h_c(\beta) \le \exp(-c_2/\beta^2)$$

If $B_c < B < 2$ there exists $\beta_0 > 0$ such that $h_c(\beta) = 0$ for every $0 < \beta \le \beta_0$.

The main result of the present work is that in the marginal case, the two critical points *do differ* for every disorder strength:

THEOREM 2.3 Let $B = B_c$. For every $0 < \beta_0 < \infty$ there exists a constant $0 < c_3 := c_3(\beta_0) < \infty$ such that for every $0 < \beta \leq \beta_0$

(2.11)
$$h_c(\beta) \ge \exp(-c_3/\beta^4).$$

3 The Nonhierarchical Model

3.1 The Renewal-Based Model

We let $\tau := {\tau_0, \tau_1, ...}$ be a renewal process of law **P**, with interarrival law $K(\cdot)$; i.e., $\tau_0 = 0$ and ${\tau_i - \tau_{i-1}}_{i \in \mathbb{N}}$ is a sequence of IID integer-valued random variables such that

(3.1)
$$\mathbf{P}(\tau_1 = n) =: K(n) \overset{n \to \infty}{\sim} \frac{C_K}{n^{1+\alpha}}$$

with $C_K > 0$ and $\alpha > 0$. We require that $K(\cdot)$ be a probability on \mathbb{N} , which amounts to assuming that the renewal process is recurrent. We also require that K(n) > 0 for every $n \in \mathbb{N}$, but this is inessential and is just meant to avoid making a certain number of remarks and small detours in the proofs to take care of this point.

As in Section 2, $\omega := \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ denotes a sequence of IID standard Gaussian random variables. For a given system size $N \in \mathbb{N}$, coupling parameters $h \in \mathbb{R}$, $\beta \ge 0$, and a given disorder realization ω , the partition function of the model is defined by

(3.2)
$$Z_{N,\omega} := \mathbf{E} \Big[e^{\sum_{n=1}^{N} (\beta \omega_n + h - \beta^2/2) \delta_n} \delta_N \Big],$$

where $\delta_n := \mathbb{1}_{\{n \in \tau\}}$, while the quenched free energy is

(3.3)
$$F(\beta, h) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N,\omega}$$

(we use the same notation as for the hierarchical model, since there is no risk of confusion). As for the hierarchical model, the limit exists and is nonnegative [18, chap. 4], and one defines the critical point $h_c(\beta)$ for a given $\beta \ge 0$ exactly as in (2.6). Again, one notices that the annealed free energy, i.e., the limit of $(1/N) \log \mathbb{E} Z_{N,\omega}$, is nothing but F(0, h), so that the annealed critical point is just $h_c(0)$.

Remark 3.1. With respect to most of the literature, our definition of the model is different (but of course completely equivalent) in that usually the partition function is defined as in (3.2) with $h - \beta^2/2$ replaced simply by h.

The annealed (or pure) model can be solved exactly, and in particular it is well known [18, theorem 2.1] that, if $\alpha \neq 1$, there exists a positive constant c_K (which depends on $K(\cdot)$) such that

• •

(3.4)
$$F(0,h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} c_K h^{\max(1,1/\alpha)}.$$

In the case $\alpha = 1$, (3.4) has to be modified in that the right-hand side becomes $\phi(1/h)h$ for some slowly varying function $\phi(\cdot)$, which vanishes at infinity [18, theorem 2.1]. In particular, note that $h_c(0) = 0$ so that $h_c(\beta) \ge 0$ by Jensen's inequality, exactly as for the hierarchical model.

Remark 3.2. The assumption of recurrence for τ , i.e., $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$, is by no means a restriction. In fact, as has been observed several times in the literature, if $\Sigma_K := \sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) < 1$, one can define $\tilde{K}(n) := K(n) / \Sigma_K$, and of course the renewal τ with law $\tilde{\mathbf{P}}(\tau_1 = n) = \tilde{K}(n)$ is recurrent. Then it is immediate to realize from definition (3.3) that

(3.5)
$$F(\beta, h) = \tilde{F}(\beta, h + \log \Sigma_K),$$

 $\tilde{\mathbf{F}}$ being the free energy of the model defined as in (3.2)–(3.3) but with \mathbf{P} replaced by $\tilde{\mathbf{P}}$. In particular, $h_c^a(\beta) = -\log \Sigma_K$. This observation allows us to apply Theorem 3.5 below, for instance, to the case where τ is the set of returns to the origin of a symmetric, finite-variance random walk on \mathbb{Z}^3 (pinning of a directed polymer in dimension (3 + 1)). Indeed, in this case (3.1) holds with $\alpha = \frac{1}{2}$. For more details on this issue, we refer to [18, chap. 1].

3.2 Relevance or Irrelevance of Disorder

As for the hierarchical model, the question whether $h_c(\beta)$ coincides with $h_c(0)$ for β small has recently been solved *except in the marginal case* $\alpha = \frac{1}{2}$:

THEOREM 3.3 If $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, there exists $\beta_0 > 0$ such that $h_c(\beta) = 0$ for every $0 \le \beta \le \beta_0$. If $\alpha = \frac{1}{2}$, there exists a constant $c_4 > 0$ such that for $\beta \le 1$

$$h_c(\beta) \le \exp(-c_4/\beta^2)$$

If $\alpha > \frac{1}{2}$, $h_c(\beta) > 0$ for every $\beta > 0$, and, if in addition $\alpha \neq 1$, there exists a constant $c_5 > 0$ such that if $\beta \leq 1$

(3.7)
$$c_5 \beta^{\max(2\alpha/(2\alpha-1),2)} \le h_c(\beta) \le c_5^{-1} \beta^{\max(2\alpha/(2\alpha-1),2)}$$

If $\alpha = 1$, there exist a constant $c_6 > 0$ and a slowly varying function $\psi(\cdot)$ vanishing at infinity such that for $\beta \leq 1$

(3.8)
$$c_6 \beta^2 \psi(1/\beta) \le h_c(\beta) \le c_6^{-1} \beta^2 \psi(1/\beta)$$

The results for $\alpha \leq \frac{1}{2}$, together with the critical point upper bounds for $\alpha > \frac{1}{2}$, have been proven in [3] and then in [32]; the lower bounds on the critical point for $\alpha > \frac{1}{2}$ have been proven in [10] (the result in [10] is slightly weaker than what we state here and the case $\alpha = 1$ was not treated) and then in [5] (with the full result cited here).

The case $\alpha = 0$ has also been considered, but in that case (3.1) has to be replaced by K(n) = L(n)/n, with $L(\cdot)$ a function varying slowly at infinity and such that $\sum_{n \in \mathbb{N}} K(n) = 1$. For instance, this corresponds to the case where τ is the set of returns to the origin of a symmetric random walk on \mathbb{Z}^2 . In this case, it has been shown in [4] that quenched and annealed critical points coincide for every value of $\beta \ge 0$.

Remark 3.4. Let us also recall that it is proven in [21] that, for every $\alpha > 0$, we have

(3.9)
$$F(\beta, h) \le \frac{1+\alpha}{2\beta^2} (h - h_c(\beta))^2$$

for all $\beta > 0$, $h > h_c(\beta)$. This means that when $\alpha > \frac{1}{2}$ disorder is also relevant in the sense that it changes the free-energy critical exponent (cf. (3.4)). The analogous result for the hierarchical model, with $(1 + \alpha)$ replaced by some constant c(B) in (3.9), is proven in [28].

In the present work we prove the following:

THEOREM 3.5 Assume that (3.1) holds with $\alpha = \frac{1}{2}$. For every $\beta_0 > 0$ there exists a constant $0 < c_7 := c_7(\beta_0) < \infty$ such that for $\beta \leq \beta_0$

$$h_c(\beta) \ge e^{-c_7/\beta^2}$$

4 Marginal Relevance of Disorder: The Hierarchical Case

4.1 Preliminaries: A Galton-Watson Representation for X_n

One can give an expression for X_n which is analogous to that of the partition function (3.2) of the nonhierarchical model and which is more practical for our purposes. This involves a Galton-Watson tree [26] describing the successive offsprings of one individual. The offspring distribution concentrates on 0 (with probability (B-1)/B) and on 2 (with probability 1/B). So, at a given generation, each individual that is present has either no descendant or two descendants, and this is independent of any other individual of the generation. This branching procedure directly maps to a random tree (see Figure 4.1): the law of such a branching process up to generation *n* (the first individual is at generation 0) or, analogously, the law of the random tree from the root (level *n*) up to the leaves (level 0) is denoted by \mathbf{P}_n . The individuals that are present at the n^{th} generation are a random subset \mathcal{R}_n of $\{1, \ldots, 2^n\}$. We set $\delta_j := \mathbb{1}_{j \in \mathcal{R}_n}$. Note that the mean offspring size is $\frac{2}{B} > 1$, so that the Galton-Watson process is supercritical.

The following procedure on the standard binary graph $\mathcal{T}^{(n)}$ of depth n + 1 (again, the root is at level n and the leaves, numbered from 1 to 2^n , at level 0) is going to be of help too. Given $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, 2^n\}$, let $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^{(n)}$ be the subtree obtained from $\mathcal{T}^{(n)}$ by deleting all edges except those that lead from leaves $j \in \mathcal{I}$ to the root. Note that, with the offspring distribution we consider, in general $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^{(n)}$ is not a realization of the *n*-generation Galton-Watson tree (some individuals may have just one descendant in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^{(n)}$; see Figure 4.1).

Let $v(n, \mathcal{I})$ be the number of nodes in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^{(n)}$, with the convention that leaves are not counted as nodes, while the root is.



FIGURE 4.1. The thick solid lines in the figure form the tree $\mathcal{T}_{\{4,6,13\}}^{(4)}$, which is a subtree of the binary tree $\mathcal{T}^{(n)}$ (n = 4). Note that $\mathcal{T}_{\{4,6,13\}}^{(4)}$ is *not* a possible realization of the Galton-Watson tree, while it becomes so if we complete it by adding the thin solid lines. At level 0 there are the leaves; the nodes of $\mathcal{T}_{\{4,6,13\}}^{(4)}$ are marked by dots. $\mathcal{T}_{\{4,6,13\}}^{(4)}$ contains $v(4, \{4, 6, 13\}) = 9$ nodes. In terms of Galton-Watson offsprings, for the (*completed*) trajectory above we have $\mathcal{R}_4 = \{3, 4, 5, 6, 13, 14\}$. Moreover, computing the average in (4.2) means computing the probability that the realization of the Galton-Watson tree contains $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^{(n)}$ as a subset, but this simply means requiring that the individuals at the nodes of $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^{(n)}$ have two children and the expression (4.2) becomes clear.

PROPOSITION 4.1 *For every* $n \ge 0$ *we have*

(4.1)
$$X_n = \mathbf{E}_n \Big[e^{\sum_{i=1}^{2^n} (\beta \omega_i + h - \beta^2/2) \delta_i} \Big].$$

For every $n \ge 0$ and $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, 2^n\}$, one has

(4.2)
$$\mathbf{E}_n \left[\prod_{i \in \mathcal{I}} \delta_i \right] = B^{-v(n,\mathcal{I})}$$

In particular, $\mathbf{E}_n[\delta_i] = B^{-n}$ for every $i = 1, ..., 2^n$; i.e., the Green function is constant throughout the system.

PROOF OF PROPOSITION 4.1: The right-hand side in (4.1) for n = 0 is equal to $\exp(h-\beta^2/2+\beta\omega_1)$. Moreover, at the $(n+1)^{\text{th}}$ generation either the branching process contains only the initial individual (with probability (B-1)/B) or the initial individual has two children, which we may look at as initial individuals of two independent Galton-Watson trees containing *n* new generations. We therefore have that the basic recursion (2.1) is satisfied.

The second fact, (4.2), is a direct consequence of the definitions (see also the caption of Figure 4.1). \Box

Remark 4.2. The representation we have introduced in this section shows in particular that $\mathbb{E}X_n$ is just the generating function of $|\mathcal{R}_n|$, and the free energy F(0, h) is therefore a natural quantity for the Galton-Watson process: in fact, $\frac{1}{\alpha}$ (α given in (2.8)) appears in the original works on branching processes by T. E. Harris (of course, not to be confused with A. B. Harris, who proposed the disorder relevance criterion on which we are focusing here).

4.2 Proof of Theorem 2.3

While the discussion of the previous section is valid for every $B \in (1, 2)$, now we have to assume $B = B_c = \sqrt{2}$. However, some of the steps are still valid in general, and we are going to replace B with B_c only when it is really needed. The proof is split into three subsections: the first introduces the fractional moment method and reduces the statement we want to prove, which is a statement on the limit $n \to \infty$ behavior of X_n , to finite-*n* estimates. The estimates are provided in the second and third subsections.

Fractional Moment Method

Let $U_n^{(i)}$ denote the quantity $[R_n^{(i)} - (B-1)]_+$ where $[x]_+ = \max(x, 0)$. By using the inequality

(4.3)
$$[rs + r + s]_{+} \le [r]_{+}[s]_{+} + [r]_{+} + [s]_{+},$$

which holds whenever $r, s \ge -1$, it is easy to check that (2.1) implies

(4.4)
$$U_{n+1}^{(i)} \le \frac{U_n^{(2i-1)}U_n^{(2i)} + (U_n^{(2i-1)} + U_n^{(2i)})(B-1)}{B}$$

Given $0 < \gamma < 1$, we define $A_n := \mathbb{E}([X_n - (B-1)]_+^{\gamma})$. From (4.4) above and by using the fractional inequality

(4.5)
$$\left(\sum a_i\right)^{\gamma} \leq \sum a_i^{\gamma},$$

which holds whenever $a_i \ge 0$, we derive

(4.6)
$$A_{n+1} \le \frac{A_n^2 + 2(B-1)^{\gamma} A_n}{B^{\gamma}}$$

One readily sees now that, if there exists some integer k such that

(4.7)
$$A_k < B^{\gamma} - 2(B-1)^{\gamma}$$

then A_n tends to 0 as *n* tends to infinity (this statement is easily obtained by studying the fixed points of the function $x \mapsto (x^2 + 2(B-1)^{\gamma}x)/B^{\gamma})$). On the other hand,

(4.8)
$$\mathbb{E}[X_n^{\gamma}] \le \mathbb{E}([X_n - (B-1)]_+ + (B-1))^{\gamma} \le (B-1)^{\gamma} + A_n,$$

and therefore (4.7) implies that $F(\beta, h) = 0$ since, by the Jensen inequality, we have

(4.9)
$$\frac{1}{2^n} \mathbb{E} \log X_n \le \frac{1}{2^n \gamma} \log \mathbb{E}[X_n^{\gamma}].$$

Note that, to establish $F(\beta, h) = 0$, it suffices to prove that $\limsup_n 2^{-n} \log A_n \le 0$; hence our approach yields a substantially stronger piece of information, i.e., that the fractional moment A_n does go to 0.

In order to find a k such that (4.7) holds, we introduce a new probability measure $\tilde{\mathbb{P}}$ (which is going to depend on k) such that $\tilde{\mathbb{P}}$ and \mathbb{P} are equivalent, that is, mutually absolutely continuous. By Hölder's inequality applied for $p = 1/\gamma$ and $q = 1/(1 - \gamma)$, we have

10)

$$A_{k} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}[X_{k} - (B-1)]_{+}^{\gamma}\right]$$

$$\leq \left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}\right]\right)^{1-\gamma} (\widetilde{\mathbb{E}}[[X_{k} - (B-1)]_{+}])^{\gamma},$$

and a sufficient condition for (4.7) is therefore that

$$(4.11) \quad \widetilde{\mathbb{E}}[[X_k - (B-1)]_+] \le \left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}\right]\right)^{1-1/\gamma} (B^{\gamma} - 2(B-1)^{\gamma})^{1/\gamma}.$$

Let $x_n^{(0)}$ be obtained by applying the annealed iteration $x \mapsto (x^2 + (B-1))/B$ to the initial condition $x_0^{(0)} = 0 n$ times. One has that $x_n^{(0)}$ approaches monotonically the stable fixed point (B - 1). Since the coefficients in the iteration (2.1) are positive, one has for every h, β, ω that

$$X_n \ge x_n^{(0)} \nearrow^{n \to \infty} B - 1$$

(this is a deterministic bound) and therefore, for any given $\zeta > 0$, one can find an integer n_{ζ} such that if $n \ge n_{\zeta}$ we have

(4.12)
$$\widetilde{\mathbb{E}}[[X_n - (B-1)]_+] \le \widetilde{\mathbb{E}}[X_n - (B-1)] + \frac{\zeta}{4}.$$

Moreover, since

$$(B^{\gamma} - 2(B-1)^{\gamma})^{1/\gamma} - (2-B) \stackrel{\gamma \nearrow 1}{\sim} -c_B(1-\gamma)$$

for some $c_B > 0$, one can find $\gamma = \gamma_{\xi}$ such that $(B^{\gamma} - 2(B-1)^{\gamma})^{1/\gamma} \ge 2 - B - \frac{\zeta}{4}$. At this point, if $\gamma = \gamma_{\xi}$, $k \ge n_{\xi}$, and if $\tilde{\mathbb{P}}$ is such that

(4.13)
$$\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}\right]\right)^{1-1/\gamma} \ge 1 - \frac{\zeta}{4}$$

(recall that $\widetilde{\mathbb{P}}$ depends on k) and $\widetilde{\mathbb{E}}[X_k] \leq 1 - \zeta$, then (4.11) is satisfied and $F(\beta, h) = 0$.

We sum up what we have obtained:

LEMMA 4.3 Let $\zeta > 0$ and choose $\gamma (= \gamma_{\zeta})$ and n_{ζ} as above. If there exists $k \ge n_{\zeta}$ and a probability measure $\tilde{\mathbb{P}}$ (such that \mathbb{P} and $\tilde{\mathbb{P}}$ are equivalent probabilities)

(4.)

such that

(4.14)
$$\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}\right]\right)^{1-1/\gamma} \ge 1 - \frac{\zeta}{4}$$

and

(4.15)
$$\widetilde{\mathbb{E}}[X_k] \le 1 - \zeta$$

then the free energy is equal to 0.

Change of Measure

In order to use wisely the result of the previous section, we have to find a measure $\tilde{\mathbb{E}} := \tilde{\mathbb{E}}_n$ on the environment that is, in a sense, close to \mathbb{E} (cf. (4.14)) and that lowers significantly the expectation of X_n . In [19] we introduced the idea of changing the mean of the ω -variables while keeping their IID character. This strategy was enough to prove disorder relevance for $B < B_c$, but it is not effective in the marginal case $B = B_c$ we are considering here. Here, instead, we choose to introduce *weak*, *long-range* negative correlations between the different ω_i without changing the laws of the one-dimensional marginals. As will be clear, the covariance structure we choose reflects the hierarchical structure of the model we are considering.

In what follows we take $h \ge h_c(0) = 0$.

We define $\tilde{\mathbb{P}}_n$ by stipulating that the variables ω_i , $i > 2^n$, are still IID standard Gaussian independent of $\omega_1, \ldots, \omega_{2^n}$, while $\omega_1, \ldots, \omega_{2^n}$ are Gaussian, centered, and with covariance matrix

$$(4.16) C := I - \varepsilon V,$$

where I is the $2^n \times 2^n$ identity matrix, $\varepsilon > 0$, and V is a symmetric $2^n \times 2^n$ matrix with zero diagonal terms and with positive off-diagonal terms (ε and V will be specified in a moment).

The choice $V_{ii} = 0$ implies, of course, Tr(V) = 0, and we are also going to impose that the Hilbert-Schmidt norm of V verifies $||V||^2 := \sum_{i,j} V_{i,j}^2 =$ $\text{Tr}(V^2) = 1$. This in particular implies that C is positive definite (so that $\tilde{\mathbb{P}}_n$ exists!) as soon as $\varepsilon < 1$: this is because ||V||, being a matrix norm, dominates the spectral radius of V.

Now, still without choosing V explicitly, we compute a lower bound for the left-hand side of (4.14). The mutual density of $\tilde{\mathbb{P}}_n$ and \mathbb{P} is

(4.17)
$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}_n}{\mathrm{d}\mathbb{P}}(\omega) = \frac{e^{-\frac{1}{2}((C^{-1}-I)\omega,\omega)}}{\sqrt{\det C}}$$

with the notation $(Av, v) := \sum_{1 \le i, j \le 2^n} A_{ij} v_i v_j$, and therefore a straightforward Gaussian computation gives

(4.18)
$$\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}_n} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} \right] \right)^{1-1/\gamma} = \frac{(\det[I - (\varepsilon/(1-\gamma))V])^{(1-\gamma)/(2\gamma)}}{(\det C)^{1/(2\gamma)}}.$$

If we want to prove a lower bound of the type (4.14), a necessary condition is of course that the numerator in (4.18) be positive: this is ensured by requiring $\varepsilon < 1-\gamma$. For the next computation we are also going to require that $\varepsilon/(1-\gamma) \le \frac{1}{2}$: in fact, we are going to use that $\log(1 + x) \ge x - x^2$ if $x \ge -\frac{1}{2}$, and $\operatorname{Tr}(V) = 0$ to obtain that

(4.19)
$$\det\left[I - \frac{\varepsilon}{1 - \gamma}V\right] = \exp\left(\operatorname{Tr}\left(\log\left(I - \frac{\varepsilon}{1 - \gamma}\right)V\right)\right) \\ \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{(1 - \gamma)^2}\|V\|^2\right),$$

while $\log(1 + x) \le x$ and the traceless character of V directly imply det $C \le 1$, so that finally

(4.20)
$$\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}_n} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} \right] \right)^{1-1/\gamma} \ge \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\gamma(1-\gamma)} \right)$$

Next, we estimate the expected value of X_n under the modified measure. From (4.1) we see that

(4.21)
$$\widetilde{\mathbb{E}}_{n} X_{n} = \mathbf{E}_{n} \Big[e^{(h - (\beta^{2}/2)) \sum_{i=1}^{2^{n}} \delta_{i}} \widetilde{\mathbb{E}}_{n} e^{\sum_{i=1}^{2^{n}} \beta \omega_{i} \delta_{i}} \Big] \\ = \mathbf{E}_{n} \Big[e^{-\varepsilon (\beta^{2}/2) (V\delta, \delta) + \sum_{i=1}^{2^{n}} h\delta_{i}} \Big] \le e^{2^{n} h} \mathbf{E}_{n} \Big[e^{-\varepsilon (\beta^{2}/2) (V\delta, \delta)} \Big].$$

Finally, we choose V. From (4.21), it is not hard to guess that the most convenient choice, subject to the constraint $||V||^2 = 1$, is

(4.22)
$$V_{ij} = \mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j] / \sqrt{\sum_{1 \le i \ne j \le 2^n} (\mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j])^2}$$

for $i \neq j$, while we recall that $V_{ii} = 0$. The normalization in (4.22) can be computed with the help of Proposition 4.1:

(4.23)
$$\sum_{1 \le i \ne j \le 2^n} (\mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j])^2 = 2^n \sum_{1 < j \le 2^n} (\mathbf{E}_n[\delta_1 \delta_j])^2 = 2^n \sum_{1 \le a \le n} \frac{2^{a-1}}{B_c^{2(n+(a-1))}} = n.$$

In the second equality, we used the fact that there are 2^{a-1} values of $1 < j \le 2^n$ such that the two branches of the tree $\mathcal{T}_{\{1,j\}}^{(n)}$ join at level *a* (cf. the notation of Section 4.1), and such a tree contains n + a - 1 nodes.

As a side remark, note that if $B_c < B < 2$ (irrelevant disorder regime) the left-hand side of (4.23) instead goes to 0 with *n*, while for $1 < B < B_c$ (relevant disorder regime) it diverges exponentially with *n*.

So, in the end, our choice for V is

(4.24)
$$V_{ij} = \begin{cases} \mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j]/\sqrt{n} & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{if } i = j. \end{cases}$$

Checking the Conditions of Lemma 4.3

To conclude the proof of Theorem 2.3, we have to show that if $\beta \leq \beta_0$ and $h \leq \exp(-c_3/\beta^4)$ (and provided that $c_3 = c_3(\beta_0)$ is chosen large enough) the conditions of Lemma 4.3 are satisfied. The main point is therefore to estimate the expectation of X_n under $\tilde{\mathbb{P}}_n$.

Recalling that (cf. (4.21))

(4.25)
$$\widetilde{\mathbb{E}}_n X_n \leq \mathbf{E}_n \Big[e^{-(\beta^2/2)\varepsilon \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2^n} \delta_i \delta_j \frac{\mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j]}{\sqrt{n}}} \Big] e^{2^n h},$$

we define

(4.26)
$$Y_n := \sum_{1 \le i \ne j \le 2^n} \delta_i \delta_j \frac{\mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j]}{n}.$$

Thanks to (4.23), we know that $\mathbf{E}_n(Y_n) = 1$, so that the Paley-Zygmund inequality gives

(4.27)
$$\mathbf{P}_n\left(Y_n \ge \frac{1}{2}\right) = \mathbf{P}_n\left(Y_n \ge \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{E}_n(Y_n)\right) \ge \frac{(\mathbf{E}_n(Y_n))^2}{4\mathbf{E}_n(Y_n^2)} = \frac{1}{4\mathbf{E}_n(Y_n^2)}.$$

We need therefore the following estimate, which will be proved at the end of the section:

LEMMA 4.4 We have

(4.28)
$$(1 \le) \mathcal{K} := \sup_{n} \mathbf{E}_{n}[Y_{n}^{2}] < \infty.$$

Together with (4.27), this implies

(4.29)
$$\mathbf{P}_n\left[Y_n \ge \frac{1}{2}\right] \ge \frac{1}{4\mathcal{K}}$$

so that, for all $n \ge 0$,

(4.30)
$$\mathbf{E}_{n} \left[e^{-(\beta^{2}/2)\varepsilon \sum_{1 \le i \ne j \le 2^{n}} \delta_{i} \delta_{j} \frac{\mathbf{E}_{n} [\delta_{i} \delta_{j}]}{\sqrt{n}}} \right] \\ = \mathbf{E}_{n} \left[e^{-\frac{\sqrt{n}\beta^{2}\varepsilon}{2}} Y_{n} \right] \le 1 - \frac{1}{4\mathcal{K}} \left(1 - 4\mathcal{K} \exp\left(-\frac{\sqrt{n}\beta^{2}\varepsilon}{4}\right) \right).$$

We fix $\zeta := 1/(40\mathcal{K})$, and we choose $\gamma = \gamma_{\zeta}$ (cf. Lemma 4.3) and ε in (4.16) small enough so that (cf. (4.20))

(4.31)
$$\left[\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}_n}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}\right]^{1-1/\gamma} \ge \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\gamma(1-\gamma)}\right) \ge 1 - \frac{\zeta}{4}$$

Then one can check with the help of (4.30) that for $n \ge 50\mathcal{K}/(\beta^4 \varepsilon^2)$,

(4.32)
$$\mathbf{E}_{n}\left[e^{-(\beta^{2}/2)\varepsilon\sum_{1\leq i\neq j\leq 2^{n}}\delta_{i}\delta_{j}\frac{\mathbf{E}_{n}[\delta_{i}\delta_{j}]}{\sqrt{n}}}\right]\leq 1-3\zeta.$$

We choose

$$n = n_{\beta}$$
 in $\left[\frac{50\mathcal{K}}{\beta^4\varepsilon^2}, \frac{50\mathcal{K}}{\beta^4\varepsilon^2} + 1\right)$

and $h = \zeta 2^{-n}$. If ε has been chosen small enough above (how small depending only on β_0), this guarantees that $n \ge n_{\zeta}$, where n_{ζ} was defined just before Lemma 4.3. Injecting (4.32) in (4.25) finally gives

(4.33)
$$\widetilde{\mathbb{E}}[X_n] \le (1-3\zeta)e^{\zeta} \le 1-\zeta.$$

The two conditions of Lemma 4.3 are therefore verified, which ensures that the free energy is 0 for this value of *h*. In conclusion, for every $\beta \leq \beta_0$ we have proven that

(4.34)
$$h_c(\beta) \ge \zeta 2^{-n_\beta} \ge \frac{1}{80\mathcal{K}} \exp\left(-\frac{50\mathcal{K}\log 2}{\beta^4 \varepsilon^2}\right)$$

for some $\varepsilon = \varepsilon(\beta_0)$ sufficiently small but independent of β .

PROOF OF LEMMA 4.4: We have

(4.35)
$$\mathbf{E}_n(Y_n^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \le i \ne j \le 2^n} \sum_{1 \le k \ne l \le 2^n} \mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j] \mathbf{E}_n[\delta_k \delta_l] \mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j \delta_k \delta_l].$$

We will consider only the contribution coming from the terms such that $i \neq k, l$ and $j \neq k, l$. The remaining terms can be treated similarly, and their global contribution is easily seen to be exponentially small in *n*. For instance, when i = kand j = l, one gets

(4.36)
$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \le i \ne j \le 2^n} \mathbf{E}_n [\delta_i \delta_j]^3 \le \frac{1}{n} \mathbf{E}_n(Y_n) \max_{1 \le i < j \le 2^n} \mathbf{E}_n [\delta_i \delta_j],$$

which is exponentially small in *n*, in view of Theorem 4.1.

From now on, therefore, we assume that i, j, k, l are all distinct. Two cases can occur:

Case 1. The tree $\mathcal{T}_{\{i,j,k,l\}}^{(n)}$ (it is better to view it here as the backbone tree, not as the Galton-Watson tree [see Figure 4.1]) has two branches, which themselves bifurcate into two subbranches; cf. Figure 4.2(1) for an example. We call *c* the level at which the first bifurcation occurs (c = n in the example of Figure 4.2(1)), and *a*, *b* the levels at which the two branches bifurcate. One clearly has $1 \le a < c \le n$



FIGURE 4.2. The two different possible topologies of the tree $\mathcal{T}_{\{i,j,k,l\}}^{(n)}$. Case 2 is understood to include also the trees where the branch that does not bifurcate is the one on the left, or where the subbranch that bifurcates is the right descendent of node v. We consider only trees where the four leaves are distinct, since the remaining ones give a contribution to $\mathbf{E}_n(Y_n^2)$ that vanishes for $n \to \infty$.

and $1 \le b < c \le n$. All trees of this form can be obtained as follows: first choose a leaf f_1 between 1 and 2^n . Then choose f_2 among the 2^{a-1} possible ones that join with f_1 at level a, f_3 among the 2^{c-1} that join with f_1 at level c, and finally f_4 among the 2^{b-1} that join with f_3 at level b.

Clearly we are overcounting the trees (note, e.g., that already in the choice of f_1 and f_2 we are overcounting by a factor of 2), but we are only after an *upper* bound for $\mathbf{E}_n(Y_n^2)$ (the same remark applies to Case 2 below). We still have to specify how to identify (f_1, f_2, f_3, f_4) with a permutation of (i, j, k, l). When $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (i, j, k, l)$, we get the following contribution to (4.35):

(4.37)
$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \le a < c \le n} \sum_{1 \le b < c \le n} \frac{2^{n+a+b+c-3}}{B_c^{n+a+b+c-3} B_c^{n+a-1} B_c^{n+b-1}},$$

where we used Theorem 4.1 to write, e.g., $\mathbf{E}_n[\delta_i \delta_j] = B_c^{-n-a+1}$. Since $B_c = \sqrt{2}$ we can rewrite (4.37) as

(4.38)
$$\frac{1}{\sqrt{2}n^2} \sum_{1 < c \le n} (c-1)^2 2^{-(n-c)/2}$$

which is clearly bounded as n grows.

If instead $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (i, k, j, l)$ or $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (i, k, l, j)$, one gets

(4.39)
$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \le a < c \le n} \sum_{1 \le b < c \le n} \frac{2^{n+a+b+c-3}}{B_c^{n+a+b+c-3} B_c^{n+c-1} B_c^{n+c-1}}$$

which is easily seen to be $O(1/n^2)$.

All the other permutations of (i, j, k, l) give a contribution that equals, by symmetry, one of the three we just considered.

Case 2. The tree $\mathcal{T}_{\{i,j,k,l\}}^{(n)}$ has two branches: one of them does not bifurcate, the other one bifurcates into two subbranches, one of which bifurcates into two sub-subbranches; cf. Figure 4.2(2). Let a_1, a_2, a_3 be the levels where the three bifurcations occur, ordered so that $1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le n$. This time, we choose f_1 between 1 and 2^n and then, for i = 1, 2, 3, f_{i+1} among the 2^{a_i-1} leaves that join with f_1 at level a_i . If $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (i, j, k, l)$, one has

$$(4.40) \quad \frac{1}{n^2} \sum_{1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le n} \frac{2^{n+a_1+a_2+a_3-3}}{B_c^{n+a_1+a_2+a_3-3} B_c^{n+a_1-1} B_c^{n+a_3-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}n^2} \sum_{1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le n} 2^{-(n-a_2)/2},$$

which is $O(\frac{1}{n})$.

Finally, when (f_1, f_2, f_3, f_4) is equal to (i, k, j, l) or to (i, k, l, j) one gets

$$(4.41) \quad \frac{1}{n^2} \sum_{1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le n} \frac{2^{n+a_1+a_2+a_3-3}}{B_c^{n+a_1+a_2+a_3-3} B_c^{n+a_2-1} B_c^{n+a_3-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}n^2} \sum_{1 \le a_1 < a_2 < a_3 \le n} 2^{-(n-a_1)/2},$$
which is $O(1/n^2)$.

which is $O(1/n^2)$.

5 Marginal Relevance of Disorder: The Nonhierarchical Case

Here we prove Theorem 3.5 and therefore assume that (3.1) holds with $\alpha = \frac{1}{2}$. We choose and fix once and for all $\gamma \in (\frac{2}{3}, 1)$ and set for h > 0

(5.1)
$$k := k(h) := \left\lfloor \frac{1}{h} \right\rfloor.$$

Remark 5.1. In [10] the choice k(h) = |1/F(0, h)| was made, and it corresponds to choosing k(h) equal to the correlation length of the annealed system. In our case

$$1/F(0,h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} 1/(c_K h^2)$$

(cf. (3.4)) and therefore (5.1) may look surprising. However, there is nothing particularly deep behind this: for $\alpha = \frac{1}{2}$, due to the fact that we have to prove delocalization for $h \leq \exp(-c_7/\beta^4)$, choosing k(h) that diverges for small h like 1/h instead of $1/h^2$ just leads to choosing c_7 different by a factor of 2 (and we do not track the precise value of constants). We take this occasion to stress that it is practical to work always with sufficiently large values of k(h), and this can be achieved by choosing c_7 sufficiently large.



FIGURE 5.1. A typical configuration that blocks. We point out that it may happen that a gray block contains no point, but it is convenient for us to treat gray blocks as if they always contained contact points. It is only to the charges ω in black and gray blocks that we apply the change-of-measure argument that is crucial for our proof.

We divide \mathbb{N} into blocks

(5.2)
$$B_i := \{(i-1)k+1, (i-1)k+2, \dots, ik\}$$
 with $i = 1, 2, \dots$

From now on we assume that $(\frac{N}{k})$ is an integer, and of course it is also the number of blocks contained in the interval $\{1, \ldots, N\}$.

We define, in analogy with the hierarchical case,

and we note that, as in (4.9), Jensen's inequality implies that a sufficient condition for $F(\beta, h) = 0$ is that A_N does not diverge when $N \to \infty$. Therefore, our task is to show that for every $\beta_0 > 0$ we can find $c_7 > 0$ such that for every $\beta \le \beta_0$ and h such that

(5.4)
$$0 < h \le \exp(-c_7/\beta^4)$$

one has that $\sup_N A_N < \infty$.

5.1 Decomposition of $Z_{N,\omega}$ and Change of Measure

The first step is a decomposition of the partition function similar to that used in [33], which is a refinement of the strategy employed in [10]. For $0 < i \leq j$ we let $Z_{i,j} := Z_{(j-i),\theta^i\omega}$, with $(\theta^i\omega)_a := \omega_{i+a}, a \in \mathbb{N}$; i.e., $\theta^i\omega$ is the result of the application to ω of a shift by *i* units to the left. We decompose $Z_{N,\omega}$ according to the value of the first point (n_1) of τ after 0, the last point (j_1) of τ not exceeding $n_1 + k - 1$, then the first point (n_2) of τ after j_1 , and so on. We call i_r the index of the block in which n_r falls, and $\ell := \max\{r : n_r \leq N\}$; see Figure 5.1. Due to the constraint $N \in \tau$, one has always $i_\ell = (N/k)$.

In formulas,

(5.5)
$$Z_{N,\omega} = \sum_{\ell=1}^{N/k} \sum_{i_0:=0 < i_1 < \cdots < i_\ell = N/k} \hat{Z}_{\omega}^{(i_1,\dots,i_\ell)},$$

where

(5.6)
$$\widehat{Z}_{\omega}^{(i_1,\dots,i_{\ell})} := \sum_{n_1 \in B_{i_1}} \sum_{j_1=n_1}^{n_1+k-1} \sum_{\substack{n_2 \in B_{i_2}: \\ n_2 \ge n_1+k}} \sum_{j_2=n_2}^{n_2+k-1} \cdots \sum_{\substack{n_{\ell-1} \in B_{i_{\ell-1}}: \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-2}+k}} \sum_{j_{\ell-1}=n_{\ell-1}} \sum_{\substack{n_\ell \in B_{N/k}: \\ n_\ell \ge n_{\ell-1}+k}} z_{n_1} K(n_1) Z_{n_1,j_1} z_{n_2} K(n_2-j_1) Z_{n_2,j_2} \cdots z_{n_{\ell}} K(n_{\ell}-j_{\ell-1}) Z_{n_{\ell},N},$$

and $z_n := e^{\beta \omega_n + h - \beta^2/2}$.

Then, from inequality (4.5), we have

(5.7)
$$A_N \leq \sum_{\ell=1}^{N/k} \sum_{i_0:=0 < i_1 < \cdots < i_\ell = N/k} \mathbb{E}[(\hat{Z}_{\omega}^{(i_1,\dots,i_\ell)})^{\gamma}],$$

and, as in (4.10), we apply Hölder's inequality to get

(5.8)
$$\mathbb{E}\left[\left(\widehat{Z}_{\omega}^{(i_{1},...,i_{\ell})}\right)^{\gamma}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(\widehat{Z}_{\omega}^{(i_{1},...,i_{\ell})}\right)^{\gamma}\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}(\omega)\right] \\ \leq (\widetilde{\mathbb{E}}\widehat{Z}_{\omega}^{(i_{1},...,i_{\ell})})^{\gamma}\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}\right]\right)^{1-\gamma}.$$

The new law $\tilde{\mathbb{P}} := \tilde{\mathbb{P}}^{(i_1,\ldots,i_\ell)}$ will be taken to depend on the set (i_1,\ldots,i_ℓ) . In order to define it, let first of all

(5.9)
$$M := M(i_1, \ldots, i_\ell) := \{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\} \cup \{i_1 + 1, i_2 + 1, \ldots, i_{\ell-1} + 1\}.$$

Then we say that under $\tilde{\mathbb{P}}$ the random vector ω is Gaussian, centered, and with covariance matrix

$$\mathbb{E}(\omega_{i}\omega_{j}) = \mathbb{1}_{i=j} - C_{ij}$$
(5.10)
$$:= \begin{cases} \mathbb{1}_{i=j} - H_{ij} & \text{if there exists } u \in M \text{ such that } i, j \in B_{u} \\ \mathbb{1}_{i=j} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

(5.11)
$$H_{ij} := \begin{cases} (1-\gamma)/\sqrt{9k(\log k)|i-j|} & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{if } i = j. \end{cases}$$

Note that all the C_{ij} 's are nonnegative. It is immediate to check that the $k \times k$ symmetric matrix $\hat{H} := \{H_{ij}\}_{i,j=1}^{k}$ satisfies

(5.12)
$$\|\hat{H}\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} H_{ij}^2} \le \frac{1-\gamma}{2}$$

for k sufficiently large. In words, ω_n 's in different blocks are independent; in blocks B_u with $u \notin M$ they are just IID standard Gaussian random variables, while if $u \in M$ then the random vector $\{\omega_n\}_{n \in B_u}$ has covariance matrix $I - \hat{H}$, where I is the $k \times k$ identity matrix. Note that since $\|\hat{H}\|$ dominates the spectral radius

254

of \hat{H} , (5.12) guarantees that $I - \hat{H}$ is positive definite (and also that $I - (1-\gamma)^{-1}\hat{H}$ is positive definite, which will be needed just below).

The last factor in the right-hand side of (5.8) is easily obtained by recalling (4.18) and the independence of the ω_n 's in different blocks; one gets

(5.13)
$$\left(\widetilde{\mathbb{E}} \left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} \right] \right)^{1-\gamma} = \left(\frac{\det(I-\widehat{H})}{(\det(I-1/(1-\gamma)\widehat{H}))^{1-\gamma}} \right)^{|M|/2}.$$

Since \hat{H} has trace 0 and its (Hilbert-Schmidt) norm satisfies (5.12), one can apply $\det(I - \hat{H}) \leq \exp(-\operatorname{Tr}(\hat{H})) = 1$ and (4.19) (with V replaced by \hat{H} and ε by 1) to get that the right-hand side of (5.13) is bounded above by $\exp(|M|/2)$, which in turn is bounded by $\exp(\ell)$. Together with (5.8) and (5.7), we conclude that

(5.14)
$$A_N \leq \sum_{\ell=1}^{N/k} \sum_{i_0:=0 < i_1 < \cdots < i_\ell = N/k} e^{\ell} \left[\widetilde{\mathbb{E}} \, \widehat{Z}_{\omega}^{(i_1,\dots,i_\ell)} \right]^{\gamma}.$$

5.2 Reduction to a Nondisordered Model

37/1

We wish to bound the right-hand side of (5.14) with the partition function of a nondisordered pinning model in the delocalized phase, which goes to 0 for large N. We start by claiming that

(5.15)
$$\widetilde{\mathbb{E}} \widehat{Z}_{\omega}^{(i_1,\dots,i_{\ell})} \leq \sum_{n_1 \in B_{i_1}} \cdots \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}:\\n_{\ell} \geq n_{\ell-1}+k}} K(n_1) K(n_2 - j_1) \cdots K(n_{\ell} - j_{\ell-1}) \times U(j_1 - n_1) U(j_2 - n_2) \cdots U(N - n_{\ell}),$$

where

(5.16)
$$U(n) = c_8 \mathbf{P}(n \in \tau) \mathbf{E} \Big[e^{-\beta^2 \sum_{1 \le i < j \le n/2} H_{ij} \delta_i \delta_j} \Big],$$

and c_8 is a positive constant depending only on $K(\cdot)$. This is proven in the appendix. We are also going to make use of the following:

LEMMA 5.2 There exists
$$C_2 = C_2(K(\cdot)) < \infty$$
 such that if, for some $\eta > 0$,

(5.17)
$$\sum_{j=0}^{k-1} U(j) \le \eta \sqrt{k}$$

and

(5.18)
$$\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n \ge k} U(j) K(n-j) \le \eta,$$

then there exists $C_1 = C_1(\eta, k, K(\cdot))$ such that the right-hand side of (5.15) is bounded above by

(5.19)
$$C_1 \eta^{\ell} C_2^{\ell} \prod_{r=1}^{\ell} \frac{1}{(i_r - i_{r-1})^{3/2}}.$$

It is important to note that C_2 does not depend on η . Lemma 5.2 is a small variation on [33, lemma 3.1], but because the model we are considering is somewhat different and for the sake of completeness, we give the details of the proof in the appendix.

Now assume that conditions (5.17)–(5.18) are verified for some η . Collecting (5.14), (5.15), and Lemma 5.2, we then have

(5.20)
$$A_N \le C_1^{\gamma} \sum_{\ell=1}^{N/k} \sum_{i_0:=0 < i_1 < \dots < i_\ell = N/k} (\eta^{\gamma} C_2^{\gamma} e)^{\ell} \prod_{r=1}^{\ell} \frac{1}{(i_r - i_{r-1})^{(3/2)\gamma}}.$$

In the right-hand side we recognize, apart from the irrelevant multiplicative constant C_1^{γ} , the partition function of a nonrandom ($\beta = 0$) pinning model with N replaced by N/k, $K(\cdot)$ replaced by

(5.21)
$$\widehat{K}(n) = \frac{1}{n^{(3/2)\gamma}} \frac{1}{\sum_{i \ge 1} i^{-(3/2)\gamma}},$$

and h replaced by

(5.22)
$$\widehat{h} := \log\left(\eta^{\gamma} C_2^{\gamma} e \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{(3/2)\gamma}}\right).$$

Note that $\hat{K}(\cdot)$ is normalized to be a probability measure on \mathbb{N} , which is possible since (by assumption) $\gamma > \frac{2}{3}$, and that it has a power law tail with exponent $\frac{3}{2}\gamma > 1$. Thanks to Lemma A.1 below, one has that the right-hand side of (5.20) tends to 0 for $N \to \infty$ whenever

(5.23)
$$h < 0.$$

Therefore, if η is so small that (5.23) holds, we can conclude that A_N tends to 0 for $N \to \infty$ and therefore $F(\beta, h) = 0$.

The proof of Theorem 3.5 is therefore concluded once we prove the following:

PROPOSITION 5.3 Fix $\eta > 0$ such that (5.23) holds. For every $\beta_0 > 0$ there exists $0 < c_7 < \infty$ such that if $\beta \leq \beta_0$ and $0 < h \leq \exp(-c_7/\beta^4)$, conditions (5.17)–(5.18) are satisfied.

PROOF OF PROPOSITION 5.3: We need to show that the two hypotheses of Lemma 5.2 hold, and for this we are going to use the following result:

LEMMA 5.4 Under the law P, the random variable

(5.24)
$$W_L := (\sqrt{L} \log L)^{-1} \sum_{1 \le i < j \le L} \frac{\delta_i \delta_j}{\sqrt{j-i}}$$

converges in distribution, as L tends to ∞ , to c|Z| ($Z \sim N(0, 1)$ and c a positive constant).

This lemma, the proof of which may be found just below (together with the explicit value of *c*), directly implies that, if we set $S(a, L) := \mathbf{E}[\exp(-aW_L)]$, we have $\lim_{a\to\infty} \lim_{L\to\infty} S(a, L) = 0$ and, by the monotonicity of $S(\cdot, L)$, we get

(5.25)
$$\lim_{a,L\to\infty} S(a,L) = 0$$

Let us verify (5.17). Note first of all that (cf. (5.16) and (5.11))

(5.26)
$$U(n) = c_8 \mathbf{P}(n \in \tau) S\left(\beta^2 (1-\gamma) \sqrt{\log k} \sqrt{\frac{n/2}{9k}} \frac{\log(n/2)}{\log k}, \frac{n}{2}\right)$$
$$=: c_8 \mathbf{P}(n \in \tau) s_\beta(k, n).$$

We recall also that [12, theorem B]

(5.27)
$$\mathbf{P}(n \in \tau) \stackrel{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2\pi C_K \sqrt{n}},$$

and therefore there exists $c_9 > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}$

(5.28)
$$\mathbf{P}(n \in \tau) \le \frac{c_9}{\sqrt{n}}.$$

Split the sum in (5.17) according to whether $j \le \delta k$ or not ($\delta = \delta(\eta) \in (0, 1)$ is going to be chosen below). By using $S(a, L) \le 1$ (in the case $j \le \delta k$) and (5.28), we obtain

(5.29)
$$\sum_{j=0}^{k-1} U(j) \le c_8 + c_8 c_9 \sum_{j=1}^{\delta k} \frac{1}{\sqrt{j}} + c_8 c_9 \sum_{j=\delta k+1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{j}} s_\beta(k,j).$$

Since if c_7 is chosen sufficiently large

(5.30)
$$\beta^2 \sqrt{\log k} \ge \sqrt{c_7 - \beta^4 \log 2} \ge \frac{\sqrt{c_7}}{2},$$

and since k may be made large by increasing c_7 , we directly see that (5.25) implies that $s_\beta(k, j)$ may be made smaller than (say) δ for every $\delta k < j < k$ by choosing c_7 sufficiently large. Therefore (5.29) implies

(5.31)
$$\sum_{j=0}^{k-1} U(j) \le 4c_8 c_9 (\sqrt{\delta} + \delta) \sqrt{k}.$$

By choosing $\delta = \delta(\eta)$ such that $4c_8c_9(\sqrt{\delta} + \delta) \le \eta$, we have (5.17). The proof of (5.18) is absolutely analogous to the proof of (5.17) and is therefore omitted. \Box

5.3 Proof of Lemma 5.4

We introduce the notation

(5.32)
$$Y_L^{(i)} := \sum_{j=i+1}^L \frac{\delta_j}{\sqrt{j-i}}$$
 so that $W_L = \frac{1}{\sqrt{L}\log L} \sum_{i=1}^{L-1} \delta_i Y_L^{(i)}$.

Let us observe that, thanks to the renewal property of τ , under $\mathbf{P}(\cdot | \delta_i = 1)$, $Y_L^{(i)}$ is distributed like $Y_{L-i} := Y_{L-i}^{(0)}$ (under **P**). The first step in the proof is observing that, in view of (5.28),

(5.33)
$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{L}\log L}\sum_{i=(1-\varepsilon)L}^{L-1}\delta_{i}Y_{L}^{(i)}\right] = \frac{1}{\log L\sqrt{L}}\sum_{i=(1-\varepsilon)L}^{L-1}\sum_{j=i+1}^{L}\frac{\mathbf{P}(i\in\tau)\mathbf{P}(j-i\in\tau)}{\sqrt{j-i}} = O(\varepsilon),$$

uniformly in L, so we can focus on studying $W_{L,\varepsilon}$, defined as W_L , but stopping the sum over *i* at $(1 - \varepsilon)L$. At this point we use that

(5.34)
$$\lim_{L \to \infty} \frac{Y_L}{\log L} = \frac{1}{2\pi C_K} =: \hat{c}_K$$

in $L^2(\mathbf{P})$ (and hence in $L^1(\mathbf{P})$). We postpone the proof of (5.34) and observe that, thanks to the properties of the logarithm, it implies that for every $\varepsilon > 0$

(5.35)
$$\lim_{L \to \infty} \sup_{q \in [\varepsilon, 1]} \mathbf{E} \left[\left| \frac{1}{\log L} \sum_{j=1}^{qL} \frac{\delta_j}{\sqrt{j}} - \hat{c}_K \right| \right] = 0.$$

Let us write

(5.36)
$$R_L := W_{L,\varepsilon} - \frac{\widehat{c}_K}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^{(1-\varepsilon)L} \delta_i$$

and note that $L^{-1/2} \sum_{i=1}^{(1-\varepsilon)L} \delta_i$ converges in law toward

$$\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2\pi C_K^2}} |Z|$$

This follows directly by using that the event $\sum_{i=1}^{L} \delta_i \ge m$ is the event $\tau_m \le L$ (τ_m is of course the m^{th} point in τ after 0) and by using the fact that τ_1 is in the domain of attraction of the positive stable law of index $\frac{1}{2}$ [13, VI.2 and XI.5]. It suffices therefore to show that $\mathbf{E}[|R_L|]$ tends to 0. We have

(5.37)

$$\mathbf{E}[|R_L|] \leq \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^{(1-\varepsilon)L} \mathbf{E}[\delta_i] \mathbf{E}\left[\left|\frac{Y_L^{(i)}}{\log L} - \hat{c}_K\right| \mid \delta_i = 1\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^{(1-\varepsilon)L} \mathbf{E}[\delta_i] \mathbf{E}\left[\left|\frac{Y_{L-i}}{\log L} - \hat{c}_K\right|\right] = o(1),$$

where in the last step we have used (5.35) and (5.28). Note that we have also proven that $c = (2\pi)^{-3/2} C_K^{-2}$ in the statement of Lemma 5.4.

We are therefore left with the task of proving (5.34). This result has been already proven [8, theorem 6] when τ is given by the successive returns to 0 of a centered, aperiodic, and irreducible random walk on \mathbb{Z} with bounded variance of the increment variable. Note that, by well-established local limit theorems, for such a class of random walks we have (5.27). Actually, in [8] it is proven that (5.34) holds almost surely as a consequence of var_P(Y_L) = $O(\log L)$. What we are going to do is simply reobtain such a bound by repeating the steps in [8] and using (5.27)– (5.28) for the general renewal processes that we consider (as a side remark: in our generalized setup, almost sure convergence holds).

The proof goes as follows: by using (5.27) it is straightforward to see that $\lim_{L\to\infty} \mathbf{E}[Y_L/\log L] = \hat{c}_K$, so that we are done if we show that $\operatorname{var}_{\mathbf{P}}(Y_L/\log L)$ vanishes as $L \to \infty$. So we start by observing that

(5.38)
$$\operatorname{var}_{\mathbf{P}}(Y_{L}) = \sum_{i,j} \frac{\mathbf{E}[\delta_{i}\delta_{j}] - \mathbf{E}[\delta_{i}]\mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{ij}}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^{L} \frac{\mathbf{E}[\delta_{i}\delta_{j}] - \mathbf{E}[\delta_{i}]\mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{ij}} + O(1).$$

by (5.28). Now we compute

$$\sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^{L} \frac{\mathbf{E}[\delta_{i}\delta_{j}] - \mathbf{E}[\delta_{i}] \mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\mathbf{E}[\delta_{i}]}{\sqrt{i}} \left[\sum_{j=1}^{L-i} \frac{\mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{j+i}} - \sum_{j=i+1}^{L} \frac{\mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{j}} \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\mathbf{E}[\delta_{i}]}{\sqrt{i}} \left[\sum_{j=1}^{L-i} \frac{\mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{j+i}} - \sum_{j=i+1}^{L} \frac{\mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{j+i}} \right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\mathbf{E}[\delta_{i}]}{\sqrt{i}} \sum_{j=1}^{i} \frac{\mathbf{E}[\delta_{j}]}{\sqrt{j+i}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\mathbf{E}[\delta_{i}]}{i} \sum_{j=1}^{i} \mathbf{E}[\delta_{j}] \leq c_{9}^{2} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{1}{i^{3/2}} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j^{1/2}} = O(\log L),$$

where, in the last line, we have used (5.28). In view of (5.38), we have obtained $\operatorname{var}_{\mathbf{P}}(Y_L) = O(\log L)$ and the proof of (5.34), and therefore the proof of Lemma 5.4 is complete.

Appendix: Some Technical Results and Useful Estimates

Two Results on Renewal Processes

The first result concerns the nondisordered pinning model and is well known:

LEMMA A.1 Let $K(\cdot)$ be a probability on \mathbb{N} that satisfies (3.1) for some $\alpha > 0$. If h < 0, we have that

(A.1)
$$\sum_{\ell=1}^{N} \sum_{i_0:=0 < i_1 < \cdots < i_\ell = N} e^{h\ell} \prod_{r=1}^{\ell} K(i_r - i_{r-1}) \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

This is implied by [18, theorem 2.2], since the left-hand side of (A.1) is nothing but the partition function of the homogeneous pinning model of length N, whose critical point is $h_c = 0$ (cf. also (3.4)).

The second fact we need is the following:

LEMMA A.2 There exists a positive constant c, which depends only on $K(\cdot)$, such that for every positive function $f_N(\tau)$ that depends only on $\tau \cap \{1, \ldots, N\}$, one has

(A.2)
$$\sup_{N>0} \frac{\mathbf{E}[f_N(\tau)|2N \in \tau]}{\mathbf{E}[f_N(\tau)]} \le c.$$

PROOF: The statement follows by writing $f_N(\tau)$ as $f_N(\tau) \sum_{n=0}^N \mathbb{1}_{\{X_N=n\}}$, where X_N is the last renewal epoch up to (and including) N, and using the bound

$$\sup_{N} \max_{n=0,\dots,N} \frac{\mathbf{P}(X_N = n \mid 2N \in \tau)}{\mathbf{P}(X_N = n)} =: c < \infty,$$

which is equation (A.15) in [10] (this has also been proven in [33], where the proof is repeated to show that *c* can be chosen as a function of α only).

Proof of (5.15)

Defining the event

(A.3)
$$\Omega_{\underline{n},\underline{j}} := \{ N \in \tau \text{ and} \\ \{ j_{r-1}, \dots, n_r \} \cap \tau = \{ j_{r-1}, n_r \} \text{ for all } r = 1, \dots, \ell \},$$

with the convention that $j_0 := 0$, we have

(A.4)
$$\hat{Z}_{\omega}^{(i_1,\ldots,i_{\ell})} = \sum_{\substack{n_1 \in B_{i_1} \\ n_{\ell} \geq n_{\ell-1}+k}} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \geq n_{\ell-1}+k}} \mathbf{E} \Big[e^{\sum_{n=1}^{N} (\beta \omega_n + h - \beta^2/2)\delta_n}; \Omega_{\underline{n},\underline{j}} \Big].$$

Since $\widetilde{\mathbb{P}}$ is a Gaussian measure and $\delta_i^2 = \delta_i$ for every *i*, the computation of $\widetilde{\mathbb{E}}\widehat{Z}_{\omega}^{(i_1,\ldots,i_{\ell})}$ is immediate:

(A.5)
$$\widetilde{\mathbb{E}} \widehat{Z}_{\omega}^{(i_1,\ldots,i_{\ell})} = \sum_{\substack{n_1 \in B_{i_1} \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1}+k}} \sum_{\substack{n_\ell \in B_{N/k}: \\ n_\ell \ge n_{\ell-1}+k}} \mathbf{E} \Big[e^{h \sum_{n=1}^N \delta_n - \beta^2/2 \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \delta_i \delta_j}; \Omega_{\underline{n},\underline{j}} \Big].$$

In view of $C_{ij} \ge 0$, we obtain an upper bound by neglecting in the exponent the terms such that $n_r \le i \le j_r$ and $n_{r'} \le j \le j_{r'}$ with $r \ne r'$. At that point, the

260

E average may be factorized, by using the renewal property, and we obtain (recall that $C_{ii} = 0$)

(A.6)

$$\widetilde{\mathbb{E}}\widehat{Z}_{\omega}^{(i_{1},\ldots,i_{\ell})} \leq \sum_{\substack{n_{1}\in B_{i_{1}}\\n_{\ell}\geq n_{\ell}-1+k}} \cdots \sum_{\substack{n_{\ell}\in B_{N/k}:\\n_{\ell}\geq n_{\ell}-1+k}} K(n_{1})\cdots K(n_{\ell}-j_{\ell-1}) \times \prod_{r=1}^{\ell} \mathbf{E}\left[e^{h\sum_{i=n_{r}}^{j_{r}}\delta_{i}-\beta^{2}\sum_{n_{r}\leq i< j\leq j_{r}}C_{ij}\delta_{i}\delta_{j}}\mathbb{1}_{\{j_{r}\in\tau\}} \mid n_{r}\in\tau\right].$$

with the convention that $j_{\ell} := N$.

We are left with the task of proving that

(A.7)
$$\mathbf{E}\left[e^{h\sum_{i=n_r}^{J_r}\delta_i-\beta^2\sum_{n_r\leq i< j\leq j_r}\mathcal{C}_{ij}\delta_i\delta_j}\mathbb{1}_{\{j_r\in\tau\}}\mid n_r\in\tau\right]\leq U(j_r-n_r),$$

with $U(\cdot)$ satisfying (5.16). We remark first of all that the left-hand side of (A.7) equals

(A.8)
$$\mathbf{P}(j_r - n_r \in \tau) \mathbf{E} \Big[e^{h \sum_{i=n_r}^{j_r} \delta_i - \beta^2 \sum_{n_r \le i < j \le j_r} \mathcal{C}_{ij} \delta_i \delta_j} \mid n_r \in \tau, \ j_r \in \tau \Big].$$

Since by construction $j_r - n_r < k(h) = \lfloor 1/h \rfloor$, one has

(A.9)
$$e^{h\sum_{i=n_r}^{j_r}\delta_i} \leq e.$$

As for the remaining average, assume without loss of generality that $|\{n_r, n_r + 1, \ldots, j_r\} \cap B_{i_r}| \ge (j_r - n_r)/2$ (if this is not the case, the inequality clearly holds with B_{i_r} replaced by B_{i_r+1} and the arguments that follow are trivially modified). Then,

(A.10)
$$\mathbf{E}\left[e^{-\beta^{2}\sum_{n_{r}\leq i< j\leq j_{r}}\mathcal{C}_{ij}\delta_{i}\delta_{j}} \mid n_{r}\in\tau, \ j_{r}\in\tau\right] \leq \mathbf{E}\left[\exp\left(-\beta^{2}\sum_{0< i< j\leq (j_{r}-n_{r})/2}\delta_{i}\delta_{j}H_{ij}\right) \mid j_{r}-n_{r}\in\tau\right].$$

Finally, the conditioning in (A.10) can be eliminated using Lemma A.2, and (5.15) is proved. \Box

Proof of Lemma 5.2

In this proof (and in the statement) two positive numbers C_1 and C_2 appear. C_1 is going to change along with the steps of the proof: it depends on η , k, and $K(\cdot)$. C_2 instead is chosen once and for all below, and it depends only on $K(\cdot)$.

We start by giving a name to the right-hand side of (5.15):

(A.11)
$$Q := \sum_{n_1 \in B_{i_1}} \sum_{\substack{j_1 = n_1 \\ n_2 \ge n_1 + k}}^{n_1 + k - 1} \sum_{\substack{n_2 \in B_{i_2}: \\ n_2 \ge n_1 + k}} \sum_{\substack{j_2 = n_2 \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} \in B_{i_{\ell-1}}} \sum_{\substack{j_{\ell-1} = n_{\ell-1} \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-2} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell-1} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \in B_{N/k}: \\ n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} \sum_{\substack{n_{\ell} \ge n_{\ell-1} + k - 1}}$$

Since $N - n_{\ell} < k$, we can get rid of $U(N - n_{\ell}) (\leq c_8 \mathbf{P}(N - n_{\ell} \in \tau))$ and of the rightmost sum (on n_{ℓ}), replacing n_{ℓ} by N, by paying a price that depends on k and $K(\cdot)$ (this price goes into C_1). Therefore we have

(A.12)
$$Q \leq C_1 \sum_{n_1 \in B_{i_1}} \cdots \sum_{j_{\ell-1} = n_{\ell-1}}^{n_{\ell-1} + k - 1} K(n_1) \dots K(n_{\ell} - j_{\ell-1}) U(j_{\ell-1} - n_{\ell-1}),$$

where by convention from now on $n_{\ell} := N$.

Now we single out the long jumps. The set of long jump arrival points is defined as

(A.13)
$$J = J(i_1, i_2, \dots, i_{\ell}) := \{r : 1 \le r \le \ell, i_r > i_{r-1} + 2\},\$$

and the definition guarantees that a long jump $\{j_{r-1}, \ldots, n_r\}$ contains at least one whole block with no renewal point inside. For $r \in J$ we use the bound

(A.14)
$$K(n_r - j_{r-1}) \le \frac{C_2}{(i_r - i_{r-1})^{3/2} k^{3/2}},$$

and we stress that we may and do choose C_2 depending only on $K(\cdot)$. For later use, we choose $C_2 \ge 2^{3/2}$. This leads to

(A.15)
$$Q \leq C_1 k^{-3|J|/2} \prod_{r \in J} \frac{C_2}{(i_r - i_{r-1})^{3/2}} \times \sum_{n_1 \in B_{i_1}} \cdots \sum_{j_{\ell-1} = n_{\ell-1}}^{n_{\ell-1}+k-1} \left(\prod_{r \in \{1, \dots, \ell\} \setminus J} K(n_r - j_{r-1}) \right) U(j_1 - n_1) \cdots U(j_{\ell-1} - n_{\ell-1}).$$

Now we perform the sums in (A.15) and bound the outcome by using assumptions (5.17) and (5.18).

We first sum over j_{r-1} , $r \in J$, taking of course into account the constraint $0 \le j_{r-1} - n_{r-1} < k$. By using (5.17), this sum yields at most $(\eta \sqrt{k})^{|J|}$ if $1 \notin J$. If $1 \in J$, for r = 1 then $j_0 = 0$ and there is no summation: we can still bound the sum by $(\eta \sqrt{k})^{|J|}$ provided that we change the constant C_1 .

Second, we sum over j_{r-1} , n_r for $r \in \{1, ..., \ell\} \setminus J$ and use (5.18). Once again we have to treat the case r = 1 separately, as above. But if $1 \notin \{1, ..., \ell\} \setminus J$, we directly see that the summation is bounded by $\eta^{\ell-|J|}$.

Finally, we have to sum over n_r for $r \in J$. The summand does not depend on these variables anymore, so this gives at most $k^{|J|}$.

Putting these estimates together, we obtain

(A.16)

$$Q \leq C_1 \frac{(\eta \sqrt{k})^{|J|} \eta^{\ell - |J|} k^{|J|}}{k^{3|J|/2}} \prod_{r \in J} \frac{C_2}{(i_r - i_{r-1})^{3/2}}$$
$$\leq C_1 \eta^{\ell} C_2^{\ell} \prod_{r=1}^{\ell} \frac{1}{(i_r - i_{r-1})^{3/2}},$$

where, in the last step, we have used $C_2 \ge 2^{3/2}$. The proof of Lemma 5.2 is therefore complete.

Acknowledgment. We are very grateful to Bernard Derrida for many enlightening discussions and to an anonymous referee for having observed the link between hierarchical pinning and Galton-Watson processes. The authors acknowledge the support of ANR POLINTBIO. F.T. was also partially supported by ANR LHMSHE.

Bibliography

- [1] Abraham, D. B. Surface structures and phase transitions—exact results. *Phase transitions and critical phenomena*, vol. 10, 1–74. Academic, London, 1986.
- [2] Aizenman, M.; Molchanov, S. Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation. *Comm. Math. Phys.* 157 (1993), no. 2, 245–278.
- [3] Alexander, K. S. The effect of disorder on polymer depinning transitions. *Comm. Math. Phys.* 279 (2008), no. 1, 117–146.
- [4] Alexander, K. S.; Zygouras, N. Equality of critical points for polymer depinning transitions with loop exponent one. Preprint. arXiv: 0811.1902, 2008.
- [5] Alexander, K. S.; Zygouras, N. Quenched and annealed critical points in polymer pinning models. Preprint. arXiv: 0805.1708, 2008.
- [6] Bhattacharjee, S. M.; Mukherji, S. Directed polymers with random interaction: marginal relevance and novel criticality. *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), 49–52.
- [7] Buffet, E.; Patrick, A.; Pulé, J. V. Directed polymers on trees: a martingale approach. J. Phys. A 26 (1993), no. 8, 1823–1834.
- [8] Chung, K. L.; Erdös, P. Probability limit theorems assuming only the first moment. I. Mem. Am. Math. Soc. 1951 (1951), no. 6, 1–19.
- [9] Derrida, B.; Gardner, E. Renormalisation group study of a disordered model. J. Phys. A 17 (1984), no. 16, 3223–3236.
- [10] Derrida, B.; Giacomin, G.; Lacoin, H.; Toninelli, F. L. Fractional moment bounds and disorder relevance for pinning models. *Comm. Math. Phys.* 287 (2009), no. 3, 867–887.
- [11] Derrida, B.; Hakim, V.; Vannimenus, J. Effect of disorder on two-dimensional wetting. J. Statist. Phys. 66 (1992), no. 5-6, 1189–1213.
- [12] Doney, R. A. One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. *Probab. Theory Related Fields* **107** (1997), no. 4, 451–465.
- [13] Feller, W. An introduction to probability theory and its applications, vol. 2. 2nd ed. Wiley, New York–London–Sydney, 1971.
- [14] Fisher, M. E. Walks, walls, wetting, and melting. J. Statist. Phys. 34 (1984), no. 5-6, 667–729.
- [15] Forgács, G.; Lipowsky, R.; Nieuwenhuizen, T. M. The behavior of interfaces in ordered and disordered systems. *Phase transitions and critical phenomena*, vol. 14, 135–363. Academic, London, 1991.

- [16] Forgács, G.; Luck, J. M.; Nieuwenhuizen, T. M.; Orland, H. Wetting of a disordered substrate: exact critical behavior in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986), 2184–2187.
- [17] Gangardt, D. M.; Nechaev, S. K. Wetting transition on a one-dimensional disorder. J. Stat. Phys. 130 (2008), no. 3, 483–502.
- [18] Giacomin, G. Random polymer models. Imperial College Press, World Scientific, London, 2007.
- [19] Giacomin, G.; Lacoin, H.; Toninelli, F. L. Hierarchical pinning models, quadratic maps and quenched disorder. *Probab. Theory Related Fields*, in press. arXiv: 0711.4649, 2007.
- [20] Giacomin, G.; Lacoin, H.; Toninelli, F. L. Disorder relevance at marginality and critical point shift. Preprint. arXiv: 0906.1942 [math-ph], 2009.
- [21] Giacomin, G.; Toninelli, F. L. Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. *Comm. Math. Phys.* 266 (2006), no. 1, 1–16.
- [22] Giacomin, G.; Toninelli, F. L. Smoothing of depinning transitions for directed polymers with quenched disorder. *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006), no. 7, 070602.
- [23] Grosberg, A. Y.; Shakhnovich, E. I. An investigation of the configurational statistics of a polymer chain in an external field by the dynamical renormalization group method. *Soviet Phys. JETP* 64 (1986), no. 3, 493–501.
- [24] Grosberg, A. Y.; Shakhnovich, E. I. Theory of phase transitions of the coil-globule type in a heteropolymer chain with disordered sequence of links. *Soviet Phys. JETP* 64 (1986), no. 6, 1284–1290.
- [25] Harris, A. B. Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models. J. Phys. C 7 (1974), 1671–1692.
- [26] Harris, T. E. The theory of branching processes. Springer, Berlin-New York, 1963.
- [27] Lacoin, H. Hierarchical pinning model with site disorder: disorder is marginally relevant. *Probab. Theory Related Fields*, in press. arXiv: 0807.4864, 2008.
- [28] Lacoin, H.; Toninelli, F. L. A smoothing inequality for hierarchical pinning models. Proceedings of the Summer School "Spin glasses" (Paris, June 2007), to appear. Available online at: http://people.math.jussieu.fr/~lacoin/spinglass.pdf
- [29] Stepanow, S.; Chudnovskiy, A. L. The Green's function approach to adsorption of a random heteropolymer onto surfaces. *J. Phys. A* **35** (2002), 4229–4238.
- [30] Tang, L.-H.; Chaté, H. Rare-event induced binding transition of heteropolymers. *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001), 830–833.
- [31] Toninelli, F. L. Disordered pinning models and copolymers: beyond annealed bounds. *Ann. Appl. Probab.* **18** (2008), no. 4, 1569–1587.
- [32] Toninelli, F. L. A replica-coupling approach to disordered pinning models. *Comm. Math. Phys.* 280 (2008), no. 2, 389–401.
- [33] Toninelli, F. L. Coarse graining, fractional moments and the critical slope of random copolymers. *Electron. J. Probab.* 14 (2009), no. 20, 531–547.

GIAMBATTISTA GIACOMIN Université Paris Diderot (Paris 7) and Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires (CNRS) U.F.R. Mathématiques Case 7012 (Site Chevaleret) 75205 Paris cedex 13 FRANCE E-mail: giacomin@ math.jussieu.fr

FABIO TONINELLI CNRS and ENS Lyon Laboratoire de Physique 46 Allée d'Italie 69364 Lyon FRANCE E-mail: fabio-lucio. toninelli@ ens-lyon.fr HUBERT LACOIN Université Paris Diderot (Paris 7) and Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires (CNRS) U.F.R. Mathématiques Case 7012 (Site Chevaleret) 75205 Paris cedex 13 FRANCE E-mail: lacoin@ math.jussieu.fr

Received December 2008.