Invariants cohomologiques et cycles algébriques

Pierre Guillot

Université Louis Pasteur

Tripode – 8 juin 2007

Plan

Plan

Définitions.

Définitions.

Soit k un corps, V un espace vectoriel sur k.

Définitions.

Soit k un corps, V un espace vectoriel sur k.

- Une forme quadratique q sur V est une fonction donnée par $q(x) = B(x, x)$ où B est bilinéaire.

Définitions.

Soit k un corps, V un espace vectoriel sur k.

- Une forme quadratique q sur V est une fonction donnée par $q(x) = B(x, x)$ où B est bilinéaire. Se donner q revient à se donner une matrice symétrique A.

Définitions.

Soit k un corps, V un espace vectoriel sur k.

- Une forme quadratique q sur V est une fonction donnée par $q(x) = B(x, x)$ où B est bilinéaire. Se donner q revient à se donner une matrice symétrique A. Les matrices A et ${}^tPAP$ représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes.

Définitions.

Soit k un corps, V un espace vectoriel sur k.

- Une forme quadratique q sur V est une fonction donnée par $q(x) = B(x, x)$ où B est bilinéaire. Se donner q revient à se donner une matrice symétrique A. Les matrices A et ${}^tPAP$ représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes.
- Un "invariant" des formes quadratiques est un objet algébrique attaché à chaque forme q, par exemple un nombre entier, qui ne dépend pas du choix d'une base.

Définitions.

Soit k un corps, V un espace vectoriel sur k.

- Une forme quadratique q sur V est une fonction donnée par $q(x) = B(x, x)$ où B est bilinéaire. Se donner q revient à se donner une matrice symétrique A. Les matrices A et ${}^tPAP$ représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes.
- Un "invariant" des formes quadratiques est un objet algébrique attaché à chaque forme q, par exemple un nombre entier, qui ne dépend pas du choix d'une base. De manière équivalente, il s'agit d'un objet attaché à chaque matrice symétrique A, qui est inchangé (invariant) par l'opération $A \mapsto {}^tPAP$.

Invariants des formes quadratiques.

Quels invariants classiques connait-on ?

Invariants des formes quadratiques.

Quels invariants classiques connait-on ?

- l'invariant de Witt : dimension d'un sous-espace maximal sur lequel $q = 0$;

Invariants des formes quadratiques.

Quels invariants classiques connait-on ?

- l'invariant de Witt : dimension d'un sous-espace maximal sur lequel $q = 0$;
- si $k = \mathbb{R}$, la signature (r, s) de q ;

Invariants des formes quadratiques.

Quels invariants classiques connait-on ?

- l'invariant de Witt : dimension d'un sous-espace maximal sur lequel $q = 0$;
- si $k = \mathbb{R}$, la signature (r, s) de q ;
- le discriminant $\det(q)$ de q, vu comme un élément de $k^\times/(k^\times)^2$. (Ici $k^\times =$ le groupe multiplicatif des éléments non-nuls de k.)

Changement de corps.

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels.

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels. On peut la voir comme une matrice complexe définissant une nouvelle forme quadratique $q \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels. On peut la voir comme une matrice complexe définissant une nouvelle forme quadratique $q \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

- L'invariant de Witt de $q \otimes \mathbb{C}$ n'est en général pas égal à celui de q ;

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels. On peut la voir comme une matrice complexe définissant une nouvelle forme quadratique $q \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

- L'invariant de Witt de $q \otimes \mathbb{C}$ n'est en général pas égal à celui de q ;
- La signature de $q \otimes \mathbb{C}$ n'a pas de sens ;

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels. On peut la voir comme une matrice complexe définissant une nouvelle forme quadratique $q \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

- L'invariant de Witt de $q \otimes \mathbb{C}$ n'est en général pas égal à celui de q ;
- La signature de $q \otimes \mathbb{C}$ n'a pas de sens ;
- Par contre, le discriminant $\det(q \otimes \mathbb{C})$ est l'image de $\det(q)$ par l'application
$$\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2 \to \mathbb{C}^\times/(\mathbb{C}^\times)^2$$

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels. On peut la voir comme une matrice complexe définissant une nouvelle forme quadratique $q \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

- L'invariant de Witt de $q \otimes \mathbb{C}$ n'est en général pas égal à celui de q ;
- La signature de $q \otimes \mathbb{C}$ n'a pas de sens ;
- Par contre, le discriminant $\det(q \otimes \mathbb{C})$ est l'image de $\det(q)$ par l'application

$$\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2 \to \mathbb{C}^\times/(\mathbb{C}^\times)^2$$

  De même pour toute extension de corps $k \subset k'$.

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels. On peut la voir comme une matrice complexe définissant une nouvelle forme quadratique $q \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

- L'invariant de Witt de $q \otimes \mathbb{C}$ n'est en général pas égal à celui de q ;
- La signature de $q \otimes \mathbb{C}$ n'a pas de sens ;
- Par contre, le discriminant $\det(q \otimes \mathbb{C})$ est l'image de $\det(q)$ par l'application
$$\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2 \to \mathbb{C}^\times/(\mathbb{C}^\times)^2$$
De même pour toute extension de corps $k \subset k'$.

Problème :

Peut-on déterminer tous les invariants qui sont ainsi "naturels en k" ?

Changement de corps.

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ est donnée par une matrice symétrique à coefficients réels. On peut la voir comme une matrice complexe définissant une nouvelle forme quadratique $q \otimes \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

- L'invariant de Witt de $q \otimes \mathbb{C}$ n'est en général pas égal à celui de q ;
- La signature de $q \otimes \mathbb{C}$ n'a pas de sens ;
- Par contre, le discriminant $\det(q \otimes \mathbb{C})$ est l'image de $\det(q)$ par l'application
$$\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2 \to \mathbb{C}^\times/(\mathbb{C}^\times)^2$$
De même pour toute extension de corps $k \subset k'$.

Problème :

Peut-on déterminer tous les invariants qui sont ainsi "naturels en k" ? Où doivent-ils prendre leurs valeurs ?

Cohomologie galoisienne.

Cohomologie galoisienne.

- Il existe un anneau $H^*(k)$ appelé l'anneau de cohomologie galoisienne de k. Il mesure la complexité arithmétique de k (eg $H^*(k)$ est trivial lorsque k est algébriquement clos).

Cohomologie galoisienne.

- Il existe un anneau $H^*(k)$ appelé l'anneau de cohomologie galoisienne de k. Il mesure la complexité arithmétique de k (eg $H^*(k)$ est trivial lorsque k est algébriquement clos). Il existe plusieurs bonnes raisons de considérer les invariants à valeurs dans $H^*(k)$.

Cohomologie galoisienne.

- Il existe un anneau $H^*(k)$ appelé l'anneau de cohomologie galoisienne de k. Il mesure la complexité arithmétique de k (eg $H^*(k)$ est trivial lorsque k est algébriquement clos). Il existe plusieurs bonnes raisons de considérer les invariants à valeurs dans $H^*(k)$.
- Il se trouve que $H^*(k)$ contient $k^\times/(k^\times)^2$ comme sous-groupe additif.

Cohomologie galoisienne.

- Il existe un anneau $H^*(k)$ appelé l'anneau de cohomologie galoisienne de k. Il mesure la complexité arithmétique de k (eg $H^*(k)$ est trivial lorsque k est algébriquement clos). Il existe plusieurs bonnes raisons de considérer les invariants à valeurs dans $H^*(k)$.
- Il se trouve que $H^*(k)$ contient $k^\times/(k^\times)^2$ comme sous-groupe additif.
  Ainsi chaque élément α non-nul de k définit un élément (α) de $H^*(k)$;

Cohomologie galoisienne.

- Il existe un anneau $H^*(k)$ appelé l'anneau de cohomologie galoisienne de k. Il mesure la complexité arithmétique de k (eg $H^*(k)$ est trivial lorsque k est algébriquement clos). Il existe plusieurs bonnes raisons de considérer les invariants à valeurs dans $H^*(k)$.
- Il se trouve que $H^*(k)$ contient $k^\times/(k^\times)^2$ comme sous-groupe additif.
  Ainsi chaque élément α non-nul de k définit un élément (α) de $H^*(k)$; de plus $(\alpha\beta) = (\alpha) + (\beta)$.

Classes de Stiefel-Whitney.

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés.

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

- $w_1(q) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n)$

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

- $w_1(q) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

- $w_1(q) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) = \det(q)$,

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

- $w_1(q) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n) = (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n) = \det(q)$,
- $w_2(q) = (\alpha_1)(\alpha_2) + (\alpha_1)(\alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n-1})(\alpha_n)$,

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

- $w_1(q) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) = \det(q)$,
- $w_2(q) = (\alpha_1)(\alpha_2) + (\alpha_1)(\alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n-1})(\alpha_n)$,
- $\ldots$

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

- $w_1(q) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n) = (\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n) = \det(q)$,
- $w_2(q) = (\alpha_1)(\alpha_2) + (\alpha_1)(\alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n-1})(\alpha_n)$,
- $\ldots$
- $w_n(q) = (\alpha_1)(\alpha_2) \cdots (\alpha_n)$.

Classes de Stiefel-Whitney.

On peut mettre q sous forme diagonale, avec les entrées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Il n'existe pas de façon unique de faire ceci, et par exemple on peut se retrouver avec les indices permutés. Les éléments (α_i) dans $H^*(k)$ ne sont donc pas uniquement définis. Par contre on peut montrer que les éléments ci-dessous sont bien définis :

- $w_1(q) = (\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) = \det(q)$,
- $w_2(q) = (\alpha_1)(\alpha_2) + (\alpha_1)(\alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n-1})(\alpha_n)$,
- $\ldots$
- $w_n(q) = (\alpha_1)(\alpha_2) \cdots (\alpha_n)$.

Théorème.

Ce sont là les seuls invariants naturels en k, à valeurs dans $H^*(k)$ (dits invariants cohomologiques).

Plan

Interprétation géométrique.

Interprétation géométrique.

- Fixons une forme quadratique q_0. Le groupe des automorphismes de q_0 est le groupe orthogonal $O(q_0) = Iso(q_0, q_0)$.

Interprétation géométrique.

- Fixons une forme quadratique q_0. Le groupe des automorphismes de q_0 est le groupe orthogonal $O(q_0) = Iso(q_0, q_0)$.
- Si q est une autre forme quadratique, l'espace $Iso(q, q_0)$ des isomorphismes de q sur q_0 est une variété définie sur k et munie d'une action du groupe algébrique $O(q_0)$.

Interprétation géométrique.

- Fixons une forme quadratique q_0. Le groupe des automorphismes de q_0 est le groupe orthogonal $O(q_0) = Iso(q_0, q_0)$.
- Si q est une autre forme quadratique, l'espace $Iso(q, q_0)$ des isomorphismes de q sur q_0 est une variété définie sur k et munie d'une action du groupe algébrique $O(q_0)$. De plus, lorsqu'on étend les scalaires à $\bar{k}$, $Iso(q, q_0)$ devient isomorphe à $O(q_0)$ agissant sur lui-même.

Interprétation géométrique.

- Fixons une forme quadratique q_0. Le groupe des automorphismes de q_0 est le groupe orthogonal $O(q_0) = Iso(q_0, q_0)$.
- Si q est une autre forme quadratique, l'espace $Iso(q, q_0)$ des isomorphismes de q sur q_0 est une variété définie sur k et munie d'une action du groupe algébrique $O(q_0)$. De plus, lorsqu'on étend les scalaires à $\bar{k}$, $Iso(q, q_0)$ devient isomorphe à $O(q_0)$ agissant sur lui-même. On dit que c'est un $O(q)$-torseur.

Interprétation géométrique.

- Fixons une forme quadratique q_0. Le groupe des automorphismes de q_0 est le groupe orthogonal $O(q_0) = Iso(q_0, q_0)$.
- Si q est une autre forme quadratique, l'espace $Iso(q, q_0)$ des isomorphismes de q sur q_0 est une variété définie sur k et munie d'une action du groupe algébrique $O(q_0)$. De plus, lorsqu'on étend les scalaires à $\bar{k}$, $Iso(q, q_0)$ devient isomorphe à $O(q_0)$ agissant sur lui-même. On dit que c'est un $O(q)$-torseur.

Théorème

L'ensemble des classes d'isomorphisme de formes quadratiques sur k est en bijection avec l'ensemble des $O(q_0)$-torseurs sur k.

Autres exemples de torseurs.

Autres exemples de torseurs.

- algèbres simples de centre $k \longleftrightarrow$ torseurs de PGL_n,

Autres exemples de torseurs.

- algèbres simples de centre $k \longleftrightarrow$ torseurs de PGL_n,
- algèbres étales de degré n sur $k \longleftrightarrow$ torseurs du groupe symétrique S_n,

Autres exemples de torseurs.

- algèbres simples de centre $k \longleftrightarrow$ torseurs de PGL_n,
- algèbres étales de degré n sur $k \longleftrightarrow$ torseurs du groupe symétrique S_n,
- algèbres d'octonions (ou octaves) $\longleftrightarrow$ torseurs du groupe exceptionnel G_2,

Autres exemples de torseurs.

- algèbres simples de centre $k \longleftrightarrow$ torseurs de PGL_n,
- algèbres étales de degré n sur $k \longleftrightarrow$ torseurs du groupe symétrique S_n,
- algèbres d'octonions (ou octaves) $\longleftrightarrow$ torseurs du groupe exceptionnel G_2,
- etc ...

Autres exemples de torseurs.

- algèbres simples de centre $k \longleftrightarrow$ torseurs de PGL_n,
- algèbres étales de degré n sur $k \longleftrightarrow$ torseurs du groupe symétrique S_n,
- algèbres d'octonions (ou octaves) $\longleftrightarrow$ torseurs du groupe exceptionnel G_2,
- etc ...

Problème

On se donne un groupe G, et on se propose de calculer l'anneau $Inv(G)$ des associations

$$(G-\text{torseur sur } k) \mapsto \text{élément de } \ H^*(k)$$

qui sont naturelles en k.

Plan

Construction géométrique de torseurs.

Soit k_0 un corps de base – tous les autres corps dans la suite vont contenir k_0.

Construction géométrique de torseurs.

Soit k_0 un corps de base – tous les autres corps dans la suite vont contenir k_0.
Pour construire des G-torseurs, on peut procéder de la manière géométrique suivante :

Construction géométrique de torseurs.

Soit k_0 un corps de base – tous les autres corps dans la suite vont contenir k_0.

Pour construire des G-torseurs, on peut procéder de la manière géométrique suivante :

- On trouve un “fibré principal” pour G, c'est-à-dire une variété X définie sur k_0, avec une action libre de X, telle que le quotient $p : X \to Y = X/G$ existe.

Construction géométrique de torseurs.

Soit k_0 un corps de base – tous les autres corps dans la suite vont contenir k_0.
Pour construire des G-torseurs, on peut procéder de la manière géométrique suivante :

- On trouve un “fibré principal” pour G, c’est-à-dire une variété X définie sur k_0, avec une action libre de X, telle que le quotient $p : X \to Y = X/G$ existe.
- Etant donné un corps k, on peut étendre les scalaires à k et obtenir $p : X_k \to Y_k$.

Construction géométrique de torseurs.

Soit k_0 un corps de base – tous les autres corps dans la suite vont contenir k_0.
Pour construire des G-torseurs, on peut procéder de la manière géométrique suivante :

- On trouve un “fibré principal” pour G, c’est-à-dire une variété X définie sur k_0, avec une action libre de X, telle que le quotient $p : X \to Y = X/G$ existe.
- Etant donné un corps k, on peut étendre les scalaires à k et obtenir $p : X_k \to Y_k$.
- Enfin, on prend une fibre $T_{k,y} = p^{-1}(y)$ pour $y \in Y_k$. Alors $T_{k,y}$ est un torseur pour G.

Exemple : retour sur O_n.

Exemple : retour sur O_n.

- On prend

$$X = \{(A, t_1, \ldots, t_n) : A^t A = diag(t_1, \ldots, t_n)\} \subset M_n(k_0) \times k_0^n.$$

Exemple : retour sur O_n.

- On prend

$$X = \{(A, t_1, \ldots, t_n) : A^t A = diag(t_1, \ldots, t_n)\} \subset M_n(k_0) \times k_0^n.$$

- On a bien une action libre de O_n :

$$g \cdot (A, t_1, \ldots, t_n) = (gA, t_1, \ldots, t_n).$$

Le quotient $Y = X/O_n$ est tout simplement k_0^n, et

$$p(A, t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_n).$$

Exemple : retour sur O_n.

- On prend

$$X = \{(A, t_1, \ldots, t_n) : A^t A = diag(t_1, \ldots, t_n)\} \subset M_n(k_0) \times k_0^n.$$

- On a bien une action libre de O_n :

$$g \cdot (A, t_1, \ldots, t_n) = (gA, t_1, \ldots, t_n).$$

Le quotient $Y = X/O_n$ est tout simplement k_0^n, et

$$p(A, t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_n).$$

- Si k contient k_0, on a également une application

$$p : X_k \longrightarrow k^n$$

avec $X_k \subset M_n(k) \times k^n$.

Exemple : retour sur O_n.

- On prend
$$X = \{(A, t_1, \ldots, t_n) : A^t A = diag(t_1, \ldots, t_n)\} \subset M_n(k_0) \times k_0^n.$$

- On a bien une action libre de O_n :
$$g \cdot (A, t_1, \ldots, t_n) = (gA, t_1, \ldots, t_n).$$
Le quotient $Y = X/O_n$ est tout simplement k_0^n, et
$$p(A, t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_n).$$

- Si k contient k_0, on a également une application
$$p : X_k \to k^n$$
avec $X_k \subset M_n(k) \times k^n$. On peut prendre une fibre $T_{k,y} = p^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = \{A \in M_n(k) : A^t A = diag(t_1, \ldots, t_n)\}$.

La fibre générique.

La fibre générique.

On peut avoir l'idée de prendre $t_1, \ldots, t_n$ comme paramètres, et donc de travailler sur le corps $K = k_0(t_1, \ldots, t_n)$.

La fibre générique.

On peut avoir l'idée de prendre $t_1, \dots, t_n$ comme paramètres, et donc de travailler sur le corps $K = k_0(t_1, \dots, t_n)$.
On obtient le torseur "générique" T_K, qui correspond à la forme quadratique donnée par la matrice $diag(t_1, \dots, t_n)$, à coefficients dans K.

La fibre générique.

On peut avoir l'idée de prendre $t_1, \ldots, t_n$ comme paramètres, et donc de travailler sur le corps $K = k_0(t_1, \ldots, t_n)$.
On obtient le torseur "générique" T_K, qui correspond à la forme quadratique donnée par la matrice $diag(t_1, \ldots, t_n)$, à coefficients dans K.
L'importance fondamentale de ce torseur est donnée par le théorème suivant, du à Rost :

La fibre générique.

On peut avoir l'idée de prendre $t_1, \ldots, t_n$ comme paramètres, et donc de travailler sur le corps $K = k_0(t_1, \ldots, t_n)$.
On obtient le torseur "générique" T_K, qui correspond à la forme quadratique donnée par la matrice $diag(t_1, \ldots, t_n)$, à coefficients dans K.
L'importance fondamentale de ce torseur est donnée par le théorème suivant, du à Rost :

Théorème.

Soient $a, b \in Inv(G)$, et soit T_K obtenu comme torseur générique. Si $a(T_K) = b(T_K)$, alors $a(T_{k,y}) = b(T_{k,y})$ pour tout torseur $T_{k,y}$ obtenu comme fibre dans le même fibré principal.

Torseurs versels.

Torseurs versels.

- On comprend l'intérêt de chercher des fibrés $p : X \longrightarrow Y$ "versels", c'est-à-dire ayant la propriété que n'importe quel G-torseur est de la forme $T_{k,y}$.

Torseurs versels.

- On comprend l'intérêt de chercher des fibrés $p : X \longrightarrow Y$ "versels", c'est-à-dire ayant la propriété que n'importe quel G-torseur est de la forme $T_{k,y}$. On va voir qu'il en existe.

Torseurs versels.

- On comprend l'intérêt de chercher des fibrés $p : X \longrightarrow Y$ "versels", c'est-à-dire ayant la propriété que n'importe quel G-torseur est de la forme $T_{k,y}$. On va voir qu'il en existe.
- D'après le théorème précédent, un invariant $a \in Inv(G)$ est entièrement déterminé par $a(T_K) \in H^*(K)$, lorsque $X \longrightarrow Y$ est versel et que $K = k(Y)$.

Torseurs versels.

- On comprend l'intérêt de chercher des fibrés $p : X \to Y$ "versels", c'est-à-dire ayant la propriété que n'importe quel G-torseur est de la forme $T_{k,y}$. On va voir qu'il en existe.
- D'après le théorème précédent, un invariant $a \in Inv(G)$ est entièrement déterminé par $a(T_K) \in H^*(K)$, lorsque $X \to Y$ est versel et que $K = k(Y)$.
- En fait, on sait en principe identifier $Inv(G)$ comme sous-anneau de $H^*(K)$, si l'on connait

Torseurs versels.

- On comprend l'intérêt de chercher des fibrés $p : X \to Y$ "versels", c'est-à-dire ayant la propriété que n'importe quel G-torseur est de la forme $T_{k,y}$. On va voir qu'il en existe.
- D'après le théorème précédent, un invariant $a \in Inv(G)$ est entièrement déterminé par $a(T_K) \in H^*(K)$, lorsque $X \to Y$ est versel et que $K = k(Y)$.
- En fait, on sait en principe identifier $Inv(G)$ comme sous-anneau de $H^*(K)$, si l'on connait
  - les sous-espaces de Y de codimension 1 ;

Torseurs versels.

- On comprend l'intérêt de chercher des fibrés $p : X \to Y$ "versels", c'est-à-dire ayant la propriété que n'importe quel G-torseur est de la forme $T_{k,y}$. On va voir qu'il en existe.
- D'après le théorème précédent, un invariant $a \in Inv(G)$ est entièrement déterminé par $a(T_K) \in H^*(K)$, lorsque $X \to Y$ est versel et que $K = k(Y)$.
- En fait, on sait en principe identifier $Inv(G)$ comme sous-anneau de $H^*(K)$, si l'on connait
  - les sous-espaces de Y de codimension 1 ;
  - les zéros et les pôles des fonctions de $k(Y)$ le long de ces sous-espaces.

Torseurs versels.

- On comprend l'intérêt de chercher des fibrés $p : X \to Y$ "versels", c'est-à-dire ayant la propriété que n'importe quel G-torseur est de la forme $T_{k,y}$. On va voir qu'il en existe.
- D'après le théorème précédent, un invariant $a \in Inv(G)$ est entièrement déterminé par $a(T_K) \in H^*(K)$, lorsque $X \to Y$ est versel et que $K = k(Y)$.
- En fait, on sait en principe identifier $Inv(G)$ comme sous-anneau de $H^*(K)$, si l'on connait
  - les sous-espaces de Y de codimension 1 ;
  - les zéros et les pôles des fonctions de $k(Y)$ le long de ces sous-espaces.
- Dans le cas de O_n, le fibré $X \to Y$ que l'on a vu est versel : cela traduit le fait élémentaire que toute forme quadratique est diagonalisable.

Théorèmes d'existence.

Théorèmes d'existence.

Théorème

Si on plonge G dans un groupe S "spécial" (eg GL_n, SL_n, Sp_n), alors le fibré $S \rightarrow S/G$ est versel. (Merkurjev)

Théorèmes d'existence.

Théorème

Si on plonge G dans un groupe S "spécial" (eg GL_n, SL_n, Sp_n), alors le fibré $S \to S/G$ est versel. (Merkurjev)

Théorème

Si G agit sur un espace vectoriel V, de telle sorte que l'action est libre sur un ouvert U, alors $U \to U/G$ est versel. (Totaro)

Plan

Etude topologique.

Si $k_0 = \mathbb{C}$, il devient naturel de considérer les espaces topologiques suivants :

Etude topologique.

Si $k_0 = \mathbb{C}$, il devient naturel de considérer les espaces topologiques suivants :

$$EG = \lim U$$

et

Etude topologique.

Si $k_0 = \mathbb{C}$, il devient naturel de considérer les espaces topologiques suivants :

$$EG = \lim U$$

et

$$BG = \lim U/G = EG/G$$

Etude topologique.

Si $k_0 = \mathbb{C}$, il devient naturel de considérer les espaces topologiques suivants :

$$EG = \lim U$$

et

$$BG = \lim U/G = EG/G$$

où U est un ouvert dans une représentation de G, comme précédemment.

Etude topologique.

Si $k_0 = \mathbb{C}$, il devient naturel de considérer les espaces topologiques suivants :

$$EG = \lim U$$

et

$$BG = \lim U/G = EG/G$$

où U est un ouvert dans une représentation de G, comme précédemment.

Remarque.

EG est alors contractile. Ceci rend possible de nombreux calculs topologiques.

Exemples.

Exemples.

- Lorsque $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a $BG =$ la Grassmannienne infinie, ie l'ensemble des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^\infty$.

Exemples.

- Lorsque $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a $BG =$ la Grassmannienne infinie, ie l'ensemble des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^\infty$. Pour $n = 1$, on a donc $BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$.

Exemples.

- Lorsque $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a $BG =$ la Grassmannienne infinie, ie l'ensemble des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^\infty$. Pour $n = 1$, on a donc $BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Il est facile de calculer

$$H^*(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n].$$

Exemples.

- Lorsque $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a $BG =$ la Grassmannienne infinie, ie l'ensemble des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^\infty$. Pour $n = 1$, on a donc $BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Il est facile de calculer

$$H^*(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n].$$

- Lorsque $G = O_n(\mathbb{C})$, l'espace BG a le type d'homotopie de la Grassmannienne infinie réelle.

Exemples.

- Lorsque $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a $BG =$ la Grassmannienne infinie, ie l'ensemble des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^\infty$. Pour $n = 1$, on a donc $BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Il est facile de calculer

$$H^*(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n].$$

- Lorsque $G = O_n(\mathbb{C})$, l'espace BG a le type d'homotopie de la Grassmannienne infinie réelle. Pour $n = 1$, on a donc $BO_1(\mathbb{C}) \approx \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$.

Exemples.

- Lorsque $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a $BG =$ la Grassmannienne infinie, ie l'ensemble des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^\infty$. Pour $n = 1$, on a donc $BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Il est facile de calculer

$$H^*(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n].$$

- Lorsque $G = O_n(\mathbb{C})$, l'espace BG a le type d'homotopie de la Grassmannienne infinie réelle. Pour $n = 1$, on a donc $BO_1(\mathbb{C}) \approx \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$. Il est facile de calculer

$$H^*(BO_n(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[w_1, \ldots, w_n].$$

Exemples.

- Lorsque $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a $BG =$ la Grassmannienne infinie, ie l'ensemble des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^\infty$. Pour $n = 1$, on a donc $BGL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Il est facile de calculer

$$H^*(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n].$$

- Lorsque $G = O_n(\mathbb{C})$, l'espace BG a le type d'homotopie de la Grassmannienne infinie réelle. Pour $n = 1$, on a donc $BO_1(\mathbb{C}) \approx \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$. Il est facile de calculer

$$H^*(BO_n(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[w_1, \ldots, w_n].$$

Question :

Y-a-t-il un rapport entre la cohomologie de l'espace topologique BG et $Inv(G)$?

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

Théorème

Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(BG)$ et telle que

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

Théorème

Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(BG)$ et telle que

- $E_2^{0,*} = Inv(G)$,

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

Théorème

Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(BG)$ et telle que

- $E_2^{0,*} = Inv(G)$,
- $E_2^{p,q} = 0$ si $p > q$,

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

Théorème

Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(BG)$ et telle que

- $E_2^{0,*} = Inv(G)$,
- $E_2^{p,q} = 0$ si $p > q$,
- $E_2^{p,p} = CH^p BG$, un nouvel objet que nous allons décrire sous peu.

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

Théorème

Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(BG)$ et telle que

- $E_2^{0,*} = Inv(G)$,
- $E_2^{p,q} = 0$ si $p > q$,
- $E_2^{p,p} = CH^p BG$, un nouvel objet que nous allons décrire sous peu.

Conséquences

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

Théorème

Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(BG)$ et telle que

- $E_2^{0,*} = Inv(G)$,
- $E_2^{p,q} = 0$ si $p > q$,
- $E_2^{p,p} = CH^p BG$, un nouvel objet que nous allons décrire sous peu.

Conséquences

- Il existe une application (dite “cycle”)

$$CH^* BG \to H^{2*}(BG).$$

$Inv(G)$ a d'autant plus de chances d'être non-nul que cette application n'est pas un isomorphisme.

La suite spectrale de Bloch & Ogus.

Théorème

Il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(BG)$ et telle que

- $E_2^{0,*} = Inv(G)$,
- $E_2^{p,q} = 0$ si $p > q$,
- $E_2^{p,p} = CH^p BG$, un nouvel objet que nous allons décrire sous peu.

Conséquences

- Il existe une application (dite “cycle”)

$$CH^* BG \to H^{2*}(BG).$$

  $Inv(G)$ a d'autant plus de chances d'être non-nul que cette application n'est pas un isomorphisme.
- De plus, il existe une application $H^*(BG) \to Inv(G)$, qui est nulle sur l'image de $CH^* BG$.

La définition des anneaux de Chow.

La définition des anneaux de Chow.

- Un cycle algébrique (de dimension p) sur la variété X est une somme formelle $\sum a_i V_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et V_i sous-variété de dimension p de X.

La définition des anneaux de Chow.

- Un cycle algébrique (de dimension p) sur la variété X est une somme formelle $\sum a_i V_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et V_i sous-variété de dimension p de X.
- Si $dimW = p + 1$ et $f \in k(W)^\times$, on peut former son "diviseur principal" $div(f)$, qui est la somme formelle des sous-variétés de W (donc de X) sur lesquelles f a des zéros ou des pôles.

La définition des anneaux de Chow.

- Un cycle algébrique (de dimension p) sur la variété X est une somme formelle $\sum a_i V_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et V_i sous-variété de dimension p de X.
- Si $dim W = p + 1$ et $f \in k(W)^\times$, on peut former son "diviseur principal" $div(f)$, qui est la somme formelle des sous-variétés de W (donc de X) sur lesquelles f a des zéros ou des pôles.
- On définit

$$CH_p X = \frac{\{cycles\ algebriques\}}{diviseurs\ principaux}.$$

La définition des anneaux de Chow.

- Un cycle algébrique (de dimension p) sur la variété X est une somme formelle $\sum a_i V_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et V_i sous-variété de dimension p de X.
- Si $dimW = p + 1$ et $f \in k(W)^\times$, on peut former son "diviseur principal" $div(f)$, qui est la somme formelle des sous-variétés de W (donc de X) sur lesquelles f a des zéros ou des pôles.
- On définit

$$CH_p X = \frac{\{cycles\ algebriques\}}{diviseurs\ principaux}.$$

Question :

Connait-on des exemples de groupes pour lesquels $CH^* BG$ est calculable, et si possible tels que $CH^* BG \to H^* BG$ n'est pas un isomorphisme ?

Un mauvais exemple : $GL_n(\mathbb{C})$.

Dans tous les exemples, on va travailler modulo 2.

Un mauvais exemple : $GL_n(\mathbb{C})$.

Dans tous les exemples, on va travailler modulo 2.

- On a
$$CH^* BGL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{F}_2[c_1, \ldots, c_n] = H^*(BGL_n(\mathbb{C})).$$

Un mauvais exemple : $GL_n(\mathbb{C})$.

Dans tous les exemples, on va travailler modulo 2.

- On a
$$CH^* BGL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{F}_2[c_1, \ldots, c_n] = H^*(BGL_n(\mathbb{C})).$$

- L'anneau $Inv(GL_n(\mathbb{C}))$ est trivial, ie contient seulement les invariants constants : $Inv(GL_n(\mathbb{C})) = \mathbb{F}_2$.

Un mauvais exemple : $GL_n(\mathbb{C})$.

Dans tous les exemples, on va travailler modulo 2.

- On a
$$CH^*BGL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{F}_2[c_1, \ldots, c_n] = H^*(BGL_n(\mathbb{C})).$$
- L'anneau $Inv(GL_n(\mathbb{C}))$ est trivial, ie contient seulement les invariants constants : $Inv(GL_n(\mathbb{C})) = \mathbb{F}_2$. C'est une conséquence directe du théorème 90 de Hilbert.

Dernier retour sur O_n.

Dernier retour sur O_n.

- On a
$$CH^* BO_n(\mathbb{C}) = \mathbb{F}_2[w_1^2, \ldots, w_n^2],$$
c'est un sous-anneau de
$$H^*(BO_n(\mathbb{C})) = \mathbb{F}_2[w_1, \ldots, w_n].$$

Dernier retour sur O_n.

- On a
$$CH^* BO_n(\mathbb{C}) = \mathbb{F}_2[w_1^2, \ldots, w_n^2],$$
c'est un sous-anneau de
$$H^*(BO_n(\mathbb{C})) = \mathbb{F}_2[w_1, \ldots, w_n].$$

- Comme on l'a vu, $Inv(O_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de base $w_1, \ldots, w_n$ et 1 (l'invariant constant).

Dernier retour sur O_n.

- On a
$$CH^* BO_n(\mathbb{C}) = \mathbb{F}_2[w_1^2, \dots, w_n^2],$$
c'est un sous-anneau de
$$H^*(BO_n(\mathbb{C})) = \mathbb{F}_2[w_1, \dots, w_n].$$

- Comme on l'a vu, $Inv(O_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de base $w_1, \dots, w_n$ et 1 (l'invariant constant).
- Ainsi, l'application $H^*(BO_n(\mathbb{C})) \to Inv(O_n(\mathbb{C}))$ est surjective, et le noyau est constitué principalement d'éléments provenant de l'image de $CH^* BO_n(\mathbb{C})$.

L'exemple de G_2.

Les invariants du groupe G_2 correspondent aux invariants des algèbres de quaternions.

Les invariants du groupe G_2 correspondent aux invariants des algèbres de quaternions.

- On a
$$CH^* BG_2 = \mathbb{F}_2[c_2, c_4, c_6, c_7]/(c_2^2 = 0, c_2 c_7 = 0)$$

L'exemple de G_2.

Les invariants du groupe G_2 correspondent aux invariants des algèbres de quaternions.

- On a
$$CH^* BG_2 = \mathbb{F}_2[c_2, c_4, c_6, c_7]/(c_2^2 = 0, c_2 c_7 = 0)$$
alors que
$$H^*(BG_2) = \mathbb{F}_2[w_4, w_6, w_7]$$
avec c_2 ayant 0 pour image et c_i s'appliquant sur w_i^2.

L'exemple de G_2.

Les invariants du groupe G_2 correspondent aux invariants des algèbres de quaternions.

- On a
  $$CH^*BG_2 = \mathbb{F}_2[c_2, c_4, c_6, c_7]/(c_2^2 = 0, c_2c_7 = 0)$$
  alors que
  $$H^*(BG_2) = \mathbb{F}_2[w_4, w_6, w_7]$$
  avec c_2 ayant 0 pour image et c_i s'appliquant sur w_i^2.
- La présence d'un élément dans CH^2BG_2 appartenant au noyau de l'application cycle garantit, grâce à la suite spectrale, la présence d'un élément non-nul $e_3 \in Inv(G_2)$.

L'exemple de G_2.

Les invariants du groupe G_2 correspondent aux invariants des algèbres de quaternions.

- On a
$$CH^*BG_2 = \mathbb{F}_2[c_2, c_4, c_6, c_7]/(c_2^2 = 0, c_2c_7 = 0)$$
alors que
$$H^*(BG_2) = \mathbb{F}_2[w_4, w_6, w_7]$$
avec c_2 ayant 0 pour image et c_i s'appliquant sur w_i^2.
- La présence d'un élément dans CH^2BG_2 appartenant au noyau de l'application cycle garantit, grâce à la suite spectrale, la présence d'un élément non-nul $e_3 \in Inv(G_2)$.
- Théorème (Serre et al) : e_3 est le seul invariant non-nul (et non-constant) de G_2.

Plan

Résumé.

Résumé.

- Lorsque G est un groupe familier, calculer les invariants cohomologiques de G revient à associer des invariants aux objets “stables par G” : formes quadratiques, algèbres simples centrales, etc...

Résumé.

- Lorsque G est un groupe familier, calculer les invariants cohomologiques de G revient à associer des invariants aux objets "stables par G" : formes quadratiques, algèbres simples centrales, etc...
- On montre que ces objets sont en bijection avec les torseurs de G, et on montre qu'il existe une application universelle $X \to Y$ dont les fibres sont exactement (tous) les G-torseurs.

Résumé.

- Lorsque G est un groupe familier, calculer les invariants cohomologiques de G revient à associer des invariants aux objets "stables par G" : formes quadratiques, algèbres simples centrales, etc...
- On montre que ces objets sont en bijection avec les torseurs de G, et on montre qu'il existe une application universelle $X \to Y$ dont les fibres sont exactement (tous) les G-torseurs. L'étude des invariants de G est ramenée à l'étude de la variété Y.

Résumé.

- Lorsque G est un groupe familier, calculer les invariants cohomologiques de G revient à associer des invariants aux objets “stables par G” : formes quadratiques, algèbres simples centrales, etc...
- On montre que ces objets sont en bijection avec les torseurs de G, et on montre qu'il existe une application universelle $X \to Y$ dont les fibres sont exactement (tous) les G-torseurs. L'étude des invariants de G est ramenée à l'étude de la variété Y.
- Y est liée à l'espace topologique plus familier BG, dont on sait calculer en général la cohomologie relativement facilement.

Résumé.

- Lorsque G est un groupe familier, calculer les invariants cohomologiques de G revient à associer des invariants aux objets "stables par G" : formes quadratiques, algèbres simples centrales, etc...
- On montre que ces objets sont en bijection avec les torseurs de G, et on montre qu'il existe une application universelle $X \to Y$ dont les fibres sont exactement (tous) les G-torseurs. L'étude des invariants de G est ramenée à l'étude de la variété Y.
- Y est liée à l'espace topologique plus familier BG, dont on sait calculer en général la cohomologie relativement facilement.
- Il existe une suite spectrale qui montre que $Inv(G)$ est fortement lié à $H^*(BG)$ et CH^*BG.

Résumé.

- Lorsque G est un groupe familier, calculer les invariants cohomologiques de G revient à associer des invariants aux objets “stables par G” : formes quadratiques, algèbres simples centrales, etc...
- On montre que ces objets sont en bijection avec les torseurs de G, et on montre qu'il existe une application universelle $X \to Y$ dont les fibres sont exactement (tous) les G-torseurs. L'étude des invariants de G est ramenée à l'étude de la variété Y.
- Y est liée à l'espace topologique plus familier BG, dont on sait calculer en général la cohomologie relativement facilement.
- Il existe une suite spectrale qui montre que $Inv(G)$ est fortement lié à $H^*(BG)$ et CH^*BG. Les exemples le confirment.

Références.

- S. Garibaldi, A. Merkurjev, and J.-P. Serre, Cohomological invariants in Galois cohomology, vol. 28 of University Lecture Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003
- P. Guillot, Geometrical methods for cohomological invariants, math.AG/0612323