Complexité de relations d'équivalence et rigidité d'actions de groupes (d'après S. Thomas)

Julien Melleray

Institut Camille Jordan (Lyon)
http://www.math.univ-lyon1.fr/∼melleray

Tripode 15, Grenoble, 10 octobre 2008

Espaces et groupes polonais

Définition

Un espace topologique X est un espace polonais si sa topologie est séparable, métrisable et admet une distance compatible complète.

Définition

Un groupe topologique G est un groupe polonais si la topologie de G est polonaise.

Exemples

- G dénombrable, muni de la topologie discrète.
- $S_\infty \subseteq \mathbb{N}^N$, muni de la topologie de la convergence simple.
- $Iso(X) \subseteq X^X$, muni de la topologie de la convergence simple (avec X métrique polonais)
- $Homeo(X)$ avec X compact (ou même localement compact) et la topologie compacte-ouverte.

Espaces et groupes polonais

Définition

Un espace topologique X est un espace polonais si sa topologie est séparable, métrisable et admet une distance compatible complète.

Définition

Un groupe topologique G est un groupe polonais si la topologie de G est polonaise.

Exemples

- G dénombrable, muni de la topologie discrète.
- $S_\infty \subseteq \mathbb{N}^N$, muni de la topologie de la convergence simple.
- $Iso(X) \subseteq X^X$ muni de la topologie de la convergence simple (avec X métrique polonais)
- $Homeo(X)$ avec X compact (ou même localement compact) et la topologie compacte-ouverte.

Espaces et groupes polonais

Définition

Un espace topologique X est un espace polonais si sa topologie est séparable, métrisable et admet une distance compatible complète.

Définition

Un groupe topologique G est un groupe polonais si la topologie de G est polonaise.

Exemples

- G dénombrable, muni de la topologie discrète.
- $S_\infty \subseteq \mathbb{N}^N$, muni de la topologie de la convergence simple.
- $Iso(X) \subseteq X^X$ muni de la topologie de la convergence simple (avec X métrique polonais)
- $Homeo(X)$ avec X compact (ou même localement compact) et la topologie compacte-ouverte.

Espaces et groupes polonais

Définition

Un espace topologique X est un espace polonais si sa topologie est séparable, métrisable et admet une distance compatible complète.

Définition

Un groupe topologique G est un groupe polonais si la topologie de G est polonaise.

Exemples

- G dénombrable, muni de la topologie discrète.
- $S_\infty \subseteq \mathbb{N}^N$, muni de la topologie de la convergence simple.
- $Iso(X) \subseteq X^X$ muni de la topologie de la convergence simple (avec X métrique polonais)
- $Homeo(X)$ avec X compact (ou même localement compact) et la topologie compacte-ouverte.

Espaces et groupes polonais

Définition

Un espace topologique X est un espace polonais si sa topologie est séparable, métrisable et admet une distance compatible complète.

Définition

Un groupe topologique G est un groupe polonais si la topologie de G est polonaise.

Exemples

- G dénombrable, muni de la topologie discrète.
- $S_\infty \subseteq \mathbb{N}^N$, muni de la topologie de la convergence simple.
- $Iso(X) \subseteq X^X$ muni de la topologie de la convergence simple (avec X métrique polonais)
- $Homeo(X)$ avec X compact (ou même localement compact) et la topologie compacte-ouverte.

Espaces et groupes polonais

Définition

Un espace topologique X est un espace polonais si sa topologie est séparable, métrisable et admet une distance compatible complète.

Définition

Un groupe topologique G est un groupe polonais si la topologie de G est polonaise.

Exemples

- G dénombrable, muni de la topologie discrète.
- $S_\infty \subseteq \mathbb{N}^N$, muni de la topologie de la convergence simple.
- $Iso(X) \subseteq X^X$ muni de la topologie de la convergence simple (avec X métrique polonais)
- $Homeo(X)$ avec X compact (ou même localement compact) et la topologie compacte-ouverte.

Groupes polonais et groupes d'isométries

Théorème (folklore?)

Tout groupe est isomorphe au groupe d'isométries d'un espace métrique.

Théorème (Gao-Kechris)

Tout groupe polonais est isomorphe à $Iso(X)$ pour un certain métrique polonais X.

Théorème (M.)

Tout groupe compact métrisable est isomorphe à $Iso(X)$ pour un certain métrique compact X.

Groupes polonais et groupes d'isométries

Théorème (folklore?)

Tout groupe est isomorphe au groupe d'isométries d'un espace métrique.

Théorème (Gao-Kechris)

Tout groupe polonais est isomorphe à $Iso(X)$ pour un certain métrique polonais X.

Théorème (M.)

Tout groupe compact métrisable est isomorphe à $Iso(X)$ pour un certain métrique compact X.

Groupes polonais et groupes d'isométries

Théorème (folklore?)

Tout groupe est isomorphe au groupe d'isométries d'un espace métrique.

Théorème (Gao-Kechris)

Tout groupe polonais est isomorphe à $Iso(X)$ pour un certain métrique polonais X.

Théorème (M.)

Tout groupe compact métrisable est isomorphe à $Iso(X)$ pour un certain métrique compact X.

Boréliens Standard et fonctions boréliennes

Définition

Un borélien standard est un espace polonais équipé de sa tribu borélienne.

Définition

Si X, Y sont deux boréliens standard, $f: X \to Y$ est borélienne si son graphe est borélien ou, de façon équivalente, si $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien $B \subset Y$.

Théorème (Kuratowski)

Deux boréliens standard sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même cardinal.

Proposition

Soit X un espace métrique séparable. Alors X, muni de sa tribu borélienne, est un borélien standard ssi X est borélien dans son complété.

Boréliens Standard et fonctions boréliennes

Définition

Un borélien standard est un espace polonais équipé de sa tribu borélienne.

Définition

Si X, Y sont deux boréliens standard, $f : X \to Y$ est borélienne si son graphe est borélien ou, de façon équivalente, si $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien $B \subset Y$.

Théorème (Kuratowski)

Deux boréliens standard sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même cardinal.

Proposition

Soit X un espace métrique séparable. Alors X, muni de sa tribu borélienne, est un borélien standard ssi X est borélien dans son complété.

Boréliens Standard et fonctions boréliennes

Définition

Un borélien standard est un espace polonais équipé de sa tribu borélienne.

Définition

Si X, Y sont deux boréliens standard, $f : X \to Y$ est borélienne si son graphe est borélien ou, de façon équivalente, si $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien $B \subset Y$.

Théorème (Kuratowski)

Deux boréliens standard sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même cardinal.

Proposition

Soit X un espace métrique séparable. Alors X, muni de sa tribu borélienne, est un borélien standard ssi X est borélien dans son complété.

Boréliens Standard et fonctions boréliennes

Définition
Un borélien standard est un espace polonais équipé de sa tribu borélienne.

Définition
Si X, Y sont deux boréliens standard, $f : X \to Y$ est borélienne si son graphe est borélien ou, de façon équivalente, si $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien $B \subset Y$.

Théorème (Kuratowski)
Deux boréliens standard sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même cardinal.

Proposition
Soit X un espace métrique séparable. Alors X, muni de sa tribu borélienne, est un borélien standard ssi X est borélien dans son complété.

Codages

Observation

On peut souvent "regrouper" des classes de structures naturelles (groupes/graphes dénombrables, espaces métriques compacts/polonais, espaces de Banach séparables...) en un borélien standard.

Exemple

On peut considérer tout groupe dénombrable comme ayant $\mathbb{N}$ pour univers; le groupe est alors déterminé par sa table de multiplication. Définissons $\subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des α tels que:

- $\forall n, m \, \exists! \, p \;\; \alpha(n, m, p) = 1$ (on note ci-dessous $p = \alpha(n, m)$)
- $\exists n \forall m \;\; m = \alpha(n, m) = \alpha(m, n)$ (élément neutre, noté e ci-dessous)
- $\forall n, m, p \;\; \alpha(n, \alpha(m, p)) = \alpha(\alpha(n, m), p)$ (associativité)
- $\forall n \, \exists m \;\; (\alpha(n, m) = e$ et $\alpha(m, n) = e)$ (inverse)

Observation

GROUP est borélien dans $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et est donc un borélien standard.

Codages

Observation

On peut souvent "regrouper" des classes de structures naturelles (groupes/graphes dénombrables, espaces métriques compacts/polonais, espaces de Banach séparables...) en un borélien standard.

Exemple

On peut considérer tout groupe dénombrable comme ayant $\mathbb{N}$ pour univers; le groupe est alors déterminé par sa table de multiplication. Définissons *GROUP* $\subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des α tels que:

- $\forall n, m \, \exists! \, p \; \alpha(n, m, p) = 1$ (on note ci-dessous $p = \alpha(n, m)$)
- $\exists n \forall m \; m = \alpha(n, m) = \alpha(m, n)$ (élément neutre, noté e ci-dessous)
- $\forall n, m, p \; \alpha(n, \alpha(m, p)) = \alpha(\alpha(n, m), p)$ (associativité)
- $\forall n \, \exists m \; (\alpha(n, m) = e$ et $\alpha(m, n) = e)$ (inverse)

Observation

GROUP est borélien dans $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et est donc un borélien standard.

Codages

Observation

On peut souvent "regrouper" des classes de structures naturelles (groupes/graphes dénombrables, espaces métriques compacts/polonais, espaces de Banach séparables...) en un borélien standard.

Exemple

On peut considérer tout groupe dénombrable comme ayant $\mathbb{N}$ pour univers; le groupe est alors déterminé par sa table de multiplication. Définissons $GROUP \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des α tels que:

- $\forall n, m\, \exists!\, p\ \alpha(n, m, p) = 1$ (on note ci-dessous $p = \alpha(n, m)$)
- $\exists n \forall m\ m = \alpha(n, m) = \alpha(m, n)$ (élément neutre, noté e ci-dessous)
- $\forall n, m, p\ \alpha(n, \alpha(m, p)) = \alpha(\alpha(n, m), p)$ (associativité)
- $\forall n\, \exists m\ (\alpha(n, m) = e \text{ et } \alpha(m, n) = e)$ (inverse)

Observation

$GROUP$ est borélien dans $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et est donc un borélien standard.

Codages

Observation

On peut souvent "regrouper" des classes de structures naturelles (groupes/graphes dénombrables, espaces métriques compacts/polonais, espaces de Banach séparables...) en un borélien standard.

Exemple

On peut considérer tout groupe dénombrable comme ayant $\mathbb{N}$ pour univers; le groupe est alors déterminé par sa table de multiplication. Définissons $GROUP \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des α tels que:

- $\forall n, m \, \exists! \, p \;\, \alpha(n, m, p) = 1$ (on note ci-dessous $p = \alpha(n, m)$)
- $\exists n \forall m \;\, m = \alpha(n, m) = \alpha(m, n)$ (élément neutre, noté e ci-dessous)
- $\forall n, m, p \;\, \alpha(n, \alpha(m, p)) = \alpha(\alpha(n, m), p)$ (associativité)
- $\forall n \, \exists m \;\, (\alpha(n, m) = e \text{ et } \alpha(m, n) = e)$ (inverse)

Observation

$GROUP$ est borélien dans $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et est donc un borélien standard.

Codages

Observation

On peut souvent "regrouper" des classes de structures naturelles (groupes/graphes dénombrables, espaces métriques compacts/polonais, espaces de Banach séparables...) en un borélien standard.

Exemple

On peut considérer tout groupe dénombrable comme ayant $\mathbb{N}$ pour univers; le groupe est alors déterminé par sa table de multiplication. Définissons $GROUP \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des α tels que:

- $\forall n, m \, \exists! \, p \; \alpha(n, m, p) = 1$ (on note ci-dessous $p = \alpha(n, m)$)
- $\exists n \forall m \; m = \alpha(n, m) = \alpha(m, n)$ (élément neutre, noté e ci-dessous)
- $\forall n, m, p \; \alpha(n, \alpha(m, p)) = \alpha(\alpha(n, m), p)$ (associativité)
- $\forall n \; \exists m \; (\alpha(n, m) = e \text{ et } \alpha(m, n) = e)$ (inverse)

Observation

$GROUP$ est borélien dans $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et est donc un borélien standard.

Codages

Observation

On peut souvent "regrouper" des classes de structures naturelles (groupes/graphes dénombrables, espaces métriques compacts/polonais, espaces de Banach séparables...) en un borélien standard.

Exemple

On peut considérer tout groupe dénombrable comme ayant $\mathbb{N}$ pour univers; le groupe est alors déterminé par sa table de multiplication. Définissons $GROUP \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des α tels que:

- $\forall n, m\, \exists!\, p\ \alpha(n, m, p) = 1$ (on note ci-dessous $p = \alpha(n, m)$)
- $\exists n \forall m\ m = \alpha(n, m) = \alpha(m, n)$ (élément neutre, noté e ci-dessous)
- $\forall n, m, p\ \alpha(n, \alpha(m, p)) = \alpha(\alpha(n, m), p)$ (associativité)
- $\forall n\ \exists m\ (\alpha(n, m) = e \text{ et } \alpha(m, n) = e)$ (inverse)

Observation

$GROUP$ est borélien dans $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et est donc un borélien standard.

Codages

Observation

On peut souvent "regrouper" des classes de structures naturelles (groupes/graphes dénombrables, espaces métriques compacts/polonais, espaces de Banach séparables...) en un borélien standard.

Exemple

On peut considérer tout groupe dénombrable comme ayant $\mathbb{N}$ pour univers; le groupe est alors déterminé par sa table de multiplication. Définissons $GROUP \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des α tels que:

- $\forall n, m \, \exists! \, p \; \alpha(n, m, p) = 1$ (on note ci-dessous $p = \alpha(n, m)$)
- $\exists n \forall m \; m = \alpha(n, m) = \alpha(m, n)$ (élément neutre, noté e ci-dessous)
- $\forall n, m, p \; \alpha(n, \alpha(m, p)) = \alpha(\alpha(n, m), p)$ (associativité)
- $\forall n \; \exists m \; (\alpha(n, m) = e \text{ et } \alpha(m, n) = e)$ (inverse)

Observation

GROUP est borélien dans $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et est donc un borélien standard.

Actions boréliennes de groupes polonais.

Définition

On dit qu'un groupe polonais G agit boréliennement sur le borélien standard X si l'application $(g, x) \mapsto g.x$ est borélienne.

Remarque

Si G agit boréliennement sur X alors la relation E_G^X associée est analytique (et même borélienne si l'action est libre ou si G est un groupe dénombrable).

Exemple

La relation d'isomorphisme entre groupes dénombrables est induite par l'action naturelle de S_∞ sur le borélien standard $GROUP$. Cette relation est analytique non borélienne.

Actions boréliennes de groupes polonais.

Définition

On dit qu'un groupe polonais G agit boréliennement sur le borélien standard X si l'application $(g, x) \mapsto g.x$ est borélienne.

Remarque

Si G agit boréliennement sur X alors la relation E_G^X associée est analytique (et même borélienne si l'action est libre ou si G est un groupe dénombrable).

Exemple

La relation d'isomorphisme entre groupes dénombrables est induite par l'action naturelle de S_∞ sur le borélien standard $GROUP$. Cette relation est analytique non borélienne.

Actions boréliennes de groupes polonais.

Définition

On dit qu'un groupe polonais G agit boréliennement sur le borélien standard X si l'application $(g, x) \mapsto g.x$ est borélienne.

Remarque

Si G agit boréliennement sur X alors la relation E_G^X associée est analytique (et même borélienne si l'action est libre ou si G est un groupe dénombrable).

Exemple

La relation d'isomorphisme entre groupes dénombrables est induite par l'action naturelle de S_∞ sur le borélien standard $GROUP$. Cette relation est analytique non borélienne.

Un exemple: classification des groupes abéliens de rang 1

Soit G un groupe abélien de rang 1. Pour $a \in G$ et $p \in \mathbb{P}$ on définit le *p-type de a* $t_p(a) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$t_p(a) = \sup\{n\colon a \text{ est divisible par } p^n\}$$

Puis on définit le type de a, $t(a) \in \left(\mathbb{N} \cup \{\infty\}\right)^{\mathbb{P}}$ par

$$t(a) = (t_p(a))_{p \in \mathbb{P}}$$

On dit que deux types sont *équivalents* s'ils sont égaux sauf en un ensemble fini d'indices, et si la différence des coordonnées correspondantes est finie.
Deux éléments différents du neutre dans G ont des types équivalents, ce qui permet de définir le *type* de G.
Baer a démontré que deux groupes abéliens de rang 1 sans torsion sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même type.

Un exemple: classification des groupes abéliens de rang 1

Soit G un groupe abélien de rang 1. Pour $a \in G$ et $p \in \mathbb{P}$ on définit le p-type de a $t_p(a) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$t_p(a) = \sup\{n\colon a \text{ est divisible par } p^n\}$$

Puis on définit le type de a, $t(a) \in \left(\mathbb{N} \cup \{\infty\}\right)^{\mathbb{P}}$ par

$$t(a) = (t_p(a))_{p \in \mathbb{P}}$$

On dit que deux types sont équivalents s'ils sont égaux sauf en un ensemble fini d'indices, et si la différence des coordonnées correspondantes est finie.
Deux éléments différents du neutre dans G ont des types équivalents, ce qui permet de définir le type de G.
Baer a démontré que deux groupes abéliens de rang 1 sans torsion sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même type.

Un exemple: classification des groupes abéliens de rang 1

Soit G un groupe abélien de rang 1. Pour $a \in G$ et $p \in \mathbb{P}$ on définit le p-type de a $t_p(a) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$t_p(a) = \sup\{n \colon a \text{ est divisible par } p^n\}$$

Puis on définit le type de a, $t(a) \in \left(\mathbb{N} \cup \{\infty\}\right)^{\mathbb{P}}$ par

$$t(a) = (t_p(a))_{p \in \mathbb{P}}$$

On dit que deux types sont équivalents s'ils sont égaux sauf en un ensemble fini d'indices, et si la différence des coordonnées correspondantes est finie.

Deux éléments différents du neutre dans G ont des types équivalents, ce qui permet de définir le type de G.

Baer a démontré que deux groupes abéliens de rang 1 sans torsion sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même type.

Un exemple: classification des groupes abéliens de rang 1

Soit G un groupe abélien de rang 1. Pour $a \in G$ et $p \in \mathbb{P}$ on définit le p-type de a $t_p(a) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$t_p(a) = \sup\{n \colon a \text{ est divisible par } p^n\}$$

Puis on définit le type de a, $t(a) \in \left(\mathbb{N} \cup \{\infty\}\right)^{\mathbb{P}}$ par

$$t(a) = (t_p(a))_{p \in \mathbb{P}}$$

On dit que deux types sont équivalents s'ils sont égaux sauf en un ensemble fini d'indices, et si la différence des coordonnées correspondantes est finie.
Deux éléments différents du neutre dans G ont des types équivalents, ce qui permet de définir le type de G.
Baer a démontré que deux groupes abéliens de rang 1 sans torsion sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même type.

Un exemple: classification des groupes abéliens de rang 1

Soit G un groupe abélien de rang 1. Pour $a \in G$ et $p \in \mathbb{P}$ on définit le p-type de a $t_p(a) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$t_p(a) = \sup\{n \colon a \text{ est divisible par } p^n\}$$

Puis on définit le type de a, $t(a) \in \left(\mathbb{N} \cup \{\infty\}\right)^{\mathbb{P}}$ par

$$t(a) = (t_p(a))_{p \in \mathbb{P}}$$

On dit que deux types sont équivalents s'ils sont égaux sauf en un ensemble fini d'indices, et si la différence des coordonnées correspondantes est finie.
Deux éléments différents du neutre dans G ont des types équivalents, ce qui permet de définir le type de G.
Baer a démontré que deux groupes abéliens de rang 1 sans torsion sont isomorphes si, et seulement si, ils ont le même type.

Invariants complets et réductions boréliennes

Définition

Si E est une relation d'équivalence sur X, une classification de E est la donnée d'un ensemble I (les invariants) et d'une fonction $f\colon X \to I$ telle que

$$\forall x, y \in X \ (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$$

Définition

Soient E, F deux relations d'équivalence sur les boréliens standard X, Y. On dit que E se réduit boréliennement à F (en symboles: $E \leq_B F$) s'il existe une fonction borélienne $f\colon X \to Y$ telle que

$$\forall x, y \in X \qquad (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) \, F \, f(y))$$

Remarque

Si $f\colon X \to Y$ est une réduction borélienne de E à F, alors à partir d'une classification de F on peut déduire une classification de E en composant par F.

Invariants complets et réductions boréliennes

Définition

Si E est une relation d'équivalence sur X, une classification de E est la donnée d'un ensemble I (les invariants) et d'une fonction $f\colon X \to I$ telle que

$$\forall x, y \in X \; (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$$

Définition

Soient E, F deux relations d'équivalence sur les boréliens standard X, Y. On dit que E se réduit boréliennement à F (en symboles: $E \leq_B F$) s'il existe une fonction borélienne $f\colon X \to Y$ telle que

$$\forall x, y \in X \qquad (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) \, F \, f(y))$$

Remarque

Si $f\colon X \to Y$ est une réduction borélienne de E à F, alors à partir d'une classification de F on peut déduire une classification de E en composant par F.

Invariants complets et réductions boréliennes

Définition

Si E est une relation d'équivalence sur X, une classification de E est la donnée d'un ensemble I (les invariants) et d'une fonction $f: X \to I$ telle que

$$\forall x, y \in X \ (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$$

Définition

Soient E, F deux relations d'équivalence sur les boréliens standard X, Y. On dit que E se réduit boréliennement à F (en symboles: $E \leq_B F$) s'il existe une fonction borélienne $f: X \to Y$ telle que

$$\forall x, y \in X \qquad (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) \, F \, f(y))$$

Remarque

Si $f: X \to Y$ est une réduction borélienne de E à F, alors à partir d'une classification de F on peut déduire une classification de E en composant par F.

Invariants complets et réductions boréliennes

Définition

Si E est une relation d'équivalence sur X, une classification de E est la donnée d'un ensemble I (les invariants) et d'une fonction $f : X \to I$ telle que

$$\forall x, y \in X \; (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$$

Définition

Soient E, F deux relations d'équivalence sur les boréliens standard X, Y. On dit que E se réduit boréliennement à F (en symboles: $E \leq_B F$) s'il existe une fonction borélienne $f : X \to Y$ telle que

$$\forall x, y \in X \qquad (x \, E \, y) \Leftrightarrow (f(x) \, F \, f(y))$$

Remarque

Si $f : X \to Y$ est une réduction borélienne de E à F, alors à partir d'une classification de F on peut déduire une classification de E en composant par F.

Quelques notations

Définition

Si E, F sont deux relations d'équivalence borélienne, on note $E \sim_B F$ si $E \leq_B F$ et $F \leq_B E$.

Définition

Si le groupe polonais G agit boréliennement sur l'espace borélien standard X en induisant une relation d'équivalence E, on dira que X est un G-espace borélien et que E est une G-relation. On parlera de G-relation borélienne si E est de plus borélienne dans $X \times X$.

Quelques notations

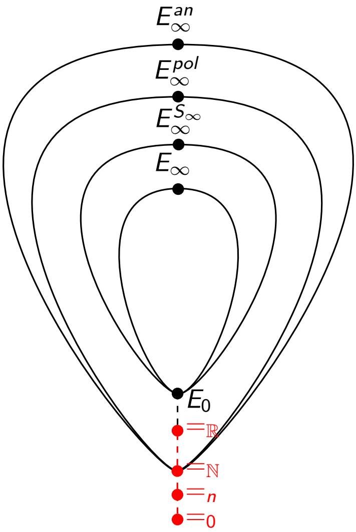
Définition

Si E, F sont deux relations d'équivalence borélienne, on note $E \sim_B F$ si $E \leq_B F$ et $F \leq_B E$.

Définition

Si le groupe polonais G agit boréliennement sur l'espace borélien standard X en induisant une relation d'équivalence E, on dira que X est un G-espace borélien et que E est une G-relation. On parlera de G-relation borélienne si E est de plus borélienne dans $X \times X$.

Une carte du monde.



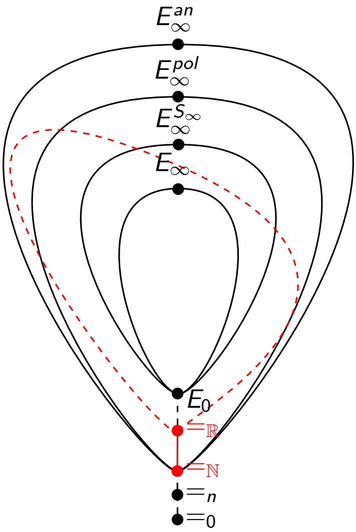
Définition

Si X est un ensemble, $=_X$ désigne la relation d'égalité sur X.

Théorème (Silver)

Soit E une relation d'équivalence borélienne. Alors soit $E \leq_B =_\mathbb{N}$ soit $=_\mathbb{R} \leq_B E$.

Une carte du monde.



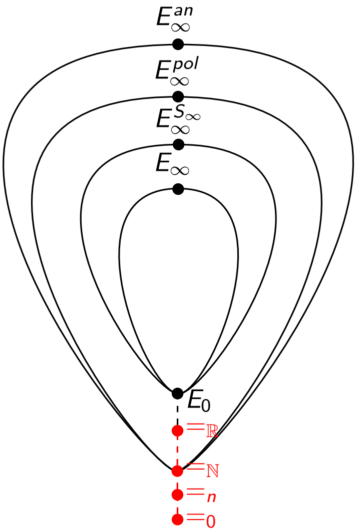
Définition

Si X est un ensemble, $=_X$ désigne la relation d'égalité sur X.

Théorème (Silver)

Soit E une relation d'équivalence borélienne. Alors soit $E \leq_B =_\mathbb{N}$ soit $=_\mathbb{R} \leq_B E$.

Une carte du monde.



Définition

E est concrètement classifiable ssi $E \leq_B =_\mathbb{R}$.

Définition

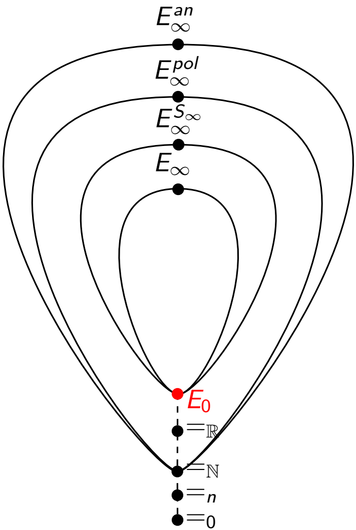
Sur $2^\mathbb{N}$ on définit E_0 par:

$$x\, E_0\, y \Leftrightarrow \exists n \forall m \geq n\ x(m) = y(m)$$

Théorème (Harrington-Kechris-Louveau)

Soit E une relation d'équivalence borélienne. Alors soit $E \leq_B =_\mathbb{R}$ soit $E_0 \leq_B E$.

Une carte du monde.



Définition

E est concrètement classifiable ssi $E \leq_B =_\mathbb{R}$.

Définition

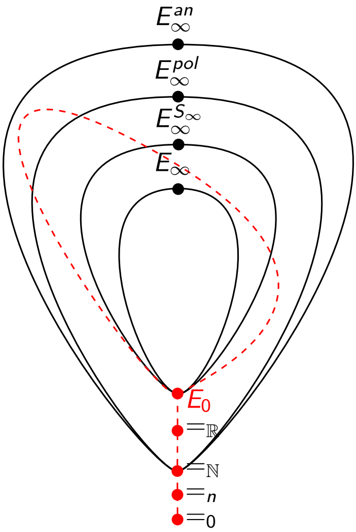
Sur $2^\mathbb{N}$ on définit E_0 par:

$$x\, E_0\, y \Leftrightarrow \exists n \forall m \geq n\ x(m) = y(m)$$

Théorème (Harrington-Kechris-Louveau)

Soit E une relation d'équivalence borélienne.
Alors soit $E \leq_B =_\mathbb{R}$ soit $E_0 \leq_B E$.

Une carte du monde.



Définition

E est concrètement classifiable ssi $E \leq_B =_\mathbb{R}$.

Définition

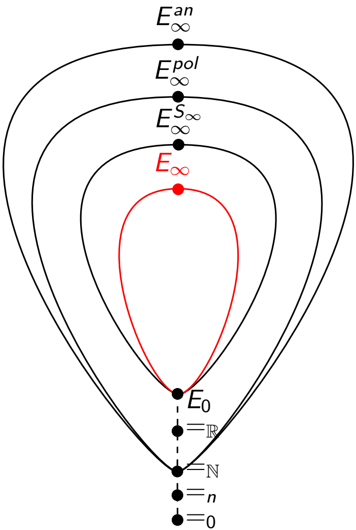
Sur $2^\mathbb{N}$ on définit E_0 par:

$$x \, E_0 \, y \Leftrightarrow \exists n \forall m \geq n \; x(m) = y(m)$$

Théorème (Harrington-Kechris-Louveau)

Soit E une relation d'équivalence borélienne.
Alors soit $E \leq_B =_\mathbb{R}$ soit $E_0 \leq_B E$.

Une carte du monde.



Définition

E est une relation d'équivalence dénombrable ssi toutes les E-classes sont au plus dénombrables.

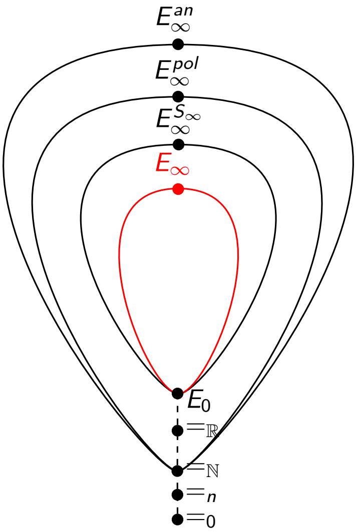
Théorème

Il existe une relation borélienne dénombrable universelle E_∞.

Exemple (Dougherty-Jackson-Kechris)

La relation induite par l'action par shift de F_2 sur 2^{F_2} est une relation borélienne dénombrable universelle.

Une carte du monde.



Définition

E est une relation d'équivalence dénombrable ssi toutes les E-classes sont au plus dénombrables.

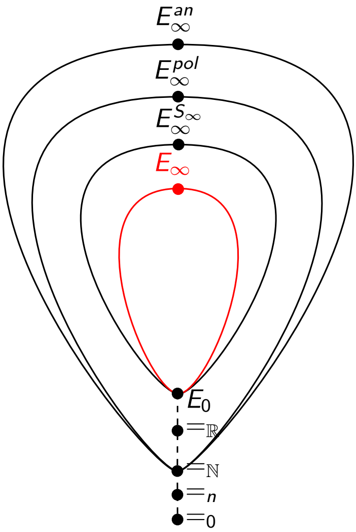
Théorème

Il existe une relation borélienne dénombrable universelle E_∞.

Exemple (Dougherty-Jackson-Kechris)

La relation induite par l'action par shift de F_2 sur 2^{F_2} est une relation borélienne dénombrable universelle.

Une carte du monde.



Définition

E est une relation d'équivalence dénombrable ssi toutes les E-classes sont au plus dénombrables.

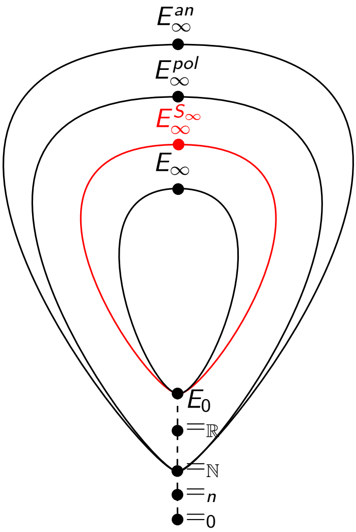
Théorème

Il existe une relation borélienne dénombrable universelle E_∞.

Exemple (Dougherty-Jackson-Kechris)

La relation induite par l'action par shift de F_2 sur 2^{F_2} est une relation borélienne dénombrable universelle.

Une carte du monde.



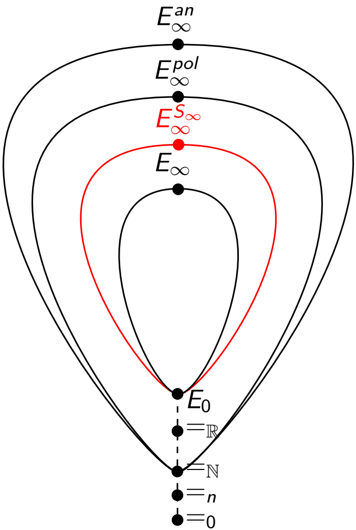
Théorème (Becker-Kechris)

Pour tout groupe polonais G il existe une relation universelle E_∞^G pour les G-relations boréliennes.
Si G est dénombrable, l'action par shift de G sur $(2^\mathbb{N})^G$ est $\sim_B$ à E_∞^G.

Exemple

La relation d'isomorphisme entre graphes (ou groupes) dénombrables est $\sim_B$ à $E_\infty^{S_\infty}$.

Une carte du monde.



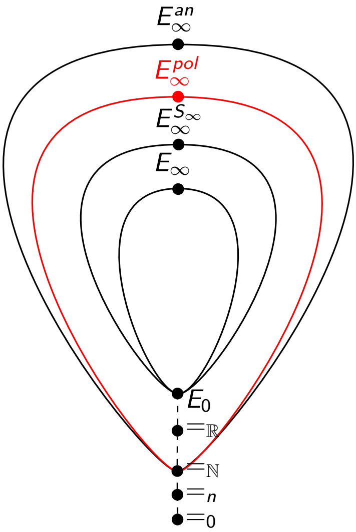
Théorème (Becker-Kechris)

Pour tout groupe polonais G il existe une relation universelle E_∞^G pour les G-relations boréliennes.
Si G est dénombrable, l'action par shift de G sur $(2^\mathbb{N})^G$ est $\sim_B$ à E_∞^G.

Exemple

La relation d'isomorphisme entre graphes (ou groupes) dénombrables est $\sim_B$ à $E_\infty^{S_\infty}$.

Une carte du monde.



Théorème (Becker-Kechris)

Il existe une relation universelle E_∞^{pol} pour les relations induites par une action borélienne de groupe polonais

Remarque

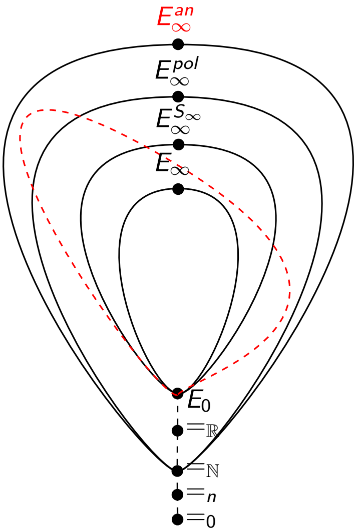
Toute relation borélienne ne se réduit pas à une telle relation; il n'y a d'ailleurs pas de relation borélienne universelle.

Par contre il existe une relation analytique universelle E_∞^{an}.

Exemple

La relation d'isométrie entre espaces métriques polonais est $\sim_b$ à E_∞^{pol} (Gao-Kechris); de même pour l'isométrie entre Banach séparables (M.).

Une carte du monde.



Théorème (Becker-Kechris)

Il existe une relation universelle E_∞^{pol} pour les relations induites par une action borélienne de groupe polonais

Remarque

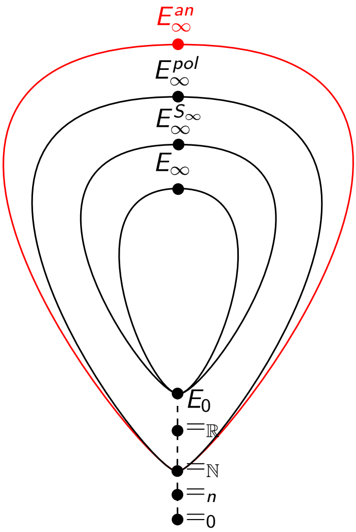
Toute relation borélienne ne se réduit pas à une telle relation; il n'y a d'ailleurs pas de relation borélienne universelle.

Par contre il existe une relation analytique universelle E_∞^{an}.

Exemple

La relation d'isométrie entre espaces métriques polonais est $\sim_b$ à E_∞^{pol} (Gao-Kechris); de même pour l'isométrie entre Banach séparables (M.).

Une carte du monde.



Théorème (Becker-Kechris)

Il existe une relation universelle E_∞^{pol} pour les relations induites par une action borélienne de groupe polonais

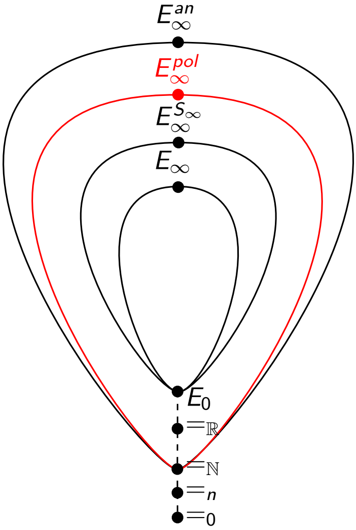
Remarque

Toute relation borélienne ne se réduit pas à une telle relation; il n'y a d'ailleurs pas de relation borélienne universelle.
Par contre il existe une relation analytique universelle E_∞^{an}.

Exemple

La relation d'isométrie entre espaces métriques polonais est $\sim_b$ à E_∞^{pol} (Gao-Kechris); de même pour l'isométrie entre Banach séparables (M.).

Une carte du monde.



Théorème (Becker-Kechris)

Il existe une relation universelle E_∞^{pol} pour les relations induites par une action borélienne de groupe polonais

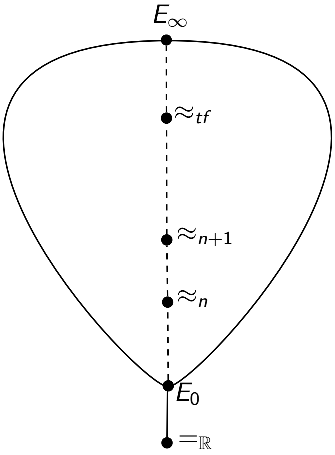
Remarque

Toute relation borélienne ne se réduit pas à une telle relation; il n'y a d'ailleurs pas de relation borélienne universelle.
Par contre il existe une relation analytique universelle E_∞^{an}.

Exemple

La relation d'isométrie entre espaces métriques polonais est $\sim_b$ à E_∞^{pol} (Gao-Kechris); de même pour l'isométrie entre Banach séparables (M.).

Relations d'équivalence dénombrables



Théorème (Feldman-Moore)

Toute relation d'équivalence borélienne dénombrable est induite par une action borélienne d'un groupe dénombrable G.

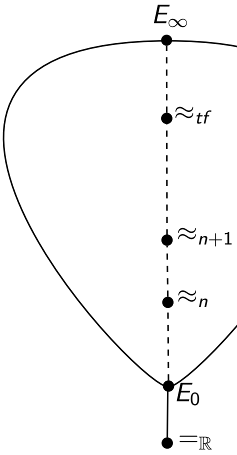
Théorème (Dougherty-Jackson-Kechris)

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable. Alors $E \leq_B E_0$ ssi E est une $\mathbb{Z}$-relation borélienne.

Exemple

La relation $\approx_n$ d'isomorphisme entre groupes abéliens sans torsion de rang n est borélienne dénombrable.

Relations d'équivalence dénombrables



Théorème (Feldman-Moore)

Toute relation d'équivalence borélienne dénombrable est induite par une action borélienne d'un groupe dénombrable G.

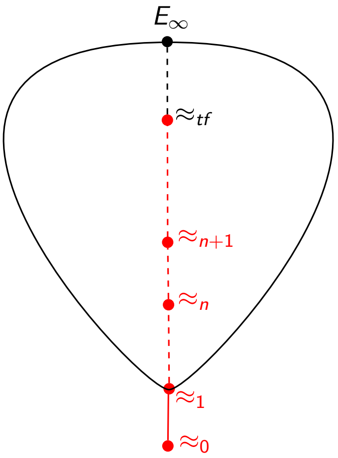
Théorème (Dougherty-Jackson-Kechris)

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable. Alors $E \leq_B E_0$ ssi E est une $\mathbb{Z}$-relation borélienne.

Exemple

La relation $\approx_n$ d'isomorphisme entre groupes abéliens sans torsion de rang n est borélienne dénombrable.

Relations d'équivalence dénombrables



Théorème (Feldman-Moore)

Toute relation d'équivalence borélienne dénombrable est induite par une action borélienne d'un groupe dénombrable G.

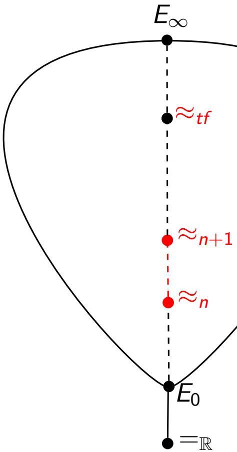
Théorème (Dougherty-Jackson-Kechris)

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable. Alors $E \leq_B E_0$ ssi E est une $\mathbb{Z}$-relation borélienne.

Exemple

La relation $\approx_n$ d'isomorphisme entre groupes abéliens sans torsion de rang n est borélienne dénombrable.

Relations d'équivalence dénombrables



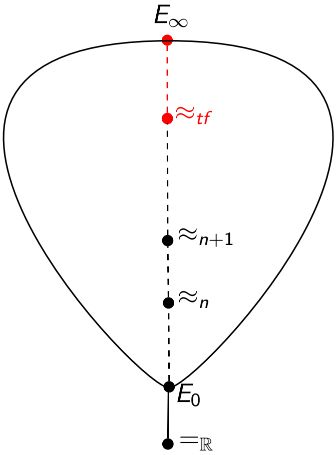
Théorème (Thomas)

Pour tout n on a $\approx_n <_B \approx_{n+1}$

Théorème (Thomas)

La relation $\approx_{tf}$ n'est pas universelle pour les relations boréliennes dénombrables.

Relations d'équivalence dénombrables



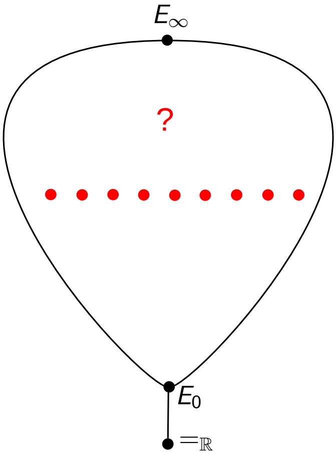
Théorème (Thomas)

Pour tout n on a $\approx_n <_B \approx_{n+1}$.

Théorème (Thomas)

La relation $\approx_{tf}$ n'est pas universelle pour les relations boréliennes dénombrables.

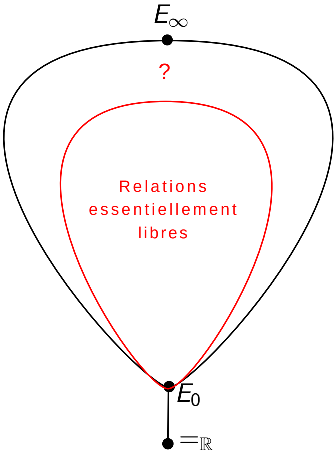
Relations d'équivalence dénombrables



Question.

Existe-t-il des relations boréliennes dénombrables incomparables pour $\leq$? Si oui, quelle est la cardinalité maximale d'une antichaîne?

Relations d'équivalence dénombrables



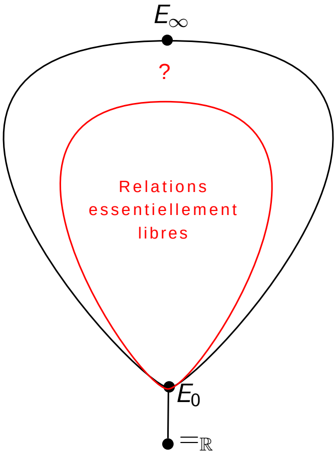
Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre ssi E est $\sim_B$ à une relation induite par une action borélienne d'un groupe dénombrable G.

Question.

Toute relation borélienne dénombrable est-elle essentiellement libre?

Relations d'équivalence dénombrables



Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre ssi E est $\sim_B$ à une relation induite par une action borélienne d'un groupe dénombrable G.

Question.

Toute relation borélienne dénombrable est-elle essentiellement libre?

Relations préservant une mesure

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable sur X. On dit que E préserve la mesure (borélienne) de probabilité μ si, pour un groupe dénombrable G induisant E, on a

$$\forall g \in G \, \forall A \subseteq X \text{ borélien } \quad \mu(g.A) = \mu(A) \; .$$

Remarque

Toute relation borélienne est $\sim_B$ à une relation préservant une mesure.

Exemple

L'action par shift de G sur sa partie libre $(2)^G$ préserve une mesure unique (la restriction de la mesure de Haar à $(2)^G$).

Cette mesure est donc G-ergodique.

Relations préservant une mesure

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable sur X. On dit que E préserve la mesure (borélienne) de probabilité μ si, pour un groupe dénombrable G induisant E, on a

$$\forall g \in G \, \forall A \subseteq X \text{ borélien } \; \mu(g.A) = \mu(A) \; .$$

Remarque

Toute relation borélienne est $\sim_B$ à une relation préservant une mesure.

Exemple

L'action par shift de G sur sa partie libre $(2)^G$ préserve une mesure unique (la restriction de la mesure de Haar à $(2)^G$).
Cette mesure est donc G-ergodique.

Relations préservant une mesure

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable sur X. On dit que E préserve la mesure (borélienne) de probabilité μ si, pour un groupe dénombrable G induisant E, on a

$$\forall g \in G \, \forall A \subseteq X \text{ borélien } \; \mu(g.A) = \mu(A) \; .$$

Remarque

Toute relation borélienne est $\sim_B$ à une relation préservant une mesure.

Exemple

L'action par shift de G sur sa partie libre $(2)^G$ préserve une mesure unique (la restriction de la mesure de Haar à $(2)^G$).
Cette mesure est donc G-ergodique.

Relations préservant une mesure

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable sur X. On dit que E préserve la mesure (borélienne) de probabilité μ si, pour un groupe dénombrable G induisant E, on a

$$\forall g \in G\, \forall A \subseteq X \text{ borélien } \ \mu(g.A) = \mu(A) \ .$$

Remarque

Toute relation borélienne est $\sim_B$ à une relation préservant une mesure.

Exemple

L'action par shift de G sur sa partie libre $(2)^G$ préserve une mesure unique (la restriction de la mesure de Haar à $(2)^G$).
Cette mesure est donc G-ergodique.

Actions par shift

Proposition

L'action de G sur $(2)^G$ est en fait fortement mélangeante, c'est-à-dire que pour tous A, B mesurables $\subset (2)^G$ on a

$$\lim_{g \to \infty} \mu((g.A) \cap B) = \mu(A)\mu(B) \ .$$

Question.

A quel point la relation S_G induite par l'action par shift de G sur $(2)^G$ se souvient-elle de G?

Remarque

Si $G \leq H$ alors $S_G \leq_B S_H$. Quand la réciproque est-elle vraie?

Actions par shift

Proposition

L'action de G sur $(2)^G$ est en fait fortement mélangeante, c'est-à-dire que pour tous A, B mesurables $\subset (2)^G$ on a

$$\lim_{g\to\infty} \mu((g.A)\cap B) = \mu(A)\mu(B)\ .$$

Question.

A quel point la relation S_G induite par l'action par shift de G sur $(2)^G$ se souvient-elle de G?

Remarque

Si $G \leq H$ alors $S_G \leq_B S_H$. Quand la réciproque est-elle vraie?

Actions par shift

Proposition

L'action de G sur $(2)^G$ est en fait fortement mélangeante, c'est-à-dire que pour tous A, B mesurables $\subset (2)^G$ on a

$$\lim_{g\to\infty} \mu((g.A)\cap B) = \mu(A)\mu(B)\ .$$

Question.

A quel point la relation S_G induite par l'action par shift de G sur $(2)^G$ se souvient-elle de G?

Remarque

Si $G \leq H$ alors $S_G \leq_B S_H$. Quand la réciproque est-elle vraie?

Actions par shift

Proposition

L'action de G sur $(2)^G$ est en fait fortement mélangeante, c'est-à-dire que pour tous A, B mesurables $\subset (2)^G$ on a

$$\lim_{g\to\infty} \mu((g.A)\cap B) = \mu(A)\mu(B)\ .$$

Question.

A quel point la relation S_G induite par l'action par shift de G sur $(2)^G$ se souvient-elle de G?

Remarque

Si $G \leq H$ alors $S_G \leq_B S_H$. Quand la réciproque est-elle vraie?

Morphsimes de relations déquivalence

Définition

Si E, F sont deux relations déquivalence sur les bor{eliens standard X, Y, on dit que $\rho \colon X \to Y$ est un morphisme de E dans F si on a

$$\forall x, y \in X \ \left(x\, E\, y \Rightarrow f(x)\, F\, f(y)\right)$$

Définition

Si E préserve une mesure μ et ρ est un morphisme de E dans F, on dit que ρ est μ-trivial s'il existe x_0 tel que l'on ait $f(x)\, F\, f(x_0)$ μ-presque partout.

Morphsimes de relations déquivalence

Définition

Si E, F sont deux relations déquivalence sur les bor{eliens standard X, Y, on dit que $\rho\colon X \to Y$ est un morphisme de E dans F si on a

$$\forall x, y \in X \ \big(x \, E \, y \Rightarrow f(x) \, F \, f(y)\big)$$

Définition

Si E préserve une mesure μ et ρ est un morphisme de E dans F, on dit que ρ est μ-trivial s'il existe x_0 tel que l'on ait $f(x) \, F \, f(x_0)$ μ-presque partout.

Morphsimes de relations déquivalence

Définition

Si E, F sont deux relations déquivalence sur les bor{eliens standard X, Y, on dit que $\rho\colon X \to Y$ est un morphisme de E dans F si on a

$$\forall x, y \in X \ \big(x \, E \, y \Rightarrow f(x) \, F \, f(y)\big)$$

Définition

Si E préserve une mesure μ et ρ est un morphisme de E dans F, on dit que ρ est μ-trivial s'il existe x_0 tel que l'on ait $f(x) \, F \, f(x_0)$ μ-presque partout.

Superrigidité et applications

Théorème (Thomas)

Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times S$, où S est un groupe dénombrable. Soit H un groupe dénombrable agissant librement et boréliennement sur un borélien standard Y. S'il existe un morphisme borélien non μ-trivial de S_G dans E_H^Y, alors il existe un plongement virtuel de G dans H.

Théorème (Adams-Kechris)

Il existe une injection croissante de l'ordre d'inclusion sur $2^{\mathbb{N}}$ dans l'ordre de réducibilité borélienne des relations boréliennes dénombrables.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Superrigidité et applications

Théorème (Thomas)

Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times S$, où S est un groupe dénombrable. Soit H un groupe dénombrable agissant librement et boréliennement sur un borélien standard Y. S'il existe un morphisme borélien non μ-trivial de S_G dans E_H^Y, alors il existe un plongement virtuel de G dans H.

Théorème (Adams-Kechris)

Il existe une injection croissante de l'ordre d'inclusion sur $2^{\mathbb{N}}$ dans l'ordre de réducibilité borélienne des relations boréliennes dénombrables.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Superrigidité et applications

Théorème (Thomas)

Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times S$, où S est un groupe dénombrable. Soit H un groupe dénombrable agissant librement et boréliennement sur un borélien standard Y. S'il existe un morphisme borélien non μ-trivial de S_G dans E_H^Y, alors il existe un plongement virtuel de G dans H.

Théorème (Adams-Kechris)

Il existe une injection croissante de l'ordre d'inclusion sur $2^{\mathbb{N}}$ dans l'ordre de réducibilité borélienne des relations boréliennes dénombrables.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Première Application: antichaînes

Preuve du théorème de Adams-Kechris (Thomas)

Pour tout nombre premier p on pose

$$A_p = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_p$$

Puis, pour tout ensemble C de nombres premiers,on définit .

- Soient alors deux ensembles C, D de nombres premiers; si S_{G_C} se réduit à S_{G_D} alors il existe un plongement virtuel de G_C dans G_D.
- Mais $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a un sous-groupe sans torsion d'indice fini; par conséquent pour tout p dans C le groupe $\mathbb{Z}_p$ se plonge dans $\oplus_{d \in D} A_d$, d'où $p \in D$.
- Finalement: s'il existe une réduction de S_{G_C} à S_{G_D} alors $C \subset D$; la réciproque est évidente. □

Première Application: antichaînes

Preuve du théorème de Adams-Kechris (Thomas)

Pour tout nombre premier p on pose

$$A_p = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_p$$

Puis, pour tout ensemble C de nombres premiers,on définit

$$G_C = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \left(\oplus_{p \in C} A_p \right)$$

.

- Soient alors deux ensembles C, D de nombres premiers; si S_{G_C} se réduit à S_{G_D} alors il existe un plongement virtuel de G_C dans G_D.
- Mais $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a un sous-groupe sans torsion d'indice fini; par conséquent pour tout p dans C le groupe $\mathbb{Z}_p$ se plonge dans $\oplus_{d \in D} A_d$, d'où $p \in D$.
- Finalement: s'il existe une réduction de S_{G_C} à S_{G_D} alors $C \subset D$; la réciproque est évidente. □

Première Application: antichaînes

Preuve du théorème de Adams-Kechris (Thomas)

Pour tout nombre premier p on pose

$$A_p = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_p$$

Puis, pour tout ensemble C de nombres premiers,on définit

$$G_C = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \left(\oplus_{p \in C} A_p \right)$$

.

- Soient alors deux ensembles C, D de nombres premiers; si S_{G_C} se réduit à S_{G_D} alors il existe un plongement virtuel de G_C dans G_D.
- Mais $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a un sous-groupe sans torsion d'indice fini; par conséquent pour tout p dans C le groupe $\mathbb{Z}_p$ se plonge dans $\oplus_{d \in D} A_d$, d'où $p \in D$.
- Finalement: s'il existe une réduction de S_{G_C} à S_{G_D} alors $C \subset D$; la réciproque est évidente. $\square$

Première Application: antichaînes

Preuve du théorème de Adams-Kechris (Thomas)

Pour tout nombre premier p on pose

$$A_p = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_p$$

Puis, pour tout ensemble C de nombres premiers,on définit

$$G_C = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \left(\oplus_{p \in C} A_p \right)$$

.

- Soient alors deux ensembles C, D de nombres premiers; si S_{G_C} se réduit à S_{G_D} alors il existe un plongement virtuel de G_C dans G_D.
- Mais $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a un sous-groupe sans torsion d'indice fini; par conséquent pour tout p dans C le groupe $\mathbb{Z}_p$ se plonge dans $\oplus_{d \in D} A_d$, d'où $p \in D$.
- Finalement: s'il existe une réduction de S_{G_C} à S_{G_D} alors $C \subset D$; la réciproque est évidente. $\square$

Première Application: antichaînes

Preuve du théorème de Adams-Kechris (Thomas)

Pour tout nombre premier p on pose

$$A_p = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_p$$

Puis, pour tout ensemble C de nombres premiers,on définit

$$G_C = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times \big(\oplus_{p \in C} A_p \big)$$

.

- Soient alors deux ensembles C, D de nombres premiers; si S_{G_C} se réduit à S_{G_D} alors il existe un plongement virtuel de G_C dans G_D.
- Mais $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a un sous-groupe sans torsion d'indice fini; par conséquent pour tout p dans C le groupe $\mathbb{Z}_p$ se plonge dans $\oplus_{d \in D} A_d$, d'où $p \in D$.
- Finalement: s'il existe une réduction de S_{G_C} à S_{G_D} alors $C \subset D$; la réciproque est évidente. $\square$

Deuxième application: relations non essentiellement libres.

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre si E se réduit à une relation induite par une action borélienne et libre d'un groupe dénombrable G.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Preuve

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable induite par une action borélienne libre du groupe G.

- Il existe un groupe H dénombrable qui ne se plonge pas dans G. Soit $L = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times (H * \mathbb{Z})$.
- $H * \mathbb{Z}$ n'a pas de sous-groupe distingué fini, donc il n'y a pas de plongement virtuel de L dans G.
- Par conséquent, S_L ne se réduit pas à E, ce qui montre que E ne peut pas être universelle. □

Deuxième application: relations non essentiellement libres.

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre si E se réduit à une relation induite par une action borélienne et libre d'un groupe dénombrable G.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Preuve

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable induite par une action borélienne libre du groupe G.

- Il existe un groupe H dénombrable qui ne se plonge pas dans G. Soit $L = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times (H * \mathbb{Z})$.
- $H * \mathbb{Z}$ n'a pas de sous-groupe distingué fini, donc il n'y a pas de plongement virtuel de L dans G.
- Par conséquent, S_L ne se réduit pas à E, ce qui montre que E ne peut pas être universelle. □

Deuxième application: relations non essentiellement libres.

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre si E se réduit à une relation induite par une action borélienne et libre d'un groupe dénombrable G.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Preuve

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable induite par une action borélienne libre du groupe G.

- Il existe un groupe H dénombrable qui ne se plonge pas dans G. Soit $L = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times (H * \mathbb{Z})$.
- $H * \mathbb{Z}$ n'a pas de sous-groupe distingué fini, donc il n'y a pas de plongement virtuel de L dans G.
- Par conséquent, S_L ne se réduit pas à E, ce qui montre que E ne peut pas être universelle. $\square$

Deuxième application: relations non essentiellement libres.

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre si E se réduit à une relation induite par une action borélienne et libre d'un groupe dénombrable G.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Preuve

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable induite par une action borélienne libre du groupe G.

- Il existe un groupe H dénombrable qui ne se plonge pas dans G. Soit $L = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times (H * \mathbb{Z})$.
- $H * \mathbb{Z}$ n'a pas de sous-groupe distingué fini, donc il n'y a pas de plongement virtuel de L dans G.
- Par conséquent, S_L ne se réduit pas à E, ce qui montre que E ne peut pas être universelle. □

Deuxième application: relations non essentiellement libres.

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre si E se réduit à une relation induite par une action borélienne et libre d'un groupe dénombrable G.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Preuve

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable induite par une action borélienne libre du groupe G.

- Il existe un groupe H dénombrable qui ne se plonge pas dans G. Soit $L = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times (H * \mathbb{Z})$.
- $H * \mathbb{Z}$ n'a pas de sous-groupe distingué fini, donc il n'y a pas de plongement virtuel de L dans G.
- Par conséquent, S_L ne se réduit pas à E, ce qui montre que E ne peut pas être universelle. □

Deuxième application: relations non essentiellement libres.

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est essentiellement libre si E se réduit à une relation induite par une action borélienne et libre d'un groupe dénombrable G.

Théorème (Thomas)

La relation borélienne dénombrable universelle E_∞ n'est pas essentiellement libre.

Preuve

Soit E une relation d'équivalence borélienne dénombrable induite par une action borélienne libre du groupe G.

- Il existe un groupe H dénombrable qui ne se plonge pas dans G. Soit $L = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times (H * \mathbb{Z})$.
- $H * \mathbb{Z}$ n'a pas de sous-groupe distingué fini, donc il n'y a pas de plongement virtuel de L dans G.
- Par conséquent, S_L ne se réduit pas à E, ce qui montre que E ne peut pas être universelle. $\square$

Cocyclesboréliens

Définition

Si G, H sont des groupes dénombrables et X est un G-ensemble, un cocycle est une application $\alpha\colon G \times X \to H$ vérifiant

$$\forall g, g' \in G \,\forall x \in X \;\; \alpha(g, g'.x)\alpha(g', x) = \alpha(gg', x)$$

Exemple

Si G agit sur X, H agit librement et $f\colon E_G \to E_H$ est un morphisme, on définit implicitement un cocycle $\alpha\colon G \times X \to H$ en posant

$$\alpha(g, x).f(x) = f(g.x)$$

Définition

Deux cocycles boréliens $\alpha, \beta\colon G \times X \to H$ sont équivalents s'il existe une fonction borélienne $b\colon X \to H$ telle que

$$\forall g, x \in X \;\; \beta(g, x) = b(g.x)\alpha(g, x)b(x)^{-1} \;.$$

Cocycles boréliens

Définition

Si G, H sont des groupes dénombrables et X est un G-ensemble, un cocycle est une application $\alpha\colon G \times X \to H$ vérifiant

$$\forall g, g' \in G\, \forall x \in X\ \alpha(g, g'.x)\alpha(g', x) = \alpha(gg', x)$$

Exemple

Si G agit sur X, H agit librement et $f\colon E_G \to E_H$ est un morphisme, on définit implicitement un cocycle $\alpha\colon G \times X \to H$ en posant

$$\alpha(g, x).f(x) = f(g.x)$$

Définition

Deux cocycles boréliens $\alpha, \beta\colon G \times X \to H$ sont équivalents s'il existe une fonction borélienne $b\colon X \to H$ telle que

$$\forall g, x \in X\ \beta(g, x) = b(g.x)\alpha(g, x)b(x)^{-1}.$$

Cocycles boréliens

Définition

Si G, H sont des groupes dénombrables et X est un G-ensemble, un cocycle est une application $\alpha\colon G \times X \to H$ vérifiant

$$\forall g, g' \in G\, \forall x \in X\ \alpha(g, g'.x)\alpha(g', x) = \alpha(gg', x)$$

Exemple

Si G agit sur X, H agit librement et $f\colon E_G \to E_H$ est un morphisme, on définit implicitement un cocycle $\alpha\colon G \times X \to H$ en posant

$$\alpha(g, x).f(x) = f(g.x)$$

Définition

Deux cocycles boréliens $\alpha, \beta\colon G \times X \to H$ sont équivalents s'il existe une fonction borélienne $b\colon X \to H$ telle que

$$\forall g, x \in X\ \beta(g, x) = b(g.x)\alpha(g, x)b(x)^{-1}\ .$$

Cocycles boréliens

Définition

Si G, H sont des groupes dénombrables et X est un G-ensemble, un cocycle est une application $\alpha\colon G \times X \to H$ vérifiant

$$\forall g, g' \in G\, \forall x \in X\ \alpha(g, g'.x)\alpha(g', x) = \alpha(gg', x)$$

Exemple

Si G agit sur X, H agit librement et $f\colon E_G \to E_H$ est un morphisme, on définit implicitement un cocycle $\alpha\colon G \times X \to H$ en posant

$$\alpha(g, x).f(x) = f(g.x)$$

Définition

Deux cocycles boréliens $\alpha, \beta\colon G \times X \to H$ sont équivalents s'il existe une fonction borélienne $b\colon X \to H$ telle que

$$\forall g, x \in X\ \beta(g, x) = b(g.x)\alpha(g, x)b(x)^{-1}\ .$$

Cocycles boréliens

Définition

Si G, H sont des groupes dénombrables et X est un G-ensemble, un cocycle est une application $\alpha\colon G \times X \to H$ vérifiant

$$\forall g, g' \in G \, \forall x \in X \ \alpha(g, g'.x)\alpha(g', x) = \alpha(gg', x)$$

Exemple

Si G agit sur X, H agit librement et $f\colon E_G \to E_H$ est un morphisme, on définit implicitement un cocycle $\alpha\colon G \times X \to H$ en posant

$$\alpha(g, x).f(x) = f(g.x)$$

Définition

Deux cocycles boréliens $\alpha, \beta\colon G \times X \to H$ sont équivalents s'il existe une fonction borélienne $b\colon X \to H$ telle que

$$\forall g, x \in X \ \beta(g, x) = b(g.x)\alpha(g, x)b(x)^{-1} \ .$$

Cocycles boréliens

Définition

Si G, H sont des groupes dénombrables et X est un G-ensemble, un cocycle est une application $\alpha\colon G \times X \to H$ vérifiant

$$\forall g, g' \in G\, \forall x \in X\;\; \alpha(g, g'.x)\alpha(g', x) = \alpha(gg', x)$$

Exemple

Si G agit sur X, H agit librement et $f\colon E_G \to E_H$ est un morphisme, on définit implicitement un cocycle $\alpha\colon G \times X \to H$ en posant

$$\alpha(g, x).f(x) = f(g.x)$$

Définition

Deux cocycles boréliens $\alpha, \beta\colon G \times X \to H$ sont équivalents s'il existe une fonction borélienne $b\colon X \to H$ telle que

$$\forall g, x \in X\;\; \beta(g, x) = b(g.x)\alpha(g, x)b(x)^{-1}\ .$$

Superrigidité de Popa.

Théorème (Popa)

Soit Γ un groupe infini avec la propriété (T) de Kazhdan, et G,H des groupes dénombrables.
On suppose que Γ est distingué dans G. Alors tout cocycle borélien $\alpha\colon G \times (2)^G \to H$ est μ-équivalent à un morphisme de G dans H.

Corollaire (Thomas)

Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times S$, où S est un groupe dénombrable. Soit H un groupe dénombrable agissant librement et boréliennement sur un borélien standard Y. S'il existe un morphisme borélien non μ-trivial de E_G dans E_H^Y, alors il existe un plongement virtuel de G dans H.

Superrigidité de Popa.

Théorème (Popa)

Soit Γ un groupe infini avec la propriété (T) de Kazhdan, et G,H des groupes dénombrables.
On suppose que Γ est distingué dans G. Alors tout cocycle borélien $\alpha\colon G \times (2)^G \to H$ est μ-équivalent à un morphisme de G dans H.

Corollaire (Thomas)

Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \times S$, où S est un groupe dénombrable. Soit H un groupe dénombrable agissant librement et boréliennement sur un borélien standard Y. S'il existe un morphisme borélien non μ-trivial de E_G dans E_H^Y, alors il existe un plongement virtuel de G dans H.

Preuve du corollaire

- Soit G, H comme dans l'énoncé et $f\colon S_G \to S_H$ un morphisme borélien non μ-trivial. Par rigidité, quitte à changer f, on peut supposer qu'on a un morphisme $\varphi\colon G \to H$ tel que $f(g.x) = \varphi(g).f(x)$.
- Si $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini, la preuve aussi; sinon, l'action de N sur $(2)^X$ est ergodique.
- Pour tout $g \in N$ on a $f(g.x) = f(x)$, i.e f est et donc constante μ-pp, ce qui est absurde.
- Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini et φ est un plongement virtuel de G dans H. $\square$

Preuve du corollaire

- Soit G, H comme dans l'énoncé et $f\colon S_G \to S_H$ un morphisme borélien non μ-trivial. Par rigidité, quitte à changer f, on peut supposer qu'on a un morphisme $\varphi\colon G \to H$ tel que $f(g.x) = \varphi(g).f(x)$.
- Si $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini, la preuve aussi; sinon, l'action de N sur $(2)^X$ est ergodique.
- Pour tout $g \in N$ on a $f(g.x) = f(x)$, i.e f est et donc constante μ-pp, ce qui est absurde.
- Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini et φ est un plongement virtuel de G dans H. $\square$

Preuve du corollaire

- Soit G, H comme dans l'énoncé et $f\colon S_G \to S_H$ un morphisme borélien non μ-trivial. Par rigidité, quitte à changer f, on peut supposer qu'on a un morphisme $\varphi\colon G \to H$ tel que $f(g.x) = \varphi(g).f(x)$.
- Si $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini, la preuve aussi; sinon, l'action de N sur $(2)^X$ est ergodique.
- Pour tout $g \in N$ on a $f(g.x) = f(x)$, i.e f est et donc constante μ-pp, ce qui est absurde.
- Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini et φ est un plongement virtuel de G dans H. $\square$

Preuve du corollaire

- Soit G, H comme dans l'énoncé et $f\colon S_G \to S_H$ un morphisme borélien non μ-trivial. Par rigidité, quitte à changer f, on peut supposer qu'on a un morphisme $\varphi\colon G \to H$ tel que $f(g.x) = \varphi(g).f(x)$.
- Si $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini, la preuve aussi; sinon, l'action de N sur $(2)^X$ est ergodique.
- Pour tout $g \in N$ on a $f(g.x) = f(x)$, i.e f est N-invariante et donc constante μ-pp, ce qui est absurde.
- Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini et φ est un plongement virtuel de G dans H. $\square$

Preuve du corollaire

- Soit G, H comme dans l'énoncé et $f\colon S_G \to S_H$ un morphisme borélien non μ-trivial. Par rigidité, quitte à changer f, on peut supposer qu'on a un morphisme $\varphi\colon G \to H$ tel que $f(g.x) = \varphi(g).f(x)$.
- Si $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini, la preuve aussi; sinon, l'action de N sur $(2)^X$ est ergodique.
- Pour tout $g \in N$ on a $f(g.x) = f(x)$, i.e f est N-invariante et donc constante μ-pp, ce qui est absurde.
- Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fini et φ est un plongement virtuel de G dans H. $\square$

Universalité faible et forte

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est faiblement universelle s'il existe une relation borélienne dénombrable F telle que $F \subset E$.

Question.

Existe-til une relation faiblement universelle mais non universelle?

Théorème (Adams)

Il existe deux relations boréliennes E, F telles que $E \subset F$ mais E, F sont incomparables pour $\leq_B$.

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable préservant une mesure μ. On dit que E est si la restriction de E à tout ensemble de mesure pleine est universelle.

Question.

Existe-il une relation fortement universelle?

Universalité faible et forte

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est faiblement universelle s'il existe une relation borélienne dénombrable F telle que $F \subset E$.

Question.

Existe-til une relation faiblement universelle mais non universelle?

Théorème (Adams)

Il existe deux relations boréliennes E, F telles que $E \subset F$ mais E, F sont incomparables pour $\leq_B$.

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable préservant une mesure μ. On dit que E est si la restriction de E à tout ensemble de mesure pleine est universelle.

Question.

Existe-il une relation fortement universelle?

Universalité faible et forte

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est faiblement universelle s'il existe une relation borélienne dénombrable F telle que $F \subset E$.

Question.

Existe-til une relation faiblement universelle mais non universelle?

Théorème (Adams)

Il existe deux relations boréliennes E, F telles que $E \subset F$ mais E, F sont incomparables pour $\leq_B$.

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable préservant une mesure μ. On dit que E est si la restriction de E à tout ensemble de mesure pleine est universelle.

Question.

Existe-il une relation fortement universelle?

Universalité faible et forte

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est faiblement universelle s'il existe une relation borélienne dénombrable F telle que $F \subset E$.

Question.

Existe-til une relation faiblement universelle mais non universelle?

Théorème (Adams)

Il existe deux relations boréliennes E, F telles que $E \subset F$ mais E, F sont incomparables pour $\leq_B$.

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable préservant une mesure μ. On dit que E est fortement universelle si la restriction de E à tout ensemble de mesure pleine est universelle.

Question.

Existe-il une relation fortement universelle?

Universalité faible et forte

Définition

Une relation borélienne dénombrable E est faiblement universelle s'il existe une relation borélienne dénombrable F telle que $F \subset E$.

Question.

Existe-til une relation faiblement universelle mais non universelle?

Théorème (Adams)

Il existe deux relations boréliennes E, F telles que $E \subset F$ mais E, F sont incomparables pour $\leq_B$.

Définition

Soit E une relation borélienne dénombrable préservant une mesure μ. On dit que E est fortement universelle si la restriction de E à tout ensemble de mesure pleine est universelle.

Question.

Existe-il une relation fortement universelle?