Algèbres de von Neumann et théorie ergodique des actions de groupes

Séminaire Tripode, ENS Lyon, Juin 2008.

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Stefaan Vaes

Sujet de l'exposé

1. Introduction aux
   - relations d'équivalence dénombrables,
   - algèbres de von Neumann,

   $\left.\right\}$ données par des groupes discrets et leurs actions sur un espace de probabilité

   - groupe fondamental des facteurs II_1 et relations d'équivalence, (sous-groupe de $\mathbb{R}_+$, terminologie 'cadeau' de von Neumann).
2. Théorèmes de rigidité de Popa.
3. Groupes fondamentaux non-dénombrables $\neq \mathbb{R}_+$.

Théorie mesurable des groupes

- **Transformations mesurables**
  - de l'intervalle $[0,1]$
    (ou un espace de probabilité standard (X,μ)),
  - préservant la mesure de Lebesgue,
  - inversible, bimesurable.
- **Actions de groupes dénombrables** par de telles transformations.

Exemples

- Action de $\mathbb{Z}$ sur le cercle S^1, par rotation d'angle α.

$$n \cdot z = \exp(in\alpha)z \quad \text{pour } z \in S^1,\, n \in \mathbb{Z}.$$

- Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^a z^b \\ y^c z^d \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } y, z \in S^1.$$

Actions ergodiques

$\leadsto$ Toutes les transformations sont bimesurables et préservent une mesure de probabilité.

Ergodicité : indécomposable ‘en somme de deux’.

Définition formelle de l’ergodicité

- La transf. T de (X,μ) est dite ergodique si tout sous-ensemble mesurable globalement T-invariant est de mesure 0 ou 1.
- L’action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est dite ergodique si tout sous-ensemble mesurable globalement Γ-invariant est de mesure 0 ou 1.

Exemples

- Rotation d’angle α est ergodique ssi $\alpha/2\pi$ est irrationnel.
- L’action $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^n$ est ergodique.
- Soit K un groupe compact et $\Gamma \subset K$ un sous-groupe dénombrable dense. Alors, $\Gamma \curvearrowright K$ est ergodique.

Trois points de vue différents

On suppose toujours : préservant la mesure, ergodique, libre : presque tout $x \in X$ a un stabilisateur trivial.

1. Une action libre ergodique préservant la mesure $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.
2. La relation d'équivalence orbitale sur X
$$x \sim y \quad \text{ssi} \quad \exists g \in \Gamma, x = g \cdot y.$$
3. L'algèbre de von Neumann $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$.

$\rightsquigarrow$ Trois degrés de précision, trois types d'isomorphismes :
1. conjugaison
2. équivalence orbitale
3. équivalence von Neumann.

Question centrale : de combien diffèrent ces points de vue ?

Conjugaison vs. équivalence orbitale

Les actions libres ergodiques $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$ sont dites

⤳ conjuguées, s'il existe

- une bijection $\Delta : X \to Y$ préservant la mesure,
- un isomorphisme de groupes $\delta : \Gamma \to \Lambda$

tels que $\Delta(g \cdot x) = \delta(g) \cdot \Delta(x)$ presque partout.

⤳ orbitalement équivalentes, s'il existe

- une bijection $\Delta : X \to Y$ préservant la mesure,

telle que $\Delta(\Gamma \cdot x) = \Lambda \cdot \Delta(x)$ presque partout.

Théorème surprenant

Toutes les actions libres ergodiques de tous les groupes suivants sont orbitalement équivalentes.

- Groupes abéliens (Dye, 1963).
- Groupes moyennables (Ornstein et Weiss, 1980).

  ↳ voir transparent suivant.

Représentation unitaire d'un groupe Γ :

$\pi : \Gamma \to$ opérateurs sur un espace de Hilbert

- $\pi(g)$ est un opérateur unitaire pour tout $g \in \Gamma$,
- $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ pour tout $g, h \in \Gamma$.

Représentation régulière de Γ :

$$\lambda : \Gamma \to \text{ opérateurs sur } \ell^2(\Gamma) \quad : \quad \lambda_g e_h = e_{gh}$$

où $(e_g)_{g\in\Gamma}$ est la base orthonormale canonique de $\ell^2(\Gamma)$.

Vecteurs presque-invariants d'une représentation unitaire π :

Suite ξ_n de vecteurs de norme 1 vérifiant

$$\|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \to 0 \quad \text{pour tout } g \in \Gamma .$$

Exemple. La représentation régulière de $\mathbb{Z}$ a

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\chi_{[-n,n]}$$

comme suite de vecteurs presque-invariants.

Moyennabilité vs. propriété (T)

Définition

Un groupe dénombrable Γ

- est dit moyennable si sa représentation régulière admet une suite de vecteurs presque-invariants.
- a la propriété (T) de Kazhdan si toute représentation unitaire ayant une suite de vecteurs presque-invariants, doit avoir un vecteur invariant non-nul.

$\rightsquigarrow$ moyennable et propriété (T) = groupe fini.

Groupes moyennables :

- groupes abéliens, groupes résolubles,
- stable par extension/sous-groupe/limite directe, mais il y en a plus.

Groupes avec la propriété (T) :

- $SL(n, \mathbb{Z})$ pour $n \geq 3$, réseau d'un groupe de Lie simple de rang ≥ 2,
- certains groupes aléatoires à la Gromov.

Théorème de superrigidité orbitale de Popa

Rappel : toutes les actions libres ergodiques de tous les groupes moyennables sont orbitalement équivalentes.

Construction de l'action Bernoulli de Γ

Espace de probabilité $(X, \mu) = [0,1]^\Gamma$ avec mesure produit,

Action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ par décalage $(g \cdot x)_h = x_{g^{-1}h}$.

Théorème (Popa, 2005)

Soit Γ un groupe avec la propriété (T) (et sans sous-groupe fini distingué).

Si l'action Bernoulli $\Gamma \curvearrowright X = [0,1]^\Gamma$ est orbitalement équivalente avec l'action libre ergodique $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$, alors $\Gamma \cong \Lambda$ et les actions sont conjuguées.

$\rightsquigarrow$ La relation d'équivalence orbitale se souvient entièrement du groupe et de son action.

Un peu plus sur la rigidité orbitale

Survol très rapide :

- Travail fondateur de Zimmer (1980) :
  p.ex. les groupes $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ n'admettent pas d'actions orbitalement équivalentes pour des valeurs différentes de n.
- Superrigidité de Furman (1999) :
  p.ex. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^n$, n impaire, vérifie la superrigidité orbitale.
- Coût et invariants ℓ^2 de Gaboriau (1999-2001) :
  p.ex. les groupes libres $\mathbb{F}_n$ n'admettent pas d'actions orbitalement équivalentes pour des valeurs différentes de n.
- Beaucoup plus : Monod-Shalom, Kida, Ioana, ...

$\leadsto$ Mais c'est grand temps de se tourner vers les algèbres de von Neumann.

Algèbres de von Neumann

Les exemples inintéressants : $M_n(\mathbb{C})$, $B(H)$, $L^\infty(X)$.

$\leadsto$ Topologie faible sur $B(H)$ induite par $T \mapsto \langle \xi, T\eta \rangle$.

Algèbre de von Neumann d'un groupe

Soit Γ un groupe dénombrable et $g \mapsto \lambda_g$ sa rep. régulière sur $\ell^2(\Gamma)$.

- $\operatorname{span}\{\lambda_g \mid g \in \Gamma\}$ est l'algèbre de groupe, notée $\mathbb{C}\Gamma$.
- Définir $\mathcal{L}(\Gamma)$ comme l'adhérence faible de $\mathbb{C}\Gamma$.

Définition : une algèbre de von Neumann est une sous-algèbre involutive faiblement fermée de $B(H)$.

Problème extrêmement difficile : quand $\mathcal{L}(\Gamma) \cong \mathcal{L}(\Lambda)$?

- (Connes, 1975)
  Tous les $\mathcal{L}(\Gamma)$ pour Γ moyennable et ICC, sont isomorphes.
- (Problème ouvert) Est-ce que $\mathcal{L}(\mathbb{F}_n) \cong \mathcal{L}(\mathbb{F}_m)$?
- (Conjecture de Connes)
  Si Γ a la propriété (T) et $\mathcal{L}(\Gamma) \cong \mathcal{L}(\Lambda)$, alors $\Gamma \cong \Lambda$ (virtuellement).

Facteurs de type II_1

Facteur M : algèbre de vN. indécomposable 'en somme de deux'.

$\rightsquigarrow$ Condition équivalente : le centre de M est trivial.

$\rightsquigarrow$ Remplace l'hypothèse de l'ergodicité.

Trace sur M : $\tau : M \to \mathbb{C}, \quad \tau(1) = 1, \quad \tau(xy) = \tau(yx).$

$\rightsquigarrow$ Remplace l'hypothèse 'préservant la mesure de proba.'

Définition

Un facteur de type II_1 est un facteur qui admet une trace τ, mais qui est non-isomorphe à $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemple : $\mathcal{L}(\Gamma)$ admet toujours une trace, donnée par $\tau(\lambda_g) = \delta_{g,e}$, et est factoriel ssi Γ a des classes de conjugaison infinies (ICC).

Crucial pour nous :

Pour $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ libre ergodique, on construit le facteur II_1 $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$.

(Le group-measure-space-construction de Murray et von Neumann)

Group-measure-space-construction (M-vN 1943)

Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ une action libre ergodique préservant μ.

Le facteur II_1 noté $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ est engendré par

- la sous-algèbre $\mathrm{L}^\infty(X)$,
- la sous-algèbre $\mathcal{L}(\Gamma) \ni \lambda_g$,

et, pour $F \in \mathrm{L}^\infty(X)$ et $g \in \Gamma$, $\quad \lambda_g^* F \lambda_g = F_g$ où $F_g(x) = F(g \cdot x)$.

$\rightsquigarrow$ Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\eta)$. Nous étudions
Relation d'équiv. orbitale vs. algèbre de von Neumann.

Théorème (Singer 1955, Feldman-Moore 1977)

Un isomorphisme $\mathrm{L}^\infty(X) \to \mathrm{L}^\infty(Y) : F \mapsto F \circ \Delta^{-1}$
s'étend en isomorphisme $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma \to \mathrm{L}^\infty(Y) \rtimes \Lambda$
ssi Δ est une équivalence orbitale (c-à-d, $\Delta(\Gamma \cdot x) = \Lambda \cdot \Delta(x)$ p.p.).

$\rightsquigarrow$ Équivalence orbitale = isomorphisme $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma \cong \mathrm{L}^\infty(Y) \rtimes \Lambda$
envoyant $\mathrm{L}^\infty(X)$ sur $\mathrm{L}^\infty(Y)$.

Distinguer des facteurs de type II_1

Extrêmement difficile à démontrer que deux facteurs II_1 sont non-isomorphes.

$\rightsquigarrow$ Tous les $\mathcal{L}(\Lambda)$ avec Λ moyennable ICC et tous les $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ avec Γ moyennable et $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ action libre ergodique, sont isomorphes.

Première idée : trouver des invariants ! Murray et von Neumann :

- un invariant qualitatif : propriété (Γ),
- un invariant quantitatif : groupe fondamental

$$\mathcal{F}(M) := \{\tau(p)/\tau(q) \mid pMp \cong qMq\} .$$

$\rightsquigarrow$ Murray et von Neumann démontraient en 1943 que $\mathcal{L}(S_\infty) \not\cong \mathcal{L}(\mathbb{F}_2)$, et ... c'était tout, jusqu'aux années 1960.

Aujourd'hui : les facteurs II_1 sont non-classifiables dans tous les sens du mot !

Théorème de rigidité de Popa

Théorème (Popa, 2005)

Soit Γ un groupe avec la propriété (T) et $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ libre ergodique.

Soit Λ un groupe ICC et $\Lambda \curvearrowright (Y,\eta) = [0,1]^\Lambda$ l'action Bernoulli.

Si $L^\infty(X) \rtimes \Gamma \;\cong\; L^\infty(Y) \rtimes \Lambda$, alors

les groupes Γ et Λ sont isomorphes et leurs actions conjuguées.

- Premier théorème dans la littérature déduisant conjugaison de l'isomorphisme des algèbres de von Neumann.
- Les hypothèses sont asymétriques. Il n'existe pour le moment pas de théorème de superrigidité von Neumann.
- Il suffit que Γ admet un sous-groupe infini distingué avec la propriété (T) relative,

  p.ex. $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}) \times G$ où G est un groupe discret **arbitraire.**

- Pour un facteur II_1 : $\mathcal{F}(M) = \{\tau(p)/\tau(q) \mid pMp \cong qMq\}$.
- Pour une rel. équiv. II_1 : $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \{\mu(\mathcal{U})/\mu(\mathcal{V}) \mid \mathcal{R}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{R}|_{\mathcal{V}}\}$.

  (P.ex. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$, la relation orbitale de $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$.)

Pour $\mathcal{R}$ et M donnés par $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ libre ergodique : $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{F}(M)$.

1. On a $\mathcal{F}(\mathcal{L}(S_\infty)) = \mathbb{R}_+$. (Murray, von Neumann, 1943)
2. Si Γ est ICC propriété (T), $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\Gamma))$ est dénombrable. (Connes, 1980)
3. Toujours $\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \curvearrowright X)) = \{1\}$, pour $n \geq 3$. (Gefter-Golodets, 1987)
4. Toujours $\mathcal{F}(\mathcal{R}(\mathbb{F}_n \curvearrowright X)) = \{1\}$, pour $n < \infty$. (Gaboriau, 2001)
5. On a $\mathcal{F}(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^2) \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \{1\}$. (Popa, 2001)
6. Tous les sous-groupes dénombrables de $\mathbb{R}_+$ apparaissent comme $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, $\mathcal{F}(M)$. (Popa, 2003)

   $\rightsquigarrow$ Ces M et $\mathcal{R}$ ne sont pas donnés par une action libre ergodique.

Groupes fondamentaux non-dénombrables

Q. :
- Est-ce que $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ peut être non-dénombrable, $\neq \mathbb{R}_+$?
- Soit M, $\mathcal{R}$ donnés par $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ libre ergodique. Peut-on avoir $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ différent de $\mathbb{R}_+$ et non-inclus dans $\mathbb{Q}_+$?

Théorème (Popa - V, 2008)

Si $H \subset \mathbb{R}$ appartient à une grande classe $\mathcal{S}$, il existe un nombre non-dénombrable d'actions libres ergodiques $\sigma_i : \mathbb{F}_\infty \curvearrowright (X_i, \mu_i)$ t.q.

- $\mathcal{R}(\mathbb{F}_\infty \curvearrowright X_i)$ et $\mathrm{L}^\infty(X_i) \rtimes \mathbb{F}_\infty$ ont groupe fondamental $\exp(H)$,
- les $\mathrm{L}^\infty(X_i) \rtimes_{\sigma_i} \mathbb{F}_\infty$ sont non-isomorphes pour des i différents.

La grande classe $\mathcal{S}$ inclut

- tous les sous-groupes dénombrables de $\mathbb{R}$,
- des sous-groupes de $\mathbb{R}$ avec une dim. de Hausdorff préscrite,
- Certains $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \|\alpha_n x\| < \infty \right\}$, où $\|x\| = \mathrm{d}(x, \mathbb{Z})$.

Mesures ergodiques et remarques sur $\mathcal{F}(M)$

Définition (Aaronson, Nadkarni, 1987)

Une mesure ergodique ν sur $\mathbb{R}$ est une mesure σ-finie sur les boréliens de $\mathbb{R}$ t.q.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $\nu \circ \lambda_x = \nu$, soit $\nu \circ \lambda_x \perp \nu$,
- $\exists\ Q \subset \mathbb{R}$ dénombrable, préservant ν, t.q. toute fonction borélienne Q-invariante est ν-p.p. constante.

Définir $H_\nu = \{x \in \mathbb{R} \mid \nu \circ \lambda_x = \nu\}$.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{S} = \{H_\nu \mid \nu$ est une mesure ergodique sur $\mathbb{R}\}$

Remarques.

- Certains $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \|\alpha_n x\| < \infty\right\}$ sont dans $\mathcal{S}$.
- Certains de ces certains ont une dimension de Hausdorff calculable et qui peut être arbitraire dans $(0,1)$.

Construction des actions de $\mathbb{F}_\infty$

Démarche :

- $\mathbb{F}_\infty \curvearrowright (X,\mu)$, libre, préservant la mesure de probabilité,
- $\mathbb{F}_\infty \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Lambda \curvearrowright (Y,\eta)$, libre ergodique, préservant mesure infinie.
- Action diagonale : $\mathbb{F}_\infty \curvearrowright X \times Y : \; g \cdot (x,y) = (g\cdot x, \pi(g)\cdot y)$

Sous les bonnes hypothèses :

- Si $\Delta \in \mathrm{Aut}(X \times Y)$ et $\Delta(\mathbb{F}_\infty \cdot (x,y)) = \mathbb{F}_\infty \cdot \Delta(x,y)$, alors

$$\Delta(x,y) \in \mathbb{F}_\infty \cdot (x, \Delta_0(y)) \; ,$$

  où $\Delta_0 \in \mathrm{Aut}(Y)$ commute avec l'action de Λ.
- La restriction de $\mathcal{R}(\mathbb{F}_\infty \curvearrowright X \times Y)$ à $Z \subset X \times Y$ de mesure 1, est de la forme $\mathcal{R}(\mathbb{F}_\infty \curvearrowright Z)$: relation d'équivalence arborable de coût infini ; appliquer le théorème de Hjorth.

Conclusion : exemples avec groupe fondamental $\mathrm{mod}(\mathrm{Centr}_\Lambda(Y))$:

tout automorphisme Δ_0 de Y, centralisant Λ, échelle la mesure infinie η et on note par $\mathrm{mod}(\Delta_0)$ le facteur d'échelle.

Quelles sont les bonnes hypothèses

Écrire $\Gamma_1 = \mathbb{F}_\infty = \Gamma_2$ et $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$.

Conditions sur $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.

- $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ libre, préservant mesure de probabilité
- $\Gamma_1 \curvearrowright X$ ergodique rigide, p.ex. se restreint à $\mathbb{F}_2 \subset SL(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^2$.

⚠ **Absence forte de symétrie :** si $\Psi : X \to X$ et $\Psi(\Gamma_1 \cdot x) \subset \Gamma \cdot \Psi(x)$ presque partout, alors $\Psi(x) \in \Gamma \cdot x$ p.p. Propriété générique.

Conditions sur $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$: Λ moyennable, $\Lambda \curvearrowright Y$ libre ergodique.

Si $\Delta \in \mathrm{Aut}(X \times Y)$ préserve les Γ-orbites, $\Delta(x, y) \in \Gamma \cdot (x, \Delta_0(y))$.

1. Moyennabilité vs. rigidité implique que $p_X \circ \Delta : X \times Y \to X$ ne dépend pas de Y. Ceci veut dire que $\Delta(x, y) = (\Psi(x), \cdots)$.
2. À cause de ⚠, $\Psi(x) \in \Gamma \cdot x$ p.p. On peut supposer $\Psi(x) = x$
3. Mais alors, $\Delta(x, y) = (x, \Delta_0(y))$, où $\Delta_0 \in \mathrm{Aut}(Y)$ commute à l'action de Λ.

Centralisateurs d'actions de groupes moyennables

Soit ν une mesure ergodique sur $\mathbb{R}$. Construire $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$ avec Λ moyennable et $\mathrm{mod}(\mathrm{Centr}_\Lambda(Y)) = \exp(H_\nu)$.

Rappel : la mesure ν est Q-ergodique pour $Q \subset \mathbb{R}$ dénombrable.

Construction élémentaire :

- Soit $\Lambda = \bigoplus_{t \in Q} \Big(\big(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \big)^{(\mathbb{Z})} \rtimes \mathbb{Z} \Big)$.
- Λ agit non-singulièrement sur l'espace de probabilité
$$(Y_0, \eta_0) = \prod_{t \in Q} \Big(\{0,1\}, \frac{1}{1+\exp(t)} \delta_0 + \frac{1}{1+\exp(-t)} \delta_1 \Big)^{\mathbb{Z}}.$$
- Soit $d\tilde{\nu}(t) = \exp(-t) d\nu(t)$. En utilisant le cocycle de Radon-Nikodym, on obtient une action de Γ sur $(Y, \eta) = (Y_0 \times \mathbb{R}, \eta_0, \tilde{\nu})$, préservant la mesure $\eta_0 \times \tilde{\nu}$.

Construction plus élaborée (Aaronson, Nadkarni, 1987) :

On peut avoir $\mathrm{mod}(\mathrm{Centr}_{\mathbb{Z}}(Y)) = \exp(H_\nu)$.

Quelles sont les possibilités pour $\mathcal{F}(M)$?

$\{\, H_\nu \mid \nu$ est une mesure ergodique $\}$

$\subset_1 \ \{\, \mathrm{mod}(\mathrm{Centr}_\Lambda(Y)) \mid \Lambda$ moyennable, $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$ libre, erg., p.m.$\}$

$\subset_2 \ \{\, \mathcal{F}(\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \mathbb{F}_\infty) \mid \mathbb{F}_\infty \curvearrowright (X, \mu)$ libre, erg., p.m.p. $\}$

$\subset_3 \ \{\, \mathcal{F}(M) \mid M$ facteur II_1 séparable $\}$

$\subset_4^{??} \ \{\, H \subset \mathbb{R} \mid H$ est σ-compact $\}$

$\subset_5 \ \{\, H \subset \mathbb{R} \mid H$ sous-groupe borélien polonisable $\}$

Conjectures (où pures suppositions)

- Les inclusions $\subset_{1,2}$ sont strictes.
- L'inclusion $\subset_3$ est une égalité.
- Aucune idée si l'inclusion $\subset_4$ est vraie.
- L'inclusion $\subset_5$ est stricte.

$\rightsquigarrow$ Pour le moment, il n'y a même pas de caractérisation conjecturale de $\{\, \mathcal{F}(M) \mid M$ est un facteur II_1 séparable $\}$.