

Ex. 2 . Hyp. de récurrence : tout groupe d'ordre p^{n-1} admet des ss-groupes distingués d'ordre $1, p, \dots, p^{n-1}$

- G admet un ss-groupe d'ordre p (par Cauchy) : H
 H est cyclique et c'est l'unique ss-gr. d'ordre p ce qui implique qu'il est distingué

on pose $G' = G/H$ qui est d'ordre p^{n-1} $\cong G/N$

Soient K_j , $j=0, \dots, n-1$ des ss-gr. distingués de G' .

Soit $j \in \{0, \dots, n-1\}$ et $N = \pi^{-1}(K_j)$

- $\pi|_N : N \rightarrow G'$

Soient $x, y \in N$. on a : $\pi(x), \pi(y) \in K_j$

Donc $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \in K_j$ donc $xy \in N$
 et $(\pi(x))^{-1} \in K_j$ donc $\pi(x^{-1}) \in K_j$ et $x^{-1} \in N$.

- $\pi|_N : N \rightarrow K_j$ distingué dans G

soit $g \in G$ et $x \in N$ ($\pi(x) \in K_j$)

$$\pi(g x g^{-1}) = \pi(g) \underbrace{\pi(x)}_{\in K_j} (\pi(g))^{-1} \in K_j$$

donc $g x g^{-1} \in N$.

- $\pi^{-1}(K_j) \xrightarrow{\pi|_{\pi^{-1}(K_j)}} K_j$ (surj.)

et son ker est $\pi^{-1}(K_j) \cap H$

$$\text{d'où } \pi^{-1}(K_j) / \pi^{-1}(K_j) \cap H \cong K_j$$

$$\text{d'où } |\pi^{-1}(K_j)| = |K_j| \times |\underbrace{\pi^{-1}(K_j) \cap H}_{\text{ss-groupe de } H \text{ non trivial donc } = H}|$$

Si on avait $|\pi^{-1}(K_j) \cap H| = 1$

alors $N \cong K_j$ et $|N| = p^j$

$$\text{Mais } N = \bigsqcup_{a \in K_j} \pi^{-1}(a) \text{ et } |\pi^{-1}(a)| \geq p$$

$$\text{donc } |N| \geq p^j \times p = p^{j+1}$$

Finalement $|N| = p^{j+1}$

$$(b) |G| = p^n \times m \quad p \nmid m.$$

$\hookrightarrow H$: un p -Sylow (d'ordre p^n)

et on applique la question (a) dans H

Ex. 3

$$(a) \text{Aut}(D_8) \cdot r = \{ \varphi(r) \mid \varphi \in \text{Aut}(D_8) \}$$

$$\bullet \varphi(r) \text{ est d'ordre } 4 = \text{ord}(r)$$

$$\text{donc } \varphi(r) \in \{ r, r^3 = r^{-1} \}$$

$$\bullet \text{Aut}(D_8) \cdot s = \text{l'orbite de } s \text{ par l'action de } \text{Aut}(D_8)$$

$$|\text{Aut}(D_8) \cdot s| \mid 8 \text{ mais } |\text{Aut}(D_8) \cdot s| \neq 8 \text{ car si } \varphi \in \text{Aut}(D_8) \text{ alors}$$

$$\varphi(s) \text{ est d'ordre } 2 \text{ et donc } \varphi(s) \neq r \text{ donc } |\text{Aut}(D_8) \cdot s| \leq 7$$

$$\text{Dm} \leq 4$$

Un $\varphi \in \text{Aut}(D_8)$ est entièrement déterminé par la donnée de $\varphi(r)$ et $\varphi(s)$.

On sait que $\varphi(r)$ a au plus 2 valeurs possibles et $\varphi(s)$ en a au plus 4 ce qui donne au plus 8 possibilités de définir $(\varphi(r), \varphi(s))$.

$$\text{D'où } |\text{Aut}(D_8)| \leq 8.$$

(b) Rappel: Soit G engendré par r et s t_q $\text{ord}(r) = n$
 $\text{ord}(s) = 2$
Alors $s r s^{-1} = r^{-1}$
 $G \simeq D_{2n}.$

$$(1) D_{16} = \langle r, s \rangle \text{ où } r = (1 \ 2 \ \dots \ 8) \text{ et } s = (2 \ n)(3 \ n-1) \dots$$

$$\text{on a : } \text{ord}(r^2) = n, \text{ord}(s) = 2 \text{ et}$$

$$s r^2 s^{-1} = s r s^{-1} s r s^{-1} = (r^{-1})^2 = (r^2)^{-1}$$

Par le rappel ci-dessus le ss-groupe $\langle r^2, s \rangle$ de D_{16} est isomorphe à D_8 .

De plus $D_8 \triangleleft D_{16}$: soit $g = s^j r^k$ ($j \in \{0, 1\}, k \in \{0, \dots, 15\}$)

et $h = s^l (r^2)^m$ ($l \in \{0, 1\}, m \in \{0, \dots, 7\}$)

$$g h g^{-1} = s^j r^k s^l r^{2m} r^{-k} s^j \quad (\text{avec } s r = r^{-1} s)$$

$$\text{Si } j=0 : g h g^{-1} = r^k s^l r^{2m-k}$$

$$\cdot l=0 : g h g^{-1} = r^{2m} \in D_8$$

$$\cdot l=1 : g h g^{-1} = s r^{-k} r^{2m-k} = s (r^2)^{m-k} \in D_8$$

$$\text{Si } j=1 : g h g^{-1} = s r^k s^l r^{2m-k} s$$

$$\cdot l=0 : g h g^{-1} = s (r^2)^{m-k} s \in D_8$$

$$\cdot l=1 : g h g^{-1} = s r^k s r^{2m-k} s \\ = s^2 r^{-k} r^{2m-k} s = (r^2)^{m-k} s \in D_8$$

(2) Notons $G = D_{16}$ et $H = \langle r^2, s \rangle \cong D_8$

Montrons que $|C_G(H)| \leq 2$.

Soit $g = s^j r^k \in C_G(H)$; $j=0, 1$ et $k=0, \dots, 7$

$$g s g^{-1} = s \Leftrightarrow s^j r^k s r^{-k} s^j = s \quad \times s^j \text{ et } s^j \times$$

$$\Leftrightarrow r^k s r^{-k} = s$$

$$\Leftrightarrow r^{2k} = \text{Id} \quad \text{or} \quad \text{ord}(r) = 8$$

$$\text{d'où } 2k = * \times 8 \quad \text{ie } k = * \cdot 4$$

$$\text{d'où } k = 0 \text{ ou } 4$$

$$\text{et } g r^2 g^{-1} = r^2 \Leftrightarrow s^j r^k r^2 r^{-k} s^j = r^2$$

$$\Leftrightarrow s^j r^2 s^j = r^2$$

$$\cdot \text{ok si } j=0$$

$$\cdot \text{si } j=1 : s r^2 s = r^2 \Leftrightarrow s^2 r^{-2} = r^2 \\ \Leftrightarrow r^4 = \text{Id} \quad \text{Absurde}$$

Donc si $g = s^j r^k \in C_G(H)$ alors $s=0$ et $k \in \{0, 4\}$

$$\text{Donc } C_{D_{16}}(H) \subseteq \{\text{id}, r^4\}$$

(3) Soit $\varphi: D_{16} \longrightarrow \text{Aut}(H)$ morphisme

$$g \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad} & H \\ h & \longmapsto & ghg^{-1} \end{array} \right)$$

on a: $\ker(\varphi) = \{ g \in G \mid \forall h \in H, ghg^{-1} = h \} = C_G(H)$

Donc $|\ker(\varphi)| \leq 2$ ie $|\ker(\varphi)| \in \{1, 2\}$

$|\ker(\varphi)| \neq 1$ car sinon: $D_{16} \cong \text{Im}(\varphi) < \text{Aut}(H)$

or $|\text{Aut}(H)| \leq 8$ Absurde

Donc $|\ker(\varphi)| = 2$ et on a :

$D_{16}/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$ de card 8

Or $|\text{Aut}(H)| \leq 8$ d'où $\text{Im}(\varphi) = \text{Aut}(H)$

Finalement: $D_{16}/\ker(\varphi) \cong \text{Aut}(H) \cong \text{Aut}(D_8)$

- Remarquons que $\ker(\varphi) = \{ \text{Id}, r^4 \}$
 (car on sait que $|\ker(\varphi)| = 2$ et le seul élément non-trivial de $\ker(\varphi)$ est (si il existe) r^4)

(4) Montrons pour finir que: $D_{16}/\ker(\varphi) \cong D_8$

Soit $\pi: D_{16} \longrightarrow D_{16}/\ker(\varphi)$ la projection canonique

Notons $\Delta = D_{16}/\ker \varphi$. On sait que $|\Delta| = 8$

et Δ est engendré par $r' = \pi(r)$ et $s' = \pi(s)$

De plus $srs = r^{-1}$ implique, par π , $s'r's' = (r')^{-1}$

De plus $(s')^2 = \text{Id}$ d'où $\text{ord}(s') = 1$ ou 2

$(r')^4 = \pi(r^4) = \text{Id}$ car $r^4 = \text{Id}$

et $(r')^2 \neq \text{Id}$ d'où $\text{ord}(r') = 4$

Quant à $\text{ord}(s')$: si $\text{ord}(s') = 1$ alors Δ est cyclique d'ordre 4 $\Rightarrow$ Absurde d'où $\text{ord}(s') = 2$

Finalement $\Delta = \langle r', s' \rangle$ avec $\text{ord}(r') = 4$, $\text{ord}(s') = 2$
 et $s'r's' = (r')^{-1}$

Donc $\Delta \cong D_8$.

On a bien $\text{Aut}(D_8) \cong D_{16}/\ker(\varphi) = \Delta \cong D_8$.

Ex. 4

Remarque : Soit G cyclique d'ordre n et soit $d \mid n$.

Alors tout sous-groupe de G est cyclique et

$\exists!$ ss-gr. d'ordre d .

Démo : soit $H < G$ Soit $k = \min \{ j \geq 1 \mid g^j \in H \}$

k existe dès que $H \neq \{e\}$

Alors $H = \langle g^k \rangle$: en effet si $g^l \in H$ alors

par div. euclidienne : $l = ak + r$ avec $r < k$

si $r \neq 0$ alors $g^r \in H$: Absurde

Ça montre que H est cyclique et unique.

Pour l'existence : $\langle g^{n/d} \rangle$ convient.

Retour à l'exo : $D_{2n} = \langle r, s \rangle$.

Soit $p \geq 3$ premier tq $p \mid 2n$ (sinon pas de p -Sylow)

Alors on peut écrire : $2n = p^l m$ avec $p \nmid m$.

Ainsi $p^l \mid n$ (car $p \nmid 2$) et $n = |\langle r \rangle|$

Donc $\exists$ un ss-gr (cyclique) de $\langle r \rangle$ d'ordre p^l

et c'est l'unique ss-gr. de $\langle r \rangle$ d'ordre p^l .

C'est un p -Sylow. Notons le $K = \langle r^k \rangle$ pour un k .

Il $K \trianglelefteq D_{2n}$ Soit $g \in D_{2n}$. Si $g \in \langle r \rangle$ alors $g r^k g = r^k$

Si $g = s r^j$: $s r^j r^k r^{-j} s = s r^k s = r^{-k} \in K$

D'où $g r^k g^{-1} \in K \quad \forall g \in D_{2n}$ donc $g h g^{-1} \in K \quad \forall h \in K$

et K est distingué dans D_{2n} .