Correction de l'ex. 6 de la feuille 4

Rappels théoriques

— Un sous-groupe $H \leqslant G$ est **distingué** si $gH = hG$ pour tout $g \in G$.
— Si G agit sur A, l'**orbite** d'un élément $x \in A$ est l'ensemble

$$G \cdot x := \{g \cdot x \ : \ g \in G\}.$$

Ainsi, $x, y \in A$ sont dans la même orbite sous l'action de G si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Et si $x \in G \cdot y$ alors $G \cdot x = G \cdot y$.
— L'action d'un groupe G sur un ensemble A est **transitive** s'il n'y a qu'une seule orbite sous l'action de G. Autrement dit si :

$$\forall a, a' \in A \quad \exists g \in G \ : \ g \cdot a = a'.$$

— Le **stabilisateur** d'un élément $a \in A$ sous l'action de G est

$$G_a := \{g \in G \ : \ g \cdot a = a\}.$$

— Soient $a, b \in A$. S'il existe $g \in G$ tel que $b = g \cdot a$, alors $G_b = gG_ag^{-1}$.
— L'action de G sur A induit une **action de G sur** $\mathcal{P}(A)$. Cette action est définie par : si $B \subseteq A$ est une partie de A, alors

$$g \cdot B = \{g \cdot b \ : \ b \in B\}.$$

— Si $H \leqslant G$ alors H agit sur A (par restriction de l'action de G sur A).
— **Formule des classes** $|G \cdot x| = [G : G_x]$.
— Soient $K \leqslant G$ et $g \in G$, alors $[G : K] = [G : gKg^{-1}]$.
Pour le montrer, considérez $\phi : G/K \to G/(gKg^{-1})$ qui à une classe à gauche hK_1 associe $ghg^{-1}(gKg^{-1})$. Mq ϕ est bien définie, injective, surjective.

Enoncé de l'exercice 6

Étant donnée une action transitive d'un groupe G sur un ensemble A, le but est d'étudier les orbites sous l'action d'un sous-groupe de G.

Énoncé Soit A un ensemble fini. Soit G un groupe agissant transitivement sur A. Soit H un sous-groupe distingué de G.
On note $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r$ les orbites sous l'action de H sur A.
On fixe $a \in \mathcal{O}_1$ et note G_a le stabilisateur de a sous l'action de G

1. Montrer que $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\}$ est invariant par l'action de G sur $\mathcal{P}(A)$.
2. Montrer que l'action de G sur $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\}$ est tranistive.
3. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on a $|\mathcal{O}_i| = [H : H \cap G_a]$.
4. Montrer que $r = [G : HG_a]$.

Explications/idée

Le fait que l'action de G sur A soit transitive nous dit qu'étant donnés n'importe quels éléments a, b dans A, on peut aller de a à b en utilisant l'action de G. Si l'on étudie maintenant l'action d'un sous-groupe H de G, nous disposons moins de choix d'éléments pour aller de a à b. C'est même probable qu'on ne puisse pas aller de a à b en utilisant un élément de H. Il peut donc y avoir dans ce cas plusieurs orbites sous l'action de H.

Le but de l'exercice est d'étudier ces orbites (combien d'éléments dans chaque orbites, combien d'orbites au total). Pour cela on exploite l'action de G sur l'ensemble des orbites de H.

Exemple

Soit $G \leqslant \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ le groupe engendré par la rotation d'angle $\pi/2$, c'est-à-dire

$$G = \langle r_{\pi/2} \rangle = \{\mathrm{id}, r_{\pi/2}, r_\pi, r_{3\pi/2}\}$$

Et soit $A = \{(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)\} \in \mathbb{R}^2$. Alors G agit transitivement sur A. Le schéma de gauche de la figure 1, réprésente l'action de G sur A. (L'action de l'identité qui laisse chaque point invariant n'a pas été représentée).

Soit $H = \langle r_\pi \rangle = \{\mathrm{id}, r_\pi\}$. Le schéma de droite en figure 1 illustre l'action de H. Sur ce dessin on voit apparaître deux orbites sour l'action de H : les ensembles $O_1 := \{(0,1),(0,-1)\}$ (l'ensemble des points blancs) et $O_2 := \{(-1,0),(1,0)\}$ (l'ensemble des points noirs).

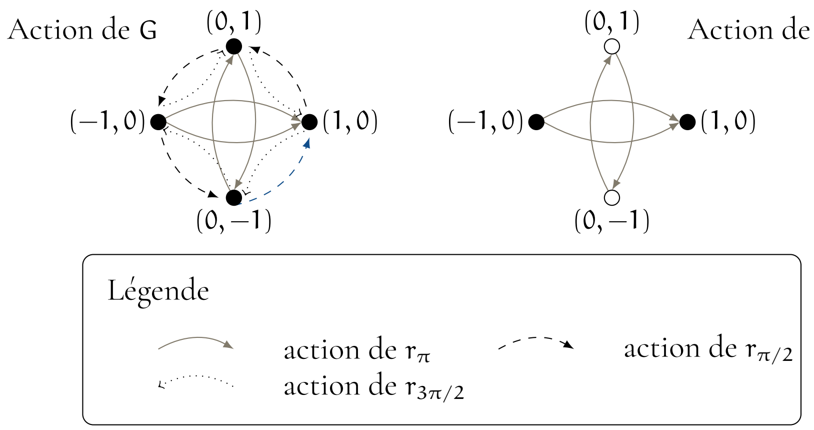

FIGURE 1 – Illustration des actions de G et H

L'action de G sur A induit une action sur $\mathcal{P}(A)$ (cf. rappels). Pour tout $g \in G$, les images de O_1 et O_2 par cette action sont donc :

$$\begin{aligned} g \cdot O_1 &= \{g \cdot (0,1), g \cdot (0,-1)\}, \\ g \cdot O_2 &= \{g \cdot (-1,0), g \cdot (1,0)\}. \end{aligned}$$

Par exemple si $g = r_{\pi/2}$ on a :

$$\begin{aligned} r_{\pi/2} \cdot O_1 &= \{r_{\pi/2} \cdot (0,1), r_{\pi/2} \cdot (0,-1)\} = \{(-1,0),(1,0)\} = O_2, \\ r_{\pi/2} \cdot O_2 &= \{r_{\pi/2} \cdot (-1,0), r_{\pi/2} \cdot (1,0)\} = \{(0,-1),(0,1)\} = O_1. \end{aligned}$$

De même on montre que $r_\pi \cdot O_1 = O_1$, $r_\pi \cdot O_2 = O_2$ et $r_{3\pi/2} \cdot O_1 = O_2$, $r_{3\pi/2} \cdot O_2 = O_1$. On retrouve bien le fait que G préserve l'ensemble $\{O_1, O_2\}$ et est transitif sur cet ensemble.

Ici $|O_i| = 2$ pour tout $i = 1,2$. De plus, quelque soit le point $a \in A$, on a $G_a = \{\mathrm{id}\}$, donc $H \cap G_a = \{\mathrm{id}\}$. Et on retrouve bien $[H : H \cap G_a] = [H : \{\mathrm{id}\}] = |H| = 2 = |O_i|$. Enfin comme G_a est trivial, on a $[G : HG_a] = [G : H] = 2$ et on retrouve bien le fait qu'on a deux orbites différentes sous l'action de H.

CORRECTION DE L'EXERCICE 6

1. Montrons que $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\}$ est invariant par l'action de G sur $\mathcal{P}(A)$.
   Pour cela, on doit donc montrer que pour tout $g \in G$ et tout $i \in \{1, \dots, r\}$ il existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $g \cdot \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$.
   Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on choisi $x_i \in A$ un élément tel que $\mathcal{O}_i = H \cdot x_i$.
   Soit $g \in G$. Comme $g \cdot x_i \in A$ et comme les orbites de H partitionnent A (c'est-à-dire $A = \bigsqcup_{j=1}^r \mathcal{O}_j$) il existe donc un j tel que $g \cdot x_i \in \mathcal{O}_j$. Ainsi,

$$\begin{aligned} g \cdot \mathcal{O}_i = g \cdot (H \cdot x_i) &= (gH) \cdot x_i \overset{H \lhd G}{=} (Hg) \cdot x_i \\ &= H \cdot (g \cdot x_i) = \mathcal{O}_j \end{aligned}$$

   Et donc, $\boxed{\text{l'ensemble } \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\} \text{ est bien invariant sous l'action de } G.}$

2. Montrons que l'action est transitive, c'est à dire que pour tout $i, j \in \{1, \dots, r\}$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$.
   Soient $x \in \mathcal{O}_i$ et $y \in \mathcal{O}_j$. Comme l'action de G sur A est transitive (par hypothèse), il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Par le point précédent [1], on a donc $g \cdot \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_j$.
   D'où $\boxed{\text{la transitivité de l'action de } G \text{ sur } \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\}.}$

1. Détails : Comme $x \in \mathcal{O}_i$, on a $\mathcal{O}_i = H \cdot x$, de même $\mathcal{O}_j = H \cdot y$.
Donc $g \cdot \mathcal{O}_i = g \cdot (H \cdot x) = (gH) \cdot x = (Hg) \cdot x = H \cdot (g \cdot x) = H \cdot y = \mathcal{O}_j$

3. Montrons que $|\mathcal{O}_i| = [H : H \cap G_a]$, pour tout i.
Pour chaque i on se donne $x_i \in \mathcal{O}_i$. Fixons maintenant $i \in \{1, \dots, r\}$. Par la formule des classes, on a $|\mathcal{O}_i| = [H : H_{x_i}]$. Mais

$$H_{x_i} = \{h \in H \ : h \cdot x_i = x_i\} = \left\{h \in H \ : \ h \in G_{x_i}\right\} = H \cap G_{x_i}.$$

De plus, comme l'action de G sur A est transitive, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot a = x_i$. Mais alors [2] $G_{x_i} = gG_a g^{-1}$, et donc $H \cap G_{x_i} = H \cap gG_a g^{-1}$. Or H est distingué, donc $H \cap gG_a g^{-1} = g\,(H \cap G_a)\,g^{-1}$ et ainsi [3]

$$\left[H : H_{x_i}\right] = \left[H : H \cap G_{x_i}\right] = \left[H : g\,(H \cap G_a)\,g^{-1}\right] = [H : H \cap G_a]\,.$$

Ainsi $\boxed{\text{toutes les orbites contiennent } [H : H \cap G_a] \text{ éléments.}}$

4. Déterminons la valeur de r.
On sait que l'action de G est transitive sur $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\}$. Autrement dit

$$G \cdot \mathcal{O}_1 = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\}.$$

Ainsi $|G \cdot \mathcal{O}_1| = r$. Par la formule des classes, on a donc

$$|G \cdot \mathcal{O}_1| = r = \left[G : G_{\mathcal{O}_1}\right].$$

Montrons que $G_{\mathcal{O}_1} = HG_a$. (On rappelle $\mathcal{O}_1 = H \cdot a$.)

— Tout d'abord, montrons que $HG_a \subseteq G_{\mathcal{O}_1}$.
Si $g \in HG_a$, alors il existe $k \in H$ et $\gamma \in G_a$ tel que $g = k\gamma$.
Soit $x = h \cdot a$ un élément de $\mathcal{O}_1$. Comme $H \lhd G$, il existe $h' \in H$ tq. $\gamma h = h'\gamma$. Alors

$$g\dot{x} = (k\gamma) \cdot (h \cdot a) = (k\gamma h) \cdot a = (kh'\gamma) \cdot a \overset{\gamma \in G_a}{=} (kh') \cdot a.$$

Comme $k, h' \in H$, on a $(kh') \in H$ et donc $(kh') \cdot a \in H \cdot a = \mathcal{O}_1$.
Ainsi $HG_a \subseteq G_{\mathcal{O}_1}$.

— Montrons maintenant l'autre inclusion.
Soit $g \in G_{\mathcal{O}_1}$. Alors $g \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_1$, en particulier comme $a \in \mathcal{O}_1$, on a $g \cdot a \in \mathcal{O}_1$, c'est-à-dire, qu'il existe $h \in H$ tel que $g \cdot a = h \cdot a$. Ainsi il existe $h \in H$ tel que $h^{-1}g \cdot a = a$, autrement dit $h^{-1}g \in G_a$. Et donc $g \in HG_a$.

Conclusion : $\boxed{r = [G : HG_a].}$

2. cf. Rappels.

3. Pour la dernière égalité, on utilise que si deux sous-groupes d'un même groupe sont conjugés, alors ils ont le même indice (cf. dernier point des rappels).