

Feuille d'exercices 5

Indications pour la résolution d'exercices

Exercice (classification des groupes d'ordre 75)

- (a) Montrer que G est un produit semi-direct.
 - (a) Montrer que G admet un unique 5-sylow H_5 .
 - (b) Soit H_3 un 3-Sylow. Montrer que $G \simeq H_5 \rtimes_{\varphi} H_3$ où $\varphi : H_3 \rightarrow \text{Aut}(H_5)$ est un morphisme de groupes.
- (b) Déterminer les morphismes φ possibles.
 - (a) Montrer que $H_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Montrer qu'ou bien $H_5 \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ ou bien $H \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$.
 - (b) Montrer que si $H_5 \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ alors φ ne peut-être que le morphisme trivial.
 - (c) Si $H_5 \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$, montrer qu'il existe un morphisme φ non-trivial.
Si $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2)$ sont deux morphismes non-triviaux, montrer que les produits semi-directs $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\varphi_1} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\varphi_2} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont isomorphes.