

## Feuille d'exercices 5

### Indications pour la résolution d'exercices

#### **Exercice (classification des groupes d'ordre 75)**

- (a) Montrer que  $G$  est un produit semi-direct.
  - (a) Montrer que  $G$  admet un unique 5-sylow  $H_5$ .
  - (b) Soit  $H_3$  un 3-Sylow. Montrer que  $G \simeq H_5 \rtimes_{\varphi} H_3$  où  $\varphi : H_3 \rightarrow \text{Aut}(H_5)$  est un morphisme de groupes.
- (b) Déterminer les morphismes  $\varphi$  possibles.
  - (a) Montrer que  $H_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Montrer qu'ou bien  $H_5 \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$  ou bien  $H \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ .
  - (b) Montrer que si  $H_5 \simeq \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$  alors  $\varphi$  ne peut-être que le morphisme trivial.
  - (c) Si  $H_5 \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ , montrer qu'il existe un morphisme  $\varphi$  non-trivial.  
Si  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2)$  sont deux morphismes non-triviaux, montrer que les produits semi-directs  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\varphi_1} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\varphi_2} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  sont isomorphes.