Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2025-2026

L3 Math. Gén. : Groupes 05 novembre 2025

Examen partiel (durée : 1h30)

Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Les téléphones, calculatrices et documents de cours sont interdits. Le barème (sur 20) est donné à titre indicatif. Le sujet comporte deux pages.

Merci de rendre 2 copies avec sur la première : vos réponses aux exercices 1 à 3, sur la deuxième : vos réponses à l'exercice 4.

Exercice 1 (Groupe de Heisenberg – 2,5 pts)**.** Soit $* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'opération binaire définie pour tout $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ par :

$$(a, b, c) * (a', b', c') = (a + a', b + b', c + ab' + c'),$$

On admet pour cet exercice que $(\mathbb{R}^3, *)$ est un groupe. Soit

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que H_3 est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle.
2. Montrer que H_3 muni de la multiplication matricielle est isomorphe à $(\mathbb{R}^3, *)$.

Exercice 2 (Conjugaison – 2,5 pts)**.** *Les questions 1 et 2 peuvent se traiter indépendamment* Soit G un groupe.

1. Pour tout $A \subseteq G$ on note $C_G(A) = \{g \in G \ : \ \forall a \in A, \ gag^{-1} = a\}$ le centralisateur de A dans G. Soient $A, A' \subseteq G$.
   (a) Montrer que si $A \subseteq A'$ alors $C_G(A') \subseteq C_G(A)$.
   (b) Montrer que : $A \subseteq C_G(A')$ si et seulement si $A' \subseteq C_G(A)$
2. Soit $H \leq G$ un sous-groupe. Montrer que si tout produit de deux classes à gauche modulo H est une classe à gauche modulo H, alors H est distingué dans G.

Exercice 3 (Groupes finis – 4 pts)**.** Soit G un groupe fini de cardinal n et soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, l'équation $x^m = a$ admet une solution.
2. Montrer qu'une telle solution est unique.

Suite du sujet au dos

Merci de faire l'exercice 4 sur une copie différente des trois premiers exercices.

Exercice 4 (Groupe symétrique - 11 pts)**.** *Les questions (1), (2), (3) et (4) peuvent se traiter indépendamment.*

(1) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que pour tout $g \in G$, $g^2 \in H$.

(2) On se place dans S_9. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 8 & 6 & 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints et donner sa signature.

(b) Écrire σ^{-1} comme produit de cycles à supports disjoints.

(c) Écrire $(12)\sigma(12)^{-1}$ comme produit de cycles à supports disjoints.

(3) On se place dans S_4 et on rappelle que A_4 est le noyau du morphisme signature $\varepsilon : S_4 \to \{1, -1\}$.

(a) Dans S_4, justifier que tout 3-cycle est un carré.

(b) En utilisant les questions (1) et (3.a), montrer que A_4 n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6.

(4) On se place dans S_n avec $n \geq 3$.

Soit φ un automorphisme du groupe S_n tel que φ envoie une transposition sur une transposition. Pour $i = 2, \ldots, n$, on note $\tau_i = (1\ i)$.

(a) *On rappelle et on admet que deux transpositions commutent si et seulement si leurs supports sont disjoints ou si elles sont égales.* Montrer qu'il existe $a_1, a_2, a_3 \in \{1, \ldots, n\}$ distincts deux à deux tels que $\varphi(\tau_2) = (a_1\ a_2)$ et $\varphi(\tau_3) = (a_1\ a_3)$.

(b) En considérant à nouveau les supports et leurs intersections, montrer que pour tout $4 \leq i \leq n$, il existe $a_i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ tel que $\varphi(\tau_i) = (a_1\ a_i)$.

(c) Justifier que l'application $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ qui envoie i sur a_i est un élément de S_n.

(d) Montrer que φ et l'application $\tau \mapsto \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ coïncident. *On pourra montrer qu'elles coïncident sur les transpositions τ_i et utiliser un résultat vu en TD.*