Feuille d'exercices 3

Morphismes et quotients

Légende

- † Exercice à connaître mais qui ne sera pas nécessairement traité en TD.
- * Exercice plus difficile et non-obligatoire.

Exercice 1[†]. Soient $\varphi: G \rightarrow H$ et $\psi: H \rightarrow K$ deux morphismes de groupes. Alors la composition $\psi \circ \varphi: G \rightarrow K$ est encore un morphisme.

Exercice 2[†]. Montrer qu'un morphisme injectif $\varphi: G \rightarrow H$ est la même chose qu'un isomorphisme entre G et un sous-groupe de H .

Un tel morphisme met en évidence une copie isomorphe de G dans H : on dit qu'il *plonge* G dans H . Ainsi, un morphisme injectif s'appelle aussi un *plongement*.

Exercice 3. Soit $\pi: G \rightarrow H$ un morphisme surjectif et soit $S \subseteq G$ tel que $\langle S \rangle = G$. Montrer que $\langle \pi(S) \rangle = H$.

Exercice 4. Montrer que :

- (a) $Z(G) \trianglelefteq G$.
- (b) Plus généralement, si $H \leq Z(G)$ alors $H \trianglelefteq G$.

Exercice 5. Soit G un groupe. Alors tout sous-groupe d'indice 2 de G est distingué.

Exercice 6. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe. On suppose que H est d'ordre n , et que c'est l'unique sous-groupe de G d'ordre n . Montrer que H est distingué dans G .

Exercice 7. Soient K et H deux sous-groupes distingués de G , et supposons que $K \cap H = \{e\}$. Montrer que $kh = hk$ pour tout $k \in K$ et $h \in H$. Est-ce la même chose que dire $KH = HK$?

Exercice 8. Montrer que $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ n'implique pas nécessairement $K \trianglelefteq G$.

Indication : penser au groupe diédral D_8 et à ses sous-groupes.

Exercice 9 (Le groupe quaternionique). Dans $G = \text{GL}(2, \mathbf{C})$, posons :

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour ne pas confondre avec I , notons aussi la matrice identité I_2 par 1 .

- (a) Calculer leurs carrés, ainsi que les produits IJ, JK, KI .
- (b) En déduire les produits JI, KJ, IK .
- (c) Déduire que

$$\langle I, J \rangle = \{\pm 1, \pm I \pm J, \pm K\}.$$

Ce groupe s'appelle le *groupe quaternionique*, noté Q_8 .

(d) Dresser la liste des sous-groupes de Q_8 . Pour chacun, déterminer s'il est distingué ou non.

Exercice 10. Soit $(G, +)$ un groupe abélien.

(a) Montrer que l'application $\pi: G \times G \rightarrow G$, définie par $\pi(x, y) = x + y$ est un morphisme de groupes.

(b) Dans le cas $G = \mathbf{R}$, décrire les fibres de π (les ensembles $\pi^{-1}(\{z\})$) géométriquement.

Exercice 11. Soit F un corps.

(a) Considérons le groupe $G \leq \text{GL}(2, F)$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in F, ac \neq 0 \right\}.$$

Démontrer que l'application $\phi: G \rightarrow F^\times$ définie par

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = a$$

est un morphisme surjectif. Calculer son noyau.

(b) Soit $G \leq \text{GL}(2, F)$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in F \right\}.$$

Montrer que G est isomorphe au groupe additif de F .

Exercice 12[†]. Montrer que si G est abélien alors tout sous-groupe de G est distingué.

Donner un exemple d'un groupe non-abélien dont tous les sous-groupes sont distingués.

Exercice 13. Soit $G = \text{GL}(2, \mathbf{Q})$ et soient

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbf{Z} \right\}, \quad g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $gHg^{-1} \subseteq H$ mais que g ne normalise pas H .

Exercice 14. Trouver tous les sous-groupes distingués de D_8 et le type d'isomorphisme du quotient de D_8 par chacun d'entre eux. (*Indication* : D_8 a 10 sous-groupes distincts.)

Exercice 15. Soit F un corps. Montrer que $\text{SL}(n, F) \trianglelefteq \text{GL}(n, F)$ et calculer le type d'isomorphisme du quotient.

Exercice 16. Soit G un groupe. Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien.

Exercice 17. Montrer que $(\mathbf{Q}, +)$ n'a pas de sous-groupes propres d'indice fini.

Exercice 18. Soit G un groupe. Soit $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G , muni de la loi de composition d'applications. Alors $\text{Aut}(G)$ est un groupe, nommé le *groupe d'automorphismes* de G .

On pourrait le montrer ou bien directement, ou bien en montrant que $\text{Aut}(G) \leq S_G$.

Exercice 19. Soit G un groupe et $x, y \in G$. On appelle xyx^{-1} le *conjugué* de y par x . Pour $x \in G$ fixé, définissons $\varphi_x: G \rightarrow G$ par

$$\varphi_x(y) = xyx^{-1}.$$

Cette application est la *conjugaison par x* .

- (a) Montrer que pour tout $x \in G$, l'application $\varphi_x : G \rightarrow G$ est un morphisme.
- (b) Montrer que pour tout $x, y \in G$, on a $\varphi_x \circ \varphi_y = \varphi_{xy}$.
- (c) Montrer que $\varphi_e = \text{id}_G$.
- (d) En déduire que $\varphi_x \in \text{Aut}(G)$ pour tout $x \in G$.

Exercice 20. Soit G un groupe, $N \leq G$. Soient $S \subseteq G, T \subseteq N$ tels que $G = \langle S \rangle, N = \langle T \rangle$.

- (a) Montrer que si pour tout $s \in S, sTs^{-1} \subseteq N$ et $s^{-1}Ts \subseteq N$, alors $N \trianglelefteq G$.
- (b) Si N est fini il suffit de demander que $sTs^{-1} \subseteq N$ pour tout $s \in S$.

Exercice 21. Grâce à l'**Exercice 19**, on peut définir une application

$$\Phi: G \rightarrow \text{Aut}(G), \quad \Phi(x) = \varphi_x.$$

- (a) Montrer que Φ est un morphisme de groupes.
- (b) Montrer que $\ker \Phi = Z(G)$.
- (c) Soit $\psi \in \text{Aut}(G)$ et $x \in G$. Montrer que $\psi \circ \varphi_x \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(x)}$. En déduire que

$$\text{img} \Phi \trianglelefteq \text{Aut}(G).$$

Remarque. Un automorphisme de G qui peut s'écrire sous la forme φ_x s'appelle un automorphisme *intérieur*. L'ensemble des automorphismes intérieurs est notée $\text{Inn}(G)$:

$$\text{Inn}(G) = \{\varphi_x : x \in G\} = \text{img} \Phi.$$

Nous avons montré que $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$. Le groupe quotient $\text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ est noté $\text{Out}(G)$, et ses membres s'appellent des automorphismes *extérieurs* (bien que ce ne soient pas des automorphismes).

Exercice 22[†]. Continuant l'**Exercice 21**, montrer que G est abélien si et seulement si Φ est le morphisme trivial.

Exercice 23. Soit G un groupe fini tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$.

- (a) Rappeler pourquoi G est abélien.
- (b) Montrer que $|G|$, l'ordre de G , est une puissance de 2.
Indication : pour $x \in G \setminus \{e\}$, considérer le quotient $G/\langle x \rangle$.

Exercice 24[†]. Soit G un groupe et $x, y \in G$. On appelle

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

le *commutateur* de x et y .

Montrer que $[x, y] = e$ si et seulement si $xy = yx$ (d'où son nom).

Exercice 25. Soit G un groupe. Le sous-groupe engendré par tous les commutateurs, noté G' , s'appelle le *groupe dérivé* de G :

$$G' = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle.$$

- (a) Montrer que $G' \trianglelefteq G$.
- (b) Montrer que G/G' est abélien.
- (c*) Montrer que si H est un groupe abélien quelconque et $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme, alors $G' \leq \ker \varphi$ et il existe un unique morphisme $\psi : G/G' \rightarrow H$ tel que $\psi \circ \pi_{G'} = \varphi$. Autrement dit, il existe un unique ψ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\pi_{G'}} & G/G' \\
 & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\
 & & H
 \end{array}$$

Exercice 26. Montrer que si A et B sont deux sous-groupes distingués de G tels que G/A et G/B sont abéliens, alors $G/A \cap B$ est abélien.

Exercice 27. Nous proposons de calculer le groupe $\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, pour $n \geq 2$. Pour cela, nous allons utiliser la structure d'anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Un membre de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sera noté $\bar{k} = k + n\mathbf{Z}$, avec $k \in \mathbf{Z}$. Nous avons déjà (ou nous le montrerons en amont) que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ admet deux opérations, $+$ et $\cdot$, définies par

$$\bar{k} + \bar{\ell} = \overline{k + \ell}, \quad \bar{k} \cdot \bar{\ell} = \overline{k \cdot \ell}.$$

En particulier, ces deux opérations sont bien définies, et $+$ est simplement la loi du groupe quotient $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

- (a) Montrer que la multiplication sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est associative, avec neutre $\bar{1}$.
- (b) Un élément $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est dit *inversible* s'il existe $y \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que $xy = yx = \bar{1}$. L'ensemble des membres inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sera noté $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$. Montrer que $((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \cdot)$ est un groupe.
- (c) Soit $\varphi \in \text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, et posons $\hat{\varphi} = \varphi(\bar{1}) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Montrer que $\varphi(x) = x\hat{\varphi}$ tout $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
- (d) Montrer que si $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, alors $\widehat{\varphi \circ \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$, et que $\widehat{\text{id}} = \bar{1}$.
- (e) En déduire que pour tout $\varphi \in \text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, $\hat{\varphi}$ est inversible, et que l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est un morphisme $\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +) \rightarrow ((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \cdot)$.
- (f) Montrer que c'est un isomorphisme, d'où notre conclusion :

$$\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +) \cong ((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \cdot).$$

Exercice 28[†]. Utilisant les mêmes idées que dans **Exercice 27**, montrer que $\text{Aut}(\mathbf{Z}, +) \cong (\mathbf{Z}^\times, \cdot) = (\{\pm 1\}, \cdot)$.