Feuille d'exercices 4

Actions

Légende

- † Exercice à connaître mais qui ne sera pas nécessairement traité en TD.
- * Exercice plus difficile et non-obligatoire.

Exercice 1†. Une action $G \curvearrowright X$ est dite *libre* si pour tout $g \neq e$ et tout $x \in X$: $g \cdot x \neq x$. Sont équivalents :

(a) L'action est libre.

(b) $G_x = \{e\}$ pour tout $x \in X$.

(c) Pour tout $x, y \in X$ il existe au plus un g tel que $g \cdot x = y$.

Montrer que si l'action est libre, alors $|G| = |O|$ pour toute orbite O. Montrer que toute action libre est fidèle.

Exercice 2. Soit G un groupe et $H \leq G$. Considérons l'action $G \curvearrowright G/H$. Montrer que :

- Cette action est transitive et $G_H = H$.
- Elle est libre si et seulement si $H = \{e\}$.
- Elle est fidèle si et seulement si $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$.

Exercice 3†. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive et fidèle et soit $a \in A$.

(a) Montrer que $\bigcap_{g \in G} gG_a g^{-1} = \{e\}$.

(b) Montrer que si G est abélien, alors $|G| = |A|$.

Exercice 4. (a) Montrer qu'il existe deux permutations dans S_8 qui engendrent un sous-groupe isomorphe à Q_8. Explicitez une paire de telles permutations.

(b) Montrer que Q_8 n'est isomorphe à aucun sous-groupe de S_n pour $n \leq 7$. (*Indication* : Montrer que si Q_8 agit sur un ensemble de cardinal ≤ 7, le stabilisateur de tout point contient le sous-groupe $\langle -1 \rangle$. La classification des sous-groupes de Q_8 sera utile.)

Exercice 5 (Théorème de Cauchy)**.** Nous allons démontrer le théorème suivant, dû à Cauchy :

> Si G est un groupe fini et p est un facteur premier de $|G|$, alors G continent un élément d'ordre p.

Soit $E \subseteq G^p$ le sous-ensemble défini par

$$E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p : x_1 x_2 \cdots x_p = e\}.$$

(a) Quel est le cardinal de E ?

(b) Pour tout élément $\zeta = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E$ on pose $\sigma(\zeta) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$. Vérifier que σ conserve E et que l'application

$$\phi\colon \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times E \to E : (\bar{k}, \zeta) \mapsto \sigma^k(\zeta)$$

est une action du groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +)$ sur E.

(c) Montrer que ζ est un point fixe de l'action si et seulement si $\zeta = (x, x, \ldots, x)$, où $x^p = e$.

(d) Montrer que toute orbite est de cardinal 1 ou p.

(e) Conclure, en vous servant de la partition de E en orbites.

Exercice 6. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini et soit $H \lhd G$. Soient $O_1, O_2, \ldots, O_r$ les orbites de H sur A. On fixe $a \in O_1$ et on note par G_a le stabilisateur de a.

(a) Montrer que l'ensemble $\{O_1, \ldots, O_r\}$ est invariant par l'action $G \curvearrowright \mathscr{P}(A)$, i.e., G agit sur cet ensemble.

(b) Montrer que cette action et transitive.

(c) Montrer que tous les O_i ont le même cardinal qui est égal à $[H : H \cap G_a]$.

(d) Montrer que $r = [G : HG_a]$.

Exercice 7. (a) Considérons l'action naturelle $S_n \curvearrowright \mathscr{P}([n])$ (l'action de S_n sur les parties de $[n]$ induite par son action sur $[n]$). Quelles sont ses orbites ?

(b) La même question pour l'action $A_n \curvearrowright \mathscr{P}([n])$ pour $n \geq 3$. (*Indication :* Utiliser Exercice 6.)

Exercice 8. Soit G un groupe fini et soit le morphisme $\pi : G \to S_G$ donné par l'action $G \curvearrowright G$ par multiplication à gauche.

(a) Montrer que si $x \in G$ est d'ordre n et $|G| = mn$, alors $\pi(x)$ est le produit de m n-cycles.

(b) Montrer que si l'image de π contient une permutation impaire, alors G admet un sous-groupe d'indice 2.

Exercice 9. Montrer que si $|G| = 2k$ avec k impair, alors G contient un sous-groupe d'indice 2. (*Indication :* Utiliser le théorème de Cauchy et l'exercice précédent.)

Exercice 10. Soit G un groupe fini, et p le plus petit diviseur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p est distingué. (*Indication :* Étudier l'action $H \curvearrowright G/H$ et les cardinaux de ses orbites.)

Exercice 11. On fait agir un groupe d'ordre 143 sur une ensemble de cardinal 108. Montrer qu'il existe un point fixe pour cette action (c'est à dire, au moins un $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$).

Exercice 12*. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini. Un *bloc* est une partie non vide $B \subseteq A$ telle que pour tout $g \in G$, $g \cdot B = B$ ou $g \cdot B \cap B = \emptyset$.

(a) Montrer que si $B \subseteq A$ est un bloc contenant l'élément a alors $G_B := \{g \in G : g \cdot B = B\}$ est un sous-groupe de G qui contient G_a.

(b) Montrer que $\{g \cdot B : g \in G\}$ est une partition de A.

(c) Un groupe transitif est dit *primitif* si les seuls blocs dans A sont les blocs triviaux : les singletons et A. Montrer que l'action $S_n \curvearrowright [n]$ est primitive. Montrer que l'action $D_8 \curvearrowright [4]$ ne l'est pas. Et l'action $D_{10} \curvearrowright [5]$?

(d) Montrer que l'action $G \curvearrowright A$ est primitive ssi pour tout $a \in A$ le stabilisateur G_a est un *sous-groupe maximal* de G, i.e., pour tout sous-groupe H tel que $G_a \leq H \leq G$, $H = G_a$ ou $H = G$.

Exercice 13. Quelles sont les classes de conjugaison dans les groupes suivants : S_3, A_4, D_8, Q_8 ?

Exercice 14. Soit $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$. Pour chacun des cas suivants trouver un élément explicite $\tau \in S_5$ tel que

(a) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$;

(b) $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.

Exercice 15. Trouver des représentants pour toutes les classes de conjugaison de S_8 d'éléments d'ordre 4.

Exercice 16. (a) Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.

(b) Montrer que tous les 3-cycles sont conjugués dans A_n si $n \geq 5$.

Exercice 17. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe A_n est simple pour tout $n \geq 5$. On rappelle le résultat du cours que le groupe A_5 est simple. Soit $n > 5$ et soit $N \lhd A_n$ un sous-groupe distingué non trivial.

(a) Montrer que si $x \in N$ et $y \in A_n$, alors le commutateur $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ est un élément de N.

(b) Soit $x \in N$, $x \neq e$. Montrer qu'il existe $y \in A_n$ tel que $[x, y]$ est non trivial et son support contient au plus 5 points. (*Indication :* Considérer des cas en fonction de la structure de la décomposition de x en cycles.)

(c) Soit $S \subseteq [n]$ tel que $|S| = 5$ et $S \supseteq \mathrm{supp}[x, y]$. On considère A_S comme un sous-groupe de A_n en étendant chaque permutation de A_S par l'identité en dehors de S. Montrer que $A_S \leq N$. En particulier N contient un 3-cycle.

(d) En déduire que $N = A_n$.

Exercice 18. Montrer que si n est impair, alors l'ensemble de tous les n-cycles consiste en 2 classes de conjugaison du même cardinal dans A_n. (*Indication :* Utiliser Exercice 6.)

Exercice 19. Montrer que si G est un groupe d'ordre impair, alors pour tout $x \in G$ différent de l'identité, x et x^{-1} ne sont pas conjugués.

Exercice 20. Soit $G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{C}, ac \neq 0 \right\}.$$

Montrer que tout élément de G est conjugué à un élément du sous-groupe H et donc $G = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

Exercice 21. Soit $G \curvearrowright A$ une action transitive avec A fini et $|A| > 1$. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$. (On rappelle que $\mathrm{Fix}(g) := \{a \in A : g \cdot a = a\}$.)

Exercice 22. Soit G un groupe fini, et $H \leq G$. Soit

$$X = \{gHg^{-1} : g \in G\}$$

l'ensemble des conjugués de H.

(a) Montrer que $|H| \mid |N_G(H)|$.

(b) En déduire que $|X| \mid [G : H]$.

Exercice 23 (La formule de Burnside)**.** On suppose que G est un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X.

(a) Montrer que

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Ces deux sommes représentent deux manières de compter les membres d'un même ensemble, lequel ?

(b) Montrer la formule de Burnside : le nombre d'orbites de l'action est donné par

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Exercice 24. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et p un entier premier.

(a) On considère l'ensemble des bracelets constitués de p perles, chacune pouvant être coloriée de l'une des n couleurs. Deux bracelets sont considérés comme étant identiques lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre par rotation (autour du poignet). Combien existe-t-il de bracelets distincts ?

(b) Même question, mais maintenant deux bracelets sont considérés comme étant identiques lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre par rotation (autour du poignet) ou réflexion (on l'enlève, on le retourne, on le remet).

Exercice 25*. Comme l'exercice précédent, mais on ne suppose plus que le nombre de perles est premier. On pourra se contenter du cas à six perles.

Exercice 26. Soit F un corps fini de cardinal q.

(a) Montrer que
$$|\mathrm{GL}(n,F)| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1}).$$

(b) Calculer l'ordre de $\mathrm{SL}(n,F)$.

Exercice 27*. Soit F un corps. Une matrice carrée sur F est appelée une *transvection* si elle est de la forme $I_n + aE_{ij}$ pour $i \neq j$, où I_n est la matrice identité, $a \in F$ et E_{ij} est la matrice dont les entrées sont 1 en position (i,j) et 0 ailleurs. Une matrice est appelée une *dilation* si elle est de la forme aI_n avec $a \in F^\times$.

(a) Décrire à quoi correspond la multiplication à gauche et à droite par une transvection.

(b) Montrer que les transvections sont des éléments de $\mathrm{SL}(n,F)$ et que $\mathrm{SL}(n,F)$ est engendré par elles. (*Indication :* On pourra utiliser récurrence sur n.)

(c) En conclure que $\mathrm{GL}(n,F)$ est engendré par les transvections et les dilations.