Feuille d'exercices 5

Sylow, produits semi-directs, classification

Légende

† Exercice à connaître mais qui ne sera pas nécessairement traité en TD.

* Exercice plus difficile et non-obligatoire.

Exercice 1. Le but de cet exercies est de montrer le Théorème de classification suivant :

> Soit $p < q$ deux nombres premiers.
> - Si $p \nmid q-1$, alors à isomorphisme près il existe un unique groupe d'ordre pq, à savoir, le groupe cyclique C_{pq}.
> - Si $p \mid q-1$ lors à isomorphisme près il existe exactement deux groupes d'ordre pq, à savoir, le groupe cyclique C_{pq} et l'unique produit semi-direct non abélien $C_q \rtimes C_p$.

Soient donc p et q deux nombres premiers tels que $p < q$. Soit G un groupe d'ordre pq.

(a) Première étape : Montrer que G est un produit semi-direct.
  (a) Montrer que G admet un unique q-Sylow, noté Q.
  (b) Montrer que $Q \simeq C_q$ et $G/Q \simeq C_p$.
  (c) Soit P un p-Sylow. Montrer que $G \simeq C_q \rtimes_\varphi C_p$, pour un certain morphisme $\varphi : C_p \to \mathrm{Aut}(C_q)$.

(b) Deuxième étape : Étude de cas.
  (a) Si p ne divise pas $q-1$, montrer que $P \lhd G$. En déduire que $G \simeq P \times Q \simeq C_{pq}$.
  (b) Si p divise $q-1$, montrer qu'il existe un morphisme $\varphi : C_q \to \mathrm{Aut}(C_q)$ non-trivial.
  Si $\varphi_1, \varphi_2 : C_p \to \mathrm{Aut}(C_q)$ sont deux morphismes non-triviaux, montrer que les produits semi-directs $C_q \rtimes_{\varphi_1} C_p$ et $C_q \rtimes_{\varphi_2} C_p$ sont isomorphes.
  (c) Conclure.

Exercice 2. (a) Montrer que si $\pi : G \to H$ est un morphisme et $N \lhd H$, alors $\pi^{-1}(N) \lhd G$.

(b) Soit G un groupe d'ordre p^n. Montrer que pour tout k, $0 \le k \le n$, G admet un sous-groupe distingué N_k d'ordre p^k.

(c) En déduire que si G est un groupe fini et $p^k \mid |G|$, alors G admet un sous-groupe d'ordre p^k.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de déterminer le groupe $\mathrm{Aut}(D_8)$.
Dans cet exercice, on admet le résultat suivant : si G est un groupe engendré par deux éléments r et s tels que $\mathrm{ord}(r) = n$, $\mathrm{ord}(s) = 2$ et $srs^{-1} = r^{-1}$ alors G est isomorphe à D_{2n}.

(a) Soient r et s les générateurs usuels de D_8. En invoquant l'ordre des éléments, montrer que $|\mathrm{Aut}(D_8)\cdot r| \le 2$ et que $|\mathrm{Aut}(D_8)\cdot s| \le 4$. En déduire que $|\mathrm{Aut}(D_8)| \le 8$.

(b) On note r et s les générateurs usuels de D_{16}. Soit H le sous-groupe de D_{16} engendré par r^2 et s.
  1. Montrer que H est isomorphe à D_8 et qu'on a $H \lhd D_{16}$.
  2. Montrer que $C_{D_{16}}(H) \subseteq \{\mathrm{id},\ r^4\}$.

3. Soit $\varphi : D_{16} \to \mathrm{Aut}(H)$ le morphisme (on vérifiera que φ est bien défini et que c'est bien un morphisme de groupes) défini par $\varphi(g)(h) = ghg^{-1}$. Montrer que le noyau de φ est égal à $C_{D_{16}}(H)$ et est de cardinal 2.
4. Pour finir, montrer que $D_{16}/\ker(\varphi)$ est isomorphe à D_8 et conclure.

Exercice 4. Montrer que tout p-Sylow de D_{2n} est distingué et cyclique pour tout p premier impair.

Exercice 5. Dans cet exercice on va étudier le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)$, où $\mathbf{F}_3 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est le corps à 3 éléments.

(a) Rappeler quel est l'ordre de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)$.

(b) Trouver tous les 3-Sylows de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)$. (*Indication :* Considérer les stabilisateurs des vecteurs dans $\mathbf{F}_3^2$.)

(c) Montrer que le groupe engendré par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est l'unique 2-Sylow de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)$. Il est par ailleurs isomorphe à Q_8.

(d) Calculer le nombre de sous-espaces de dimension 1 de $\mathbf{F}_p^n$.

(e) Montrer que

$$Z(\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(f) En considérant l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)$ sur l'ensemble des sous-espaces de $\mathbf{F}_3^2$ de dimension 1, montrer que $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)/Z(\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_3)) \cong A_4$.

Exercice 6. Montrer que G n'est pas simple si l'ordre de G est :

(a) $6545 = 5 \times 7 \times 11 \times 17$ (*Indication :* Dans le cas où il y a beaucoup de sous-groupes de Sylow compter les éléments d'ordre p pour $p \mid 6545$.)

(b) $1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$;

(c) $2907 = 3^2 \times 17 \times 19$.

Exercice 7. Soit G un groupe d'ordre 105. Montrer que si un 3-Sylow de G est distingué, alors G est abélien.

Exercice 8. Soit K un groupe cyclique fini, soit H un groupe arbitraire et soient ϕ_1, ϕ_2 deux morphismes $K \to \mathrm{Aut}(H)$. Supposons que $\phi_1(K)$ et $\phi_2(K)$ sont conjugués dans $\mathrm{Aut}(H)$: i.e., il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\sigma\phi_1(K)\sigma^{-1} = \phi_2(K)$.

(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{Z}$ tel que $\sigma\phi_1(k)\sigma^{-1} = \phi_2(k)^a$ pour tout $k \in K$.

(b) Montrer que l'application $\psi \colon H \rtimes_{\phi_1} K \to H \rtimes_{\phi_2} K$ définie par

$$\psi((h,k)) = (\sigma(h), k^a)$$

est un morphisme.

(c) Montrer que dans (a) on peut choisir a tel que $\mathrm{pgcd}(a, |K|) = 1$. En construisant un inverse montrer que ψ est bijectif et conclure que les groupes $H \rtimes_{\phi_1} K$ et $H \rtimes_{\phi_2} K$ sont isomorphes.

Exercice 9 (Classification des groupes d'ordre 30)**.** Soit G un groupe d'ordre 30. On note par n_p le nombre de p-Sylows de G.

(a) Montrer que $n_3 = 1$ ou $n_5 = 1$. (*Indication* : Sinon $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$ et on peut arriver à une contradiction en comptant les éléments d'ordre 3 et d'ordre 5.)

(b) En déduire que G admet un sous-groupe H d'ordre 15 qui est distingué et cyclique.

(c) Montrer que G admet un sous-groupe K d'ordre 2 et en déduire que $G \cong H \rtimes_\phi K$.

(d) Montrer que $\mathrm{Aut}(C_{15}) \cong (\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times \cong C_4 \times C_2$.

(e) En considérant tous les morphismes $C_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})$, montrer que G est isomorphe à l'un des quatre groupes suivants : C_{30}, $C_3 \times D_{10}$, $C_5 \times D_6$, D_{30}.

(f) Montrer que dans la liste ci-dessus tous les groupes sont distincts.

Exercice 10*. Classifier tous les groupes d'ordre 75 (il y en a 3).
On rappelle que $\mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2\right) \simeq GL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ *et que ce groupe a cardinal* $(5^2-1)(5^2-5) = 480$.

Exercice 11*. Classifier tous les groupes d'ordre 28 (il y en a 4).

Exercice 12 (Preuve alternative du théorème de Sylow)**.** Dans cet exercice on va démontrer que tout groupe fini admet des sous-groupes de Sylow.

(a) Montrer que si $H \le G$ et si P est un p-Sylow de G, alors il existe $x \in G$ tel que $xPx^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H. (*Indication :* Considérer l'action $H \curvearrowright G/P$.)

(b) Soit
$$P = \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p) : a_{ii} = 1 \text{ pour tout } i \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ pour tous } i > j\}$$
le sous-groupe de matrices triangulaires supérieures strictes. Montrer que P est un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p)$.

(c) Montrer que tout groupe fini G se plonge dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p)$ pour un n bien choisi.

(d) Conclure que tout groupe fini admet un p-Sylow.

Exercice 13*. Soit G un groupe. La *série centrale ascendante* de G est définie par récurrence comme suit : $Z_0(G) = \{e\}$, $Z_{i+1}(G) = \pi_i^{-1}(Z(G/Z_i(G)))$ où $\pi_i \colon G \to G/Z_i(G)$ est le morphisme quotient. Le groupe G est appelé *nilpotent* s'il existe n tel que $G = Z_n(G)$. Par exemple tout groupe abélien G est nilpotent car $G = Z_1(G)$.

(a) Vérifier que $Z_0(G) \le Z_1(G) \le \cdots$ est une suite ascendante de sous-groupes distingués de G.

(b) Montrer que tout p-groupe fini est nilpotent.

(c) Montrer que le groupe de Heisenberg
$$H = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ 0 & 1 & \mathbf{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est nilpotent.

(d) Montrer que si G_1 et G_2 sont nilpotents, alors $G_1 \times G_2$ l'est aussi.

(e) Montrer qu'un groupe fini est nilpotent ssi il est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow, i.e., tous ses sous-groupes de Sylow sont distingués. (*Indication :* Pour le sens difficile, on peut commencer par démontrer que si $H < G$, alors $H < N_G(H)$.)

(f) Montrer qu'un groupe fini G est nilpotent ssi pour tous $x, y \in G$ avec $\mathrm{pgcd}(\mathrm{ord}\, x, \mathrm{ord}\, y) = 1$, on a que $xy = yx$.

(g) Montrer que D_{2n} est nilpotent ssi n est une puissance de 2.