Correction de l'examen du 6 janvier 2026

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés.

Les téléphones portables, écouteurs et objets connectés doivent être rangés dans les sacs en bas de l'amphithéâtre.

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le barème représente le poids relatif des exercices et est donné à titre indicatif.

1. (2p.) Les groupes $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$ sont-ils isomorphes ?

   Solution. Non. Par le théorème chinois le premier groupe est cyclique et le deuxième ne l'est pas. En effet, il a au moins deux éléments d'ordre 2 : $(1,0)$ et $(0,3)$. □

2. (4p.) Soit $G = S_6$ le groupe des permutations de l'ensemble $[6] = \{1,2,3,4,5,6\}$ et soit

   $$A = \{a \subseteq [6] : |a| = 3\}.$$

   Considérons l'action naturelle $G \curvearrowright A$ donnée par

   $$\sigma \cdot \{x,y,z\} = \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\} \quad \text{pour } \sigma \in G, \{x,y,z\} \in A.$$

   Soit $a = [3] = \{1,2,3\} \in A$ et soit G_a le stabilisateur de a dans G.

   (a) Soit $\pi\colon G_a \to S_3$ le morphisme donné par $\pi(\sigma) = \sigma|_a$, où $\sigma|_a$ dénote la restriction de σ à l'ensemble a. Montrer que π est surjectif et que $|\ker \pi| = 6$.

   Solution. Soit $\tau \in S_3$ et soit $\sigma \in S_6$ définie par $\sigma(i) = \tau(i)$ si $i \in [3]$ et $\sigma(i) = i$ sinon. Alors $\sigma \in G_a$ et $\pi(\sigma) = \tau$ ce qui montre que π est surjectif.

   Soit $b = [6] \setminus a$ et notons que G_a stabilise b. En particulier on a un morphisme $\pi'\colon G_a \to \mathrm{Sym}(b)$, $\pi'(\sigma) = \sigma|_b$. On vérifie comme avant que $\pi'|_{\ker \pi}\colon \ker \pi \to \mathrm{Sym}(b)$ est un isomorphisme et donc $|\ker \pi| = |\mathrm{Sym}(b)| = 6$. □

   (b) Quel est l'ordre de G_a ?

   Solution. On a que $|G_a| = |\ker \pi| \cdot |\mathrm{im}\, \pi| = 6 \cdot 6 = 36$. □

   (c) Déterminer l'orbite $G \cdot a$.

   Solution. On a que $|G \cdot a| = |G|/|G_a| = 720/36 = 20$. D'autre part $|A| = \binom{6}{3} = 20$. Comme $G \cdot a \subseteq A$, on conclut que $G \cdot a = A$. □

   (d) Quel est le type d'isomorphisme de G_a ? (*Indication* : Décomposer G_a en produit direct de deux groupes.)

   Solution. Soit $\phi\colon G_a \to \mathrm{Sym}(a) \times \mathrm{Sym}(b)$ l'application donnée par $\phi(\sigma) = (\pi(\sigma), \pi'(\sigma))$. Comme π et π' sont des morphismes, ϕ en est un aussi. C'est une conséquence du raisonnement dans (a) que ϕ est une bijection. ϕ est donc un isomorphisme de groupes et $G_a \cong \mathrm{Sym}(a) \times \mathrm{Sym}(b) \cong S_3 \times S_3$. □

3. (4p.)

(a) Montrer que si G est un groupe et N_1 et N_2 sont deux sous-groupes distingués de G, alors $N_1 \cap N_2$ est un sous-groupe distingué de G.

Solution. Si $g \in G$, alors $g(N_1 \cap N_2)g^{-1} = gN_1g^{-1} \cap gN_2g^{-1} = N_1 \cap N_2$. □

(b) Soit n un entier, $n \geq 5$. On rappelle que le groupe alterné A_n est simple. Montrer que les seuls sous-groupes distingués de S_n sont $\{e\}, A_n$ et S_n.

Solution. Soit $N \trianglelefteq S_n$ et soit $H = N \cap A_n$. Par (a) et la simplicité de A_n, $H = A_n$ ou $H = \{e\}$. Si $H = A_n$, comme $[S_n : A_n] = 2$, on a deux possibilités : $N = A_n$ ou $N = S_n$. Soit maintenant $H = \{e\}$. Soit $\epsilon\colon S_n \to \{\pm 1\}$ le morphisme signature. Comme $H = \{e\}$, la restriction de ϵ à N est injective ce qui implique que $|N| \leq 2$. Si $|N| = 1$, alors $N = \{e\}$ et si $|N| = 2$, alors $N = \{e, \tau_1 \cdots \tau_k\}$, où les τ_i sont des transpositions de supports disjoints. Soit $\tau_1 = (a\ b)$. Si $k = 1$, soient c, d deux éléments de $[n] \setminus \{a, b\}$. Si $k \geq 2$, soit $\tau_2 = (c\ d)$. Dans les deux cas, en posant $\sigma = (a\ c)(b\ d)$, on a $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$, ce qui montre que N ne peut pas être distingué dans ce cas. □

(c) En déduire que S_n est engendré par les 4-cycles pour $n \geq 5$.

Solution. Les 4-cycles forment une classe de conjugaison, ce qui implique qu'ils engendrent un sous-groupe distingué de S_n. Ce sous-groupe n'est pas un sous-groupe de A_n car les 4-cycles sont des permutations impaires ; donc par (b) c'est S_n tout entier. □

4. (4p.) Soit $(\mathbf{Q}, +)$ le groupe des nombres rationnels muni de l'opération d'addition.

(a) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Q}$ engendré par un nombre fini d'éléments est cyclique. (*Indication :* On peut utiliser le fait que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.)

Solution. Soit $H = \langle p_1/q_1, \ldots, p_k/q_k \rangle$ avec $p_i, q_i \in \mathbf{Z}$. Alors H est un sous-groupe du groupe cyclique $\langle 1/(q_1 \cdots q_k) \rangle$ et il est donc cyclique. □

(b) Soit A un sous-groupe non trivial de $\mathbf{Q}$ et soit $\phi\colon \mathbf{Q}/A \to \mathbf{Q}$ un morphisme. Montrer que $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{Q}/A$. (*Indication :* Montrer d'abord que tout élément de $\mathbf{Q}/A$ est d'ordre fini.)

Solution. Soit $\pi\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/A$ le morphisme quotient. Soit $a = p/q \in A$, $a \neq 0$ et $z = k/m \in \mathbf{Q}$ avec $p, q, k, m \in \mathbf{Z}$. Alors $mpz = pk = qka \in A$. Donc $mp\pi(z) = \pi(mpz) = 0$, ce qui montre que $\pi(z)$ est d'ordre fini. Comme π est surjectif, tout élément de $\mathbf{Q}/A$ est d'ordre fini.

Soit maintenant $x \in \mathbf{Q}/A$. x est d'ordre fini et donc $\phi(x)$ aussi. Or le seul élément d'ordre fini dans $\mathbf{Q}$ est 0. Donc $\phi = 0$. □

5. (3p.) Soit G un groupe fini d'ordre n et supposons qu'il existe un diviseur premier p de n tel que $n > p \geq \sqrt{n}$. Montrer que G n'est pas simple. (*Indication :* Utiliser le théorème de Sylow.)

Solution. Supposons que G est simple. Soit n_p le nombre de p-Sylows de G. Alors $n_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ et $n_p \mid n/p \leq p$. Ceci implique que $n_p = 1$ et donc G a un unique p-Sylow P qui doit être distingué. Comme G est simple, ceci implique que $P = G$, donc $|G| = p^k$, $k \geq 2$. Par un résultat du cours, le centre de G est non trivial. Comme G est simple, ceci implique que G est abélien. Enfin on sait qu'un groupe abélien est simple ssi son ordre est un nombre premier. Comme ce n'est pas le cas pour G, c'est une contradiciton. □

6. (4p.) Soit A un groupe abélien, soit H un groupe, et soit $\phi\colon H \to \mathrm{Aut}(A)$ un morphisme. Considérons le produit semi-direct $G = A \rtimes_\phi H$.

(a) On rappelle que $Z(G)$ dénote le centre de G. Montrer que

$$Z(G) = \{(a, h) \in A \rtimes_\phi H : h \in Z(H), \phi(h) = \mathrm{id} \text{ et } \phi(k)(a) = a \text{ pour tout } k \in H\}.$$

Solution. On a pour $(a,h),(b,k) \in G$:

$$(a,h)(b,k) = (a\phi(h)(b), hk), \quad (b,k)(a,h) = (b\phi(k)(a), kh).$$

Pour voir l'inclusion $\supseteq$, supposons que $h \in Z(H), \phi(h) = \mathrm{id}$ et $\phi(k)(a) = a$ pour tout k. Alors $(a,h)(b,k) = (ab, hk) = (ba, kh) = (b,k)(a,h)$ pour tout $(b,k) \in G$. Pour l'autre inclusion, on sait que $(a,h)(b,k) = (b,k)(a,h)$ pour tout $(b,k) \in G$. En mettant $k = e$, on obtient $a\phi(h)(b) = ba = ab$ et donc $\phi(h)(b) = b$ pour tout $b \in A$, i.e., $\phi(h) = \mathrm{id}$. Maintenant pour (b,k) arbitraire, on a $ab = b\phi(k)(a) = \phi(k)(a)b$ et $hk = kh$. Ceci implique que $\phi(k)(a) = a$ et $h \in Z(H)$. □

(b) Notons par C_2 le groupe cyclique d'ordre 2 et considérons le cas où $A = C_2 \times C_2$, $H = C_2$ et $\phi(t)(x,y) = (y,x)$ pour tout $(x,y) \in A$, où t est l'élément non trivial de C_2. Dans ce cas, calculer le centre de G explicitement.

Solution. En utilisant (a), on voit que $Z(G) = \{e, ((t,t),e)\}$. □

(c) (Bonus) Le groupe G de (b) est isomorphe à un groupe qu'on connaît. Lequel ? (Il suffit d'identifier le groupe et un isomorphisme. Il n'y a pas besoin d'expliciter les calculs.)

Solution. G est isomorphe à D_8. Si r et s sont les générateurs standard de D_8, un isomorphisme est donné par $r \mapsto ((t,e),t), s \mapsto ((e,e),t)$. □