Examen (6 janvier 2026)

Durée : 2h, les documents ne sont pas autorisés.

Les téléphones portables, écouteurs et objets connectés doivent être rangés dans les sacs en bas de l'amphithéâtre.

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le barème représente le poids relatif des exercices et est donné à titre indicatif.

1. (2p.) Les groupes $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$ sont-ils isomorphes ?

2. (4p.) Soit $G = S_6$ le groupe des permutations de l'ensemble $[6] = \{1,2,3,4,5,6\}$ et soit
$$A = \{a \subseteq [6] : |a| = 3\}.$$
Considérons l'action naturelle $G \curvearrowright A$ donnée par
$$\sigma \cdot \{x,y,z\} = \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\} \quad \text{pour } \sigma \in G, \{x,y,z\} \in A.$$
Soit $a = [3] = \{1,2,3\} \in A$ et soit G_a le stabilisateur de a dans G.
   (a) Soit $\pi \colon G_a \to S_3$ le morphisme donné par $\pi(\sigma) = \sigma|_a$, où $\sigma|_a$ dénote la restriction de σ à l'ensemble a. Montrer que π est surjectif et que $|\ker \pi| = 6$.
   (b) Quel est l'ordre de G_a ?
   (c) Déterminer l'orbite $G \cdot a$.
   (d) Quel est le type d'isomorphisme de G_a ? (*Indication* : Décomposer G_a en produit direct de deux groupes.)

3. (4p.)
   (a) Montrer que si G est un groupe et N_1 et N_2 sont deux sous-groupes distingués de G, alors $N_1 \cap N_2$ est un sous-groupe distingué de G.
   (b) Soit n un entier, $n \geq 5$. On rappelle que le groupe alterné A_n est simple. Montrer que les seuls sous-groupes distingués de S_n sont $\{e\}, A_n$ et S_n.
   (c) En déduire que S_n est engendré par les 4-cycles pour $n \geq 5$.

4. (4p.) Soit $(\mathbf{Q}, +)$ le groupe des nombres rationnels muni de l'opération d'addition.
   (a) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Q}$ engendré par un nombre fini d'éléments est cyclique. (*Indication :* On peut utiliser le fait que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.)
   (b) Soit A un sous-groupe non trivial de $\mathbf{Q}$ et soit $\phi \colon \mathbf{Q}/A \to \mathbf{Q}$ un morphisme. Montrer que $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{Q}/A$. (*Indication :* Montrer d'abord que tout élément de $\mathbf{Q}/A$ est d'ordre fini.)

5. (3p.) Soit G un groupe fini d'ordre n et supposons qu'il existe un diviseur premier p de n tel que $n > p \geq \sqrt{n}$. Montrer que G n'est pas simple. (*Indication :* Utiliser le théorème de Sylow.)

6. (4p.) Soit A un groupe abélien, soit H un groupe, et soit $\phi \colon H \to \mathrm{Aut}(A)$ un morphisme. Considérons le produit semi-direct $G = A \rtimes_\phi H$.
   (a) On rappelle que $Z(G)$ dénote le centre de G. Montrer que
$$Z(G) = \{(a,h) \in A \rtimes_\phi H : h \in Z(H), \phi(h) = \mathrm{id} \text{ et } \phi(k)(a) = a \text{ pour tout } k \in H\}.$$
   (b) Notons par C_2 le groupe cyclique d'ordre 2 et considérons le cas où $A = C_2 \times C_2$, $H = C_2$ et $\phi(t)(x,y) = (y,x)$ pour tout $(x,y) \in A$, où t est l'élément non trivial de C_2. Dans ce cas, calculer le centre de G explicitement.
   (c) (Bonus) Le groupe G de (b) est isomorphe à un groupe qu'on connaît. Lequel ? (Il suffit d'identifier le groupe et un isomorphisme. Il n'y a pas besoin d'expliciter les calculs.)