I — ANNEAUX EUCLIDIENS, EXEMPLES, CONTRE-EXEMPLES

Exercice 1

Soit A un anneau commutatif unitaire et $I < A$ un idéal propre de A .

- a) Montrer que A/I intègre $\Leftrightarrow I$ idéal premier.
- b) Montrer que A/I corps $\Leftrightarrow I$ idéal maximal.

Exercice 2

Soit p un nombre premier. Soit $A = \mathbb{Z}[X]$.

- a) Montrer que l'idéal (p, X) n'est pas un idéal principal.
- b) Montrer que l'idéal $(p, X)^{n \dagger}$ peut être engendré par $n + 1$ éléments mais non moins.

Exercice 3

- a) Factoriser 2 et 5 dans $\mathbb{Z}[i]$.
- b) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(3)$ est un corps de cardinal 9.
- c) Montrer que $\mathbb{Z}[j]/(2)$ est un corps de cardinal 4.

Exercice 4

- a) Déterminer les éléments inversibles des anneaux suivants :
 - $\mathbb{D}$ l'anneau des décimaux,
 - $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{a}{2^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$,
 - $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ impair}\}$.
- b) Montrer que les idéaux des anneaux

$$\mathbb{D}, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], \mathbb{Z}_{(2)},$$

sont respectivement

- (x) , $x \in \mathbb{Z}$ premier à 10,
- (x) , $x \in \mathbb{Z}$ premier à 2,
- (2^k) , $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

†. Si I, J sont des idéaux, IJ est l'idéal engendré par les ij , $i \in I, j \in J$.

- a) Montrer que l'anneau $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est euclidien. On pourra utiliser l'application $N : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{Z}$, $a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$. Montrer que $(1 + \sqrt{2}) \in \mathcal{O}^*$. Montrer que $\mathcal{O}^* = \{\pm(1 + \sqrt{2})^n : n \in \mathbb{Z}\}$.[‡]
- b) Montrer que l'anneau $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[j]$, où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est euclidien.
- c) Soit $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. Montrer que $\mathcal{O}^* = \{\pm 1\}$. Montrer que 2, 3, $1 \pm i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans $\mathcal{O}$. En déduire que $\mathcal{O}$ n'est pas factoriel. Montrer que l'idéal $(2, 1 + i\sqrt{5})$ n'est pas principal.
- d) Soit $\mathcal{O}$ un anneau intègre. Supposer qu'il existe un *stathme euclidien*[†] $\nu : \mathcal{O} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathcal{O}$ non inversible avec $\nu(x)$ minimal. Montrer que $\mathcal{O}^* \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{O}/(x)$ est surjectif. En déduire que l'anneau $\mathcal{O} = \mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ n'est pas euclidien.[‡]

Exercice 6

- a) Montrer que X^2 et X^3 sont irréductibles dans l'anneau $\mathbb{R}[X^2, X^3]$. En déduire que l'anneau $\mathbb{R}[X^2, X^3]$ n'est pas factoriel.
- b) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ est intègre non factoriel.[§]
- c) Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ est principal.[¶]

[‡]. *Indication.* Soit $0 < x \in \mathcal{O}^*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n \leq x < (1 + \sqrt{2})^{n+1}$, montrer que $x(1 + \sqrt{2})^{-n} = 1$.

[†]. *c-à-d* $\forall a \in \mathcal{O}, \forall 0 \neq b \in \mathcal{O}, \exists q, r \in \mathcal{O}, a = bq + r, r = 0$ ou $\nu(r) < \nu(b)$.

[‡]. *Indications.* Commencer par montrer que $\mathcal{O}^* = \{\pm 1\}$ et que 2 et 3 sont irréductibles.

[§]. *Indication.* $X^2 = (1 - Y)(1 + Y) \bmod X^2 + Y^2 - 1$.

[¶]. C'est isomorphe à l'anneau $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$.