

X. — REPRÉSENTATIONS DES GROUPES ABÉLIENS FINIS

Exercice.

- a) Soit V un $\mathbb{C}$ –espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f_i)_i$ une famille d'endomorphismes $\mathbb{C}$ –linéaires *diagonalisables* de V qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base diagonalisation commune à tous les f_i .
- b) Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'une représentation irréductible $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ est de degré 1 (*c-à-d* $\dim V = 1$).
- c) Soit G un groupe abélien fini. On note $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$.
Posons $V = \mathbb{C}^G$. Pour tout $g \in G$, notons l'opérateur linéaire :

$$T_g : V \rightarrow V, f \mapsto T_g(f) : x \mapsto f(xg) .$$

Pour tout $\chi \in \hat{G}$, soit $V_\chi = \{v \in V : \forall g \in G, T_g(f) = \chi(g)f\}$.

En utilisant la première question, montrer que $V = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} V_\chi$.

- d) Montrer que $V_\chi = \mathbb{C}\chi$ et en déduire que $|G| = |\hat{G}|$.
- e) On définit une structure de groupe pour $\hat{G}$ avec la loi :

$$\forall g \in G, \forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}, \chi_1 \cdot \chi_2 : g \mapsto \chi_1(g)\chi_2(g) .$$

Vérifier que $\hat{G}$ est un groupe abélien fini.

- f) Montrer que $G \rightarrow \hat{\hat{G}}, g \mapsto \hat{g} : \chi \mapsto \chi(g)$ est un isomorphisme pour tout groupe G abélien fini.
- g) On pose pour $f_1, f_2 \in V = \mathbb{C}^G$,

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g) .$$

Vérifier que l'on obtient un produit scalaire hermitien pour V et que les $\chi \in \hat{G}$ forment une base orthonormée de V .

- h) En déduire :

$$\forall g, h \in G, \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)} \chi(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- i) Déterminer $\hat{G}$ lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- j) En déduire que $G \simeq \hat{\hat{G}}$ pour tout groupe abélien fini[†].
- k) On note $n = |G| = |\hat{G}|$. On numérote les éléments de $G : g_1, \dots, g_n$ et $\chi_1, \dots, \chi_n$ les éléments de $\hat{G}$. Montrer que $|\det(\chi_i(g_j))_{1 \leq i, j \leq n}|^2 = n^n$.
- l) En déduire que $\det^2(\chi_i(g_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \pm n^n$. *Indication* : $\det(\overline{\chi_i}(g_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \pm \det(\chi_i(g_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

[†]. On admettra que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques.

- m) Soit G un groupe abélien fini. Pour tout $g \in G$, on choisit une variable X_g .
Démontrer la formule

$$\det(X_{gh^{-1}})_{g,h \in G} = \prod_{\chi \in \hat{G}} \left(\sum_{g \in G} \chi(g) X_g \right).$$

Indication. Raisonner dans le $\mathbb{C}$ –espace vectoriel $\mathbb{C}G = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}g$. Vérifier que les $\sum_{g \in G} \chi(g)g$, $\chi \in \hat{G}$ forment une base de $\mathbb{C}G$ et déterminer pour toute famille $(a_g)_{g \in G} \in \mathbb{C}^G$ les matrices de l'application linéaire $\mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G$, $x \mapsto \sum_{g \in G} a_g g.x$ dans les bases $g, g \in G$ et $\sum_{g \in G} \chi(g)g$, $\chi \in \hat{G}$.