XIII.— Le groupe des quaternions Q_8

Soit

$$Q_8 = \mathrm{SU}_2(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$$

où

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier les relations

$$I^2 = J^2 = K^2 = -I_2,\; IJ = -JI = K,\; JK = -KJ = I,\; KI = -IK = J$$

et en déduire les cinq classes de conjugaison de Q_8.

2) Déterminer les quatre représentations de degré 1 de Q_8.

3) Montrer que l'inclusion $Q_8 \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ définit une représentation irréductible.

4) Vérifier que le groupe Q_8 a la même table de caractères que le groupe diédral D_4 :

1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1
2	-2	0	0	0

,

mais que $Q_8 \not\simeq D_4$. *Indication : comparer le nombre d'éléments d'ordre* 2 *par exemple.*

5) Soit $\rho : Q_8 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ une représentation irréductible. Montrer que ρ est injective.

6) Montrer que $\forall\, g \in Q_8$, $\det \rho(g) = 1$ en considérant les valeurs propres possibles.

7) En déduire que $\rho(Q_8) \nsubseteq O_2(\mathbb{R})$.

8) En déduire que $\rho(Q_8) \nsubseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. *Indication. Si on avait $\rho(Q_8) \leqslant O_2(\mathbb{R})$, justifier l'existence d'un $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\rho(Q_8) \leqslant uO_2(\mathbb{R})u^{-1}$ et se ramener à la question précédente ...*