XIV — Représentations irréductibles des groupes $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$

Exercice 1 Soit $G = \mathfrak{S}_4$.

a) Quelles sont les représentations de G de degré 1 ?

b) En considérant le sous-groupe $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ de G montrer qu'il n'existe pas de morphisme injectif $G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *Indication. L'image de K par un tel morphisme serait un sous-groupe conjugué à* $\left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\right\}$.

c) Si $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, on pose pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$,

$$^{\sigma}P = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}) \ .$$

On pose

$$e_1 = (X_1 - X_2)(X_3 - X_4),\ e_2 = (X_1 - X_3)(X_2 - X_4),$$

$$V = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2 \leqslant \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4] \ .$$

Montrer que $^{\tau}(e_1)$, $^{\tau}(e_2) \in V$ pour $\tau = (1,2), (2,3), (3,4)$.
En déduire une représentation $\rho : \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{GL}(V)$.
Déterminer les matrices $\rho(\sigma)$ dans la base (e_1, e_2) pour

$$\sigma = (1,2),\ (1,2,3),\ (1,2)(3,4),\ (1,2,3,4) \ .$$

Vérifier que ρ est une représentation irréductible.

d) Donner dans une base choisie les matrices de la représentation par permutations des coordonnées de l'hyperplan $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0)$ de $\mathbb{C}^4$.

e) On note

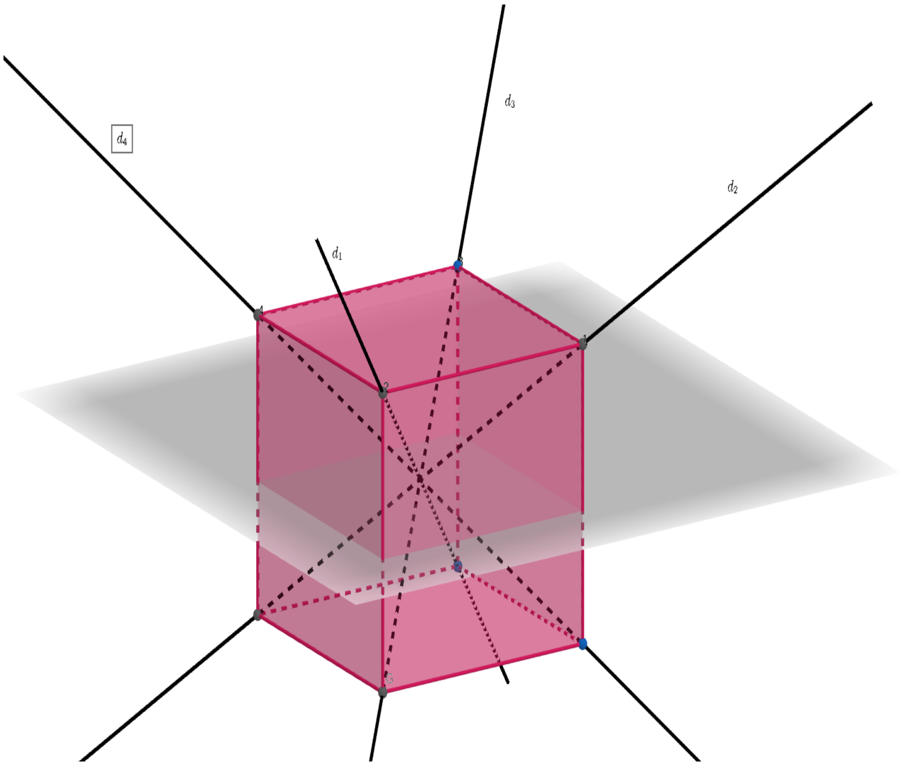
$$d_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$d_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ x \\ x \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$d_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ -x \\ x \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$d_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

les diagonales du cube de sommets de coordonnées ± 1.



En utilisant une action de $G_C = SO_3(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, montrer que $G_C \simeq G$. En déduire les matrices de la représentation ρ de degré 3 associée de G.

f) La représentation ρ est-elle équivalente à la représentation précédente ?

g) Donner la table des caractères de G.

Exercice 2 Soit $G = \mathfrak{A}_4$.

a) Quelles sont les représentations de G de degré 1.

b) Soit $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Montrer que la représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ définie par la permutation des coordonnées est irréductible.

Indication. Si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ *avec* $x_1 \neq 0$*, calculer* $v + \rho((234))(v) + \rho((243))(v)$ *et en déduire que si un sous-espace* $0 \neq W \leqslant V$ *est* $\rho(G)$ *stable, alors* $(1, -1, 0, 0) \in W$.

c) Donner la table des caractères de G.